**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова**

И.В. Колмыкова

Теоретическая механика
Статика
Сборник заданий

**Белгород
2017**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

И.В. Колмыкова

Теоретическая механика
Статика
Сборник заданий

*Утверждено ученым советом университета
в качестве учебного пособия для студентов всех
технических специальностей и направлений бакалавриата*

Белгород
2017

УДК 531(07)
ББК 22.2я7
К60

Рецензенты:

Кандидат технических наук ведущий инженер-конструктор руководитель группы ООО «ПСК«БелЭнергоСтрой» *А.С. Горшков*

Кандидат технических наук, доцент Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова *Т.Г. Калачук*

Колмыкова, И. В.

К60 Теоретическая механика. Статика. Сборник заданий: учебное пособие/ И. В. Колмыкова. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. – 100 с.

В данном учебном пособии представлены задачи по основным темам раздела «Статика». Задачи предваряются кратким изложением материала по соответствующей теме и сопровождаются примерами решений. Для каждого из типов задач предложены тридцать вариантов заданий для индивидуальной работы студентов.

Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта высшего образования и может быть использовано для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки специалитета и бакалавриата технического ВУЗа при выполнении расчетно-графических и индивидуальных домашних заданий.

Данное издание публикуется в авторской редакции.

УДК 531(07)
ББК 22.2я7

Введение

Теоретическая механика - одна из фундаментальных естественнонаучных дисциплин физико-математического цикла. Она представляет собой одну из научных основ современных технических дисциплин. На основных законах теоретической механики базируются многие общетехнические и специальные дисциплины, такие как сопротивление материалов, строительная механика, теория механизмов и машин, детали машин и подъемно-транспортные устройства, гидравлика и гидравлические машины, машины и оборудование предприятий строительной индустрии, пищевых производств и многие другие. Изучение теоретической механики дает также тот минимум фундаментальных знаний, на основе которых будущий специалист сможет самостоятельно овладеть новой информацией, с которой ему придется столкнуться в производственной и научной деятельности.

Чтобы хорошо освоить курс теоретической механики, нужно не только глубоко изучить теоретический материал, но и получить твердые навыки в решении задач. Эти навыки студенты приобретают на практических занятиях и в процессе самостоятельного решения определенного количества задач по основным темам курса, включенных в расчетно-графические задания (РГЗ).

Настоящее пособие предназначено для оказания помощи студентам в подготовке к практическим занятиям и выполнении расчетно-графических заданий по разделу «Статика». В пособии приведены некоторые вопросы теории, необходимые для решения задач, а также алгоритмы, методика и примеры решения всех типов задач, включенных в РГЗ.

Каждую задачу выполняют и защищают отдельно по мере изложения соответствующей темы на лекциях и проработки ее на практических занятиях. Порядок оформления работ и образец титульного листа представлены в прил. 1 и прил. 2 – соответственно.

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные понятия

В статике излагается учение о силах, и изучаются условия равновесия материальных тел под действием различных систем сил.

Сила - это количественная мера механического взаимодействия материальных тел. Действие силы на тело определяется: 1) *модулем,* 2) *направлением,* 3) *точкой приложения.*

По взаимной ориентации системы сил делятся на:

1) *систему сходящихся сил*, то есть систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке,

2) *систему параллельных сил* - систему сил, линии действия которых параллельны между собой,

3) *систему произвольно расположенных сил* - систему сил, расположенных друг относительно друга произвольным образом.

Указанные системы сил могут лежать или в одной плоскости (плоские системы сил), или в пространстве (пространственные системы сил). Таким образом, всего в статике изучают шесть различных систем сил.

Чтобы твердое тело находилось в равновесии (в покое) под действием той или другой системы сил, необходимо, чтобы эти силы удовлетворяли определенным *условиям равновесия*. Нахождение этих условий является одной из основных задач статики. Но для установления условий равновесия различных систем сил, нужно уметь складывать силы, действующие на твердое тело, заменять действие одной системы сил другой системой и, в частности, приводить данную систему сил к простейшему виду. Поэтому в статике твердого тела решаются две основные задачи: I) сложение и приведение систем сил, действующих на твердое тело, к простейшему виду;

2) установление условий равновесия действующих на т ело систем сил

Задачи статики могут решаться различными способами Геометрический и графический способы отличаются простотой и наглядностью геометрических построений.

При аналитическом (численном) способе составляют систему уравнений равновесия, в которые входят уравнения проекций сил на координатные оси и уравнения моментов сил относительно выбранных точек. Поэтому для успешного решения задач статики нужно уметь проектировать силы, определять моменты сил, а также знать основные типы связей, направление их реакций и условия равновесия всех систем сил. Не овладев этими знаниями и навыками, приступать к решению задач преждевременно.

Приведем некоторые сведения из статики, которые помогут на начальном этапе освоения этого раздела приступить к решению задач.

Связи и их реакции

В статике изучают, как правило, равновесие несвободных тел, то есть тел, перемещениям которых в пространстве препятствуют другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела

Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называют связями.

Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называют силой реакции (силой противодействия) связи или просто *реакцией связи.* Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Силы, не являющиеся реакциями связей, называют *активными силами.*

При решении задач статики очень важно указать правильное направление реакций Реакции, неправильно изображенные на расчетной схеме, делают решение задачи заведомо неверным. Ниже приведены основные типы связей и направление их реакций (рис. 1-6).

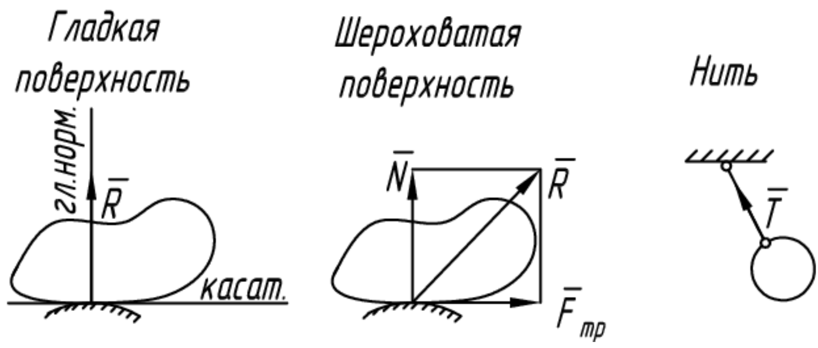


Рис. 1. Основные типы связей.

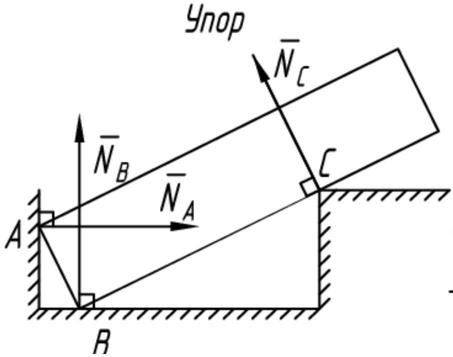


Рис. 2. Основные типы связей

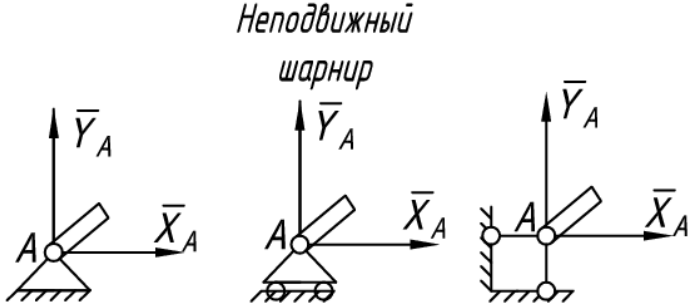


Рис. 3. Основные типы связей

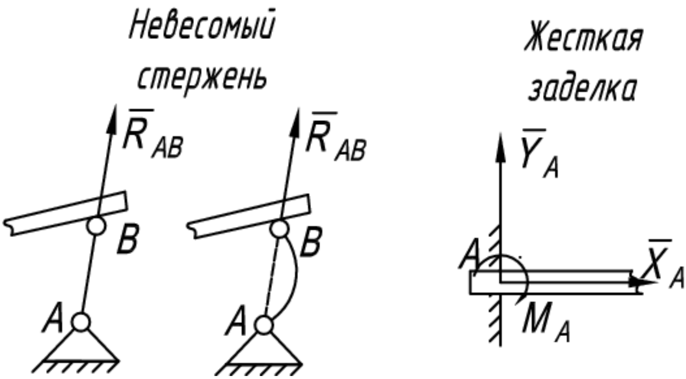


Рис. 4. Основные типы связей

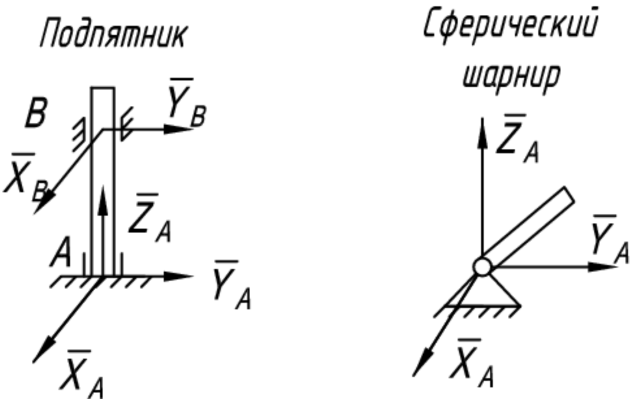


Рис. 5. Основные типы связей

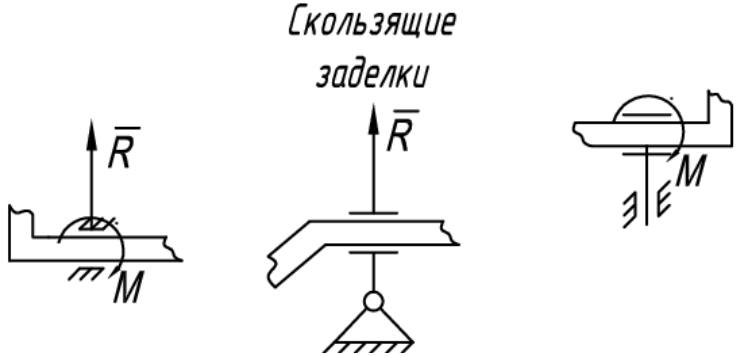


Рис. 6. Основные типы связей

Проекция силы на ось

При аналитическом решении задач векторы сил определяют через их проекции на оси координат.

Проекцией силы на ось называют скалярную величину, равную длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы и взятую с соответствующим знаком.

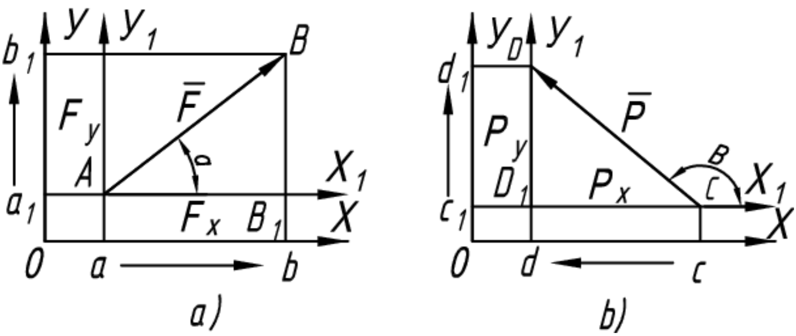


Рис. 7. Проекция силы на ось

Для определения, например, проекции вектора $\bar{F}$ на ось *Ox* (рис. 7, *a*) нужно из его начала (точка А) и из его конца (точка В) опустить перпендикуляры на эту ось.

Точка (a) будет проекцией начала, а точка (b) - проекцией конца вектора $\bar{F}$ на ось *Ox*. Длина отрезка (ab) численно равна проекции F_x вектора $\bar{F}$ на ось (*Ox*, т.е. $F_x = ab$. Если точка приложения силы (точка А на рис. 7, *a*) не лежит на оси *Ox*, вектор силы удобнее проектировать не на эту ось, а на ось Ax_1 ей параллельную и проведенную через точку A приложения силы. Значение проекции силы при этом не изменится, $F_x = AB_1 = ab$, и ее легко определить из треугольника ABB_1

$$F_x = F \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

Отсюда следует, что величина проекции F_x и ее знак зависят от угла α между *положительным направлением оси Ох и направлением силы* $\bar{F}$. Если угол α острый ($\cos\alpha > 0$), проекция F_x (рис. 7, *a*) положительна и равна $F_x = F \cdot \cos\alpha$.

Если угол α между направлением оси *Ox* и силой $\bar{P}$ (рис. 7, b) тупой ($\cos\alpha < 0$), проекция P_x отрицательна и равна

$P_x = P \cdot \cos\alpha = -P \cdot \cos(180 - \alpha) = -P \cdot \cos\beta$.

В частности:

при $\alpha = 0°$, $\quad \cos\alpha = +1$, $\quad F_x = +F$,

при $\alpha = 180°$, $\quad \cos\alpha = -1$, $\quad F_x = -F$,

при $\alpha = 90°(270°)$, $\quad \cos\alpha = 0$, $\quad F_x = 0$.

Аналогично определяют проекции сил $\bar{F}$ и $\bar{P}$ на ось Oy

$$F_y = F \cdot sin\,\alpha,\;\; P_y = P \cdot sin\,\alpha = P \cdot sin(180 - \alpha) = P \cdot sin\,\beta.$$

Знаки проекций можно определить по-другому. Проекция силы $\bar{F}$ на ось *Ox* положительна (рис. 7, *а*), т.к. перемещение проекции начала (точка a) к проекции конца (точка b) совпадает с положительным направлением оси *Ox* (перемещения на рис. 7 указаны стрелками). Проекция силы $\bar{P}$ на ось *Ox* отрицательна (рис. 7, *б*), т.к. перемещение проекции начала (точка c) к проекции конца (точка d) противоположно положительному направлению оси *Ox*.

Если проекции F_x, и F_y некоторого вектора $\bar{F}$ на координатные оси *Oxy* известны, то модуль полного вектора равен

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z} \tag{2}$$

Алгебраический момент силы относительно центра (точки)

Тела под действием сил могут наряду с поступательным перемещением совершать вращение вокруг того или иного центра. *Вращательный эффект силы характеризуется ее моментом.*

Например, сила $\bar{F}$, приложенная в точке *A* тела (рис. 8, *а*), стремится повернуть его вокруг центра *O* в плоскости *OAB*. Вращательный эффект силы будет зависеть: 1) от модуля силы *F* и длины плеча h; 2) от положения плоскости поворота *OAB* в пространстве; 3) от направления поворота в этой плоскости.

В задачах плоской статики все силы лежат в одной плоскости Эта плоскость и будет плоскостью поворота всех сил. Задавать ее дополнительно нет необходимости. Направление поворота можно охарактеризовать знаком: принято условно считать *момент положительным*, если сила стремится повернуть чело вокруг центра *O* против хода часовой стрелки (рис. 8, *а*) и *отрицательным* - если по ходу часовой стрелки (рис. 8, *б*).

Таким образом, для количественного измерения вращательного эффекта можно ввести следующее понятие момента силы. *Моментом силы $\bar{F}$ относительно центра O называют величину, равную взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы F на плечо h.*

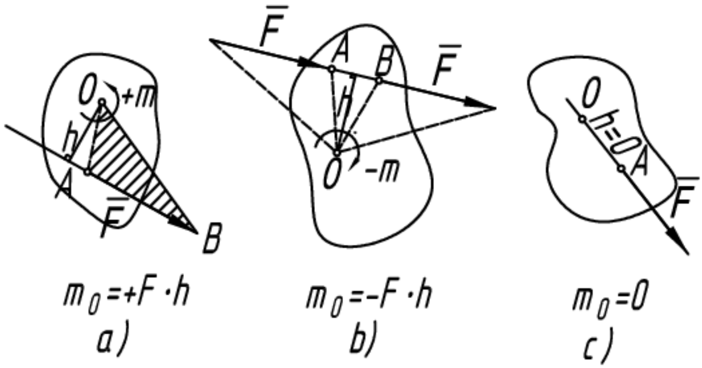


Рис. 8. Момент силы

Из рис. 8, *a* следует также, что произведение $\boldsymbol{F \cdot h}$ равно удвоенной площади треугольника ОАВ. Следовательно,

$$\boldsymbol{m_o(\overline{F}) = \pm F \cdot h = \pm 2}\text{пл.}\,\Delta\boldsymbol{OAB}, \tag{3}$$

Отметим некоторые свойства момента силы.

1) Момент силы $\overline{\boldsymbol{F}}$ не изменится, если точку приложения силы перенести вдоль линии ее действия в любую другую точку тела (например, при переносе точки приложения силы из точки A в точку B на рис. 8, b). Плечо h и направление силы F при этом остаются неизменными, значит, не изменяется и момент силы.

2) Момент силы F, как это следует из выражения (3), равен нулю, или когда модуль ее равен нулю ($F=0$), или когда линия действия силы F проходит через центр O ($h=0$ на рис. 8, c).

При определении момента силы следует придерживаться такой последовательности действий:

1) провести линию действия силы $\overline{F}$ в сторону моментной точки (точка О на рис. 8, a),

2) опустить перпендикуляр из точки О на линию действия силы $\overline{\text{F}}$,

3) найти длину этого перпендикуляра (плечо h),

4) определить численное значение модуля момента как произведение модуля силы на плечо ($F \cdot h$),

5) определить знак момента в соответствии с принятым правилом знаков.

В некоторых случаях нахождение плеча h связано с громоздкими геометрическими вычислениями. Чтобы их избежать, можно воспользоваться теоремой Вариньона. Математическое выражение теоремы имеет вид

$$\boldsymbol{m_O}(\overline{\boldsymbol{R}}) = \sum \boldsymbol{m_O}(\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}) \quad (4)$$

Момент равнодействующей тоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.

Практическое применение этой теоремы рассмотрим на следующем примере. Требуется, например, определить момент силы $\bar{F}$, приложенной к телу *ABC,* относительно центра *A* (рис. 9). В соответствии с предложенным выше алгоритмом проводим линию действия силы $\bar{F}$ в сторону точки *A* (линия *CD)* и из точки *A* опускаем на эту линию перпендикуляр *AD.* Длина этого перпендикуляра равна плечу h (*AD*=h). Определение его из четырехугольника *ABCD* связано с некоторыми сложностями, избежать которые поможет теорема Вариньона. Разложив силу $\bar{F}$ на две составляющие $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, получим простейшую систему сходящихся сил, для которых сила $\bar{F}$ является равнодействующей.

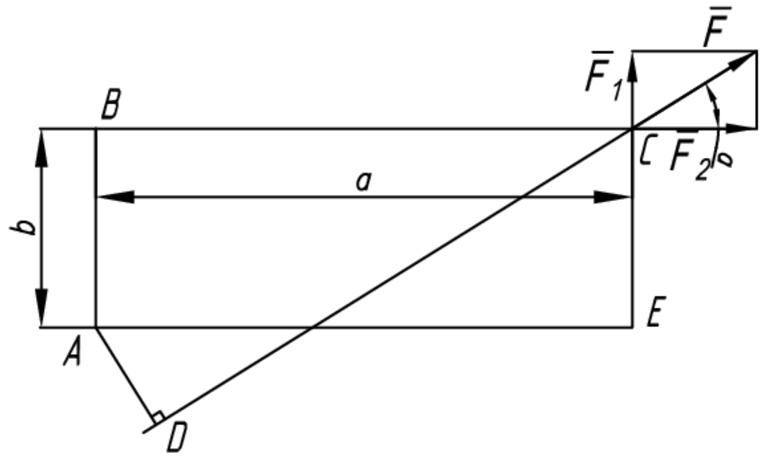


Рис. 9. Теорема Вариньона для момента силы относительно центра

По теореме Вариньона

$$m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}_1) + m_A(\bar{F}_2)$$

Составляющие F_1 и F_2 соответственно равны $F_1 = F \cdot sin\,\alpha$, $F_2 = F \cdot cos\,\alpha$.

Плечо h_1 силы F_1 равно $h_1 = AE = a$, плечо h_2 силы F_2 равно $h_2 = AB = b$, тогда моменты сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ будут равны

$$m_A(\bar{F}_1) = F_1 \cdot a = F \cdot sin\,\alpha \cdot a,$$
$$m_A(\bar{F}_2) = -F_2 \cdot b = -F \cdot cos\,\alpha \cdot b$$

Окончательно момент силы $\bar{F}$ относительно точки A равен

$$m_A(\bar{F}) = F \cdot sin\,\alpha \cdot a - F \cdot cos\,\alpha \cdot b$$

Как видим, нахождение момента силы по теореме Вариньона затруднений, не вызывает.

Условия равновесия систем сил, лежащих в одной плоскости

Во всех задачах статики составляют и решают уравнения равновесия, которые получают из условий равновесия той или другой системы сил. Ниже приведены условия равновесия систем сил, лежащих в одной плоскости.

1. Система сходящихся сил

1-я форма $\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \end{cases}$ *основная форма,* (5)

2-я форма $\begin{cases} \sum m_A(\overline{F}_k) = 0 \\ \sum m_B(\overline{F_k}) = 0 \end{cases}$ (6)

дополнительное условие: точки A и B не лежат на одной прямой с точкой схода сил.

2. Система параллельных сил

1-я форма $\begin{cases} \sum F_{ky} = 0 \\ \sum m_O(\overline{F_k}) = 0 \end{cases}$ *основная форма,* (7)

где ось Oy || силам,

2-я форма $\begin{cases} \sum m_A(\overline{F_k}) = 0 \\ \sum m_B(\overline{F_k}) = 0 \end{cases}$ (8)

дополнительное условие: *отрезок AB не|| силам.*

3. Система сил, произвольно расположенных в одной плоскости

1-я форма $\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum m_O(\overline{F_k}) = 0 \end{cases}$ *основная форма,* (9)

2-я форма $\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum m_A(\overline{F_k}) = 0 \\ \sum m_B(\overline{F_k}) = 0 \end{cases}$ (10)

дополнительное условие: отрезок AB не перпендикулярен оси Ox.

3-я форма $\begin{cases} \sum m_A(\overline{F_k}) = 0 \\ \sum m_B(\overline{F_k}) = 0 \\ \sum m_C(\overline{F_k}) = 0 \end{cases}$ (11)

дополнительное условие: точки A, B, C не лежат на одной прямой. Эту форму условия равновесия произвольной плоской системы сил называют теоремой о трех моментах.

Как видим, каждая система сил имеет несколько форм условий равновесия, что дает возможность в каждой конкретной задаче выбрать ту форму, которая приводит к более простым уравнениям.

Решение задач статики

Методами статики чаще всего решают задачи двух типов: 1) задачи, в которых известны (полностью или частично) действующие на тело силы и требуется найти, в каком положении, или при каких соотношениях между действующими силами, тело будет находиться в равновесии; 2) задачи, в которых заведомо известно, что тело находится в равновесии и требуется определить все или некоторые из действующих на тело неизвестных сил. Реакции связей заведомо неизвестны во всех задачах статики.

Алгоритм решения задач статики

1. Изобразить расчетную схему, для этого необходимо
— выбрать и изобразить в масштабе тело, равновесие которого рассматривается в данной задаче;
— отбросить связи и заменить их действие реакциями (рис. 1-6);
— изобразить на схеме активные силы (заданные и искомые) и реакции связей;
— с учетом ориентации неизвестных сил выбрать координатные оси предпочтительно так, чтобы одна из осей была перпендикулярна какой-либо неизвестной силе.
2. Составить уравнения равновесия, для чего нужно:
— установить какая система сил приложена к телу (система сходящихся, параллельных или произвольно расположенных сил),
— выбрать форму условий равновесия этой системы сил,
— составить уравнения равновесия, исходя из выбранных условий равновесия (формулы (5) – (11).
3. Решить систему уравнений и определить искомые величины.
4. Выполнить проверку полученных результатов.

Предложенный метод решения задач называют аналитическим. Он является основным в теоретической механике и применяется практически при решении всех задачах статики.

Реже применяют геометрический способ. Им обычно пользуются в тех случаях, когда к телу приложено только три силы (заданные и искомые). Нахождение искомых величин в этом случае сводится к построению силового треугольника и его решению.

В прикладной механике часто пользуются графическим способом. Он сводится к построению (строго в масштабе) силового многоугольника с последующим нахождением искомых величин путем измерения их длин на чертеже. Этот метод достаточно прост и нагляден, но отличается неточностью. Он требует также наличия прочных систематизированных знаний начертательной геометрии и инженерной графики, специального чертежного инструмента и соответствующих условий дляработы.

Методы определения реакций внешних и внутренних связей

Расчет инженерных сооружений во многих случаях сводится к изучению условий равновесия конструкций, состоящих из нескольких тел (системы тел), определенным образом связанных между собой.

Связи, посредством которых тела данной конструкции соединяются между собой, называются связями внутренними. В качестве внутренних связей чаще всего используют или шарнирное соединение, или скользящую заделку. Для конструкций из нескольких тел задача, как правило, сводится к определению реакций и внешних, и внутренних связей.

Обычные методы решения, когда рассматривается равновесие всей конструкции, не позволяют определить внутренние усилия (реакции). Согласно третьему закону Ньютона части конструкции действуют друг на друга с усилиями, равными по модулю и противоположными по направлению. Проекции этих сил на любую ось и моменты их относительно любого центра будут также попарно равны по модулю, но противоположны по знаку, поэтому в уравнениях равновесия (для всей конструкции) они сократятся, и определить их из этих уравнений нельзя.

Составляя уравнения равновесия для всей конструкции согласно любой из форм условий равновесия, получим в трех уравнениях четыре неизвестных – X_A, Y_A, m_A, R_B. Получается, что определить и внешние реакции не представляется возможным.

Если число неизвестных реакций связи равно числу уравнений равновесия, то задача является статически определенной, а конструкция статически определимой. Если число неизвестных реакций превышает число уравнений равновесия, то задача является статически неопределенной, а конструкция статически неопределимой.

Для решения подобных задач применим *метод сечений*. Сечением по внутренней связи - шарниру C - (рис. 10) конструкцию расчленяют на два тела (тело1 и тело2). Действие тел друг на друга заменяют силами ($\bar{X}_C = -\bar{X}_C$ и $\bar{Y}_C = -\bar{Y}_C$). Последние, будучи силами внутренними для всей конструкции, становятся силами внешними для каждого тела в отдельности. Их включают в уравнения равновесия тела 1 и (или) тела 2 и находят из этих уравнений.

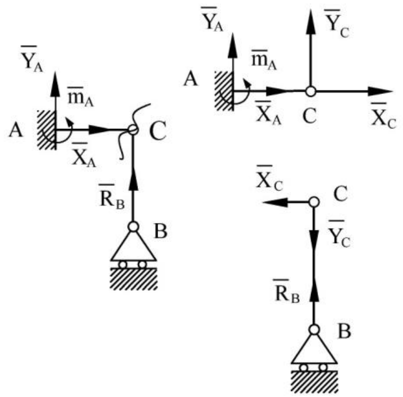


Рис. 10. Равновесие составной конструкции при шарнирном соединении

Если в качестве внутренней связи используется скользящая заделка (рис. 11), то в результате сечения действия тел друг на друга заменяют силами ($\bar{R}_C = -\bar{R}_C$ и $m_C = -m_C$). Как и в случае с шарниром, возникшие усилия являются внутренними для всей конструкции, и внешними - для каждой из ее частей. Они также входят в уравнения равновесия тела 1 и (или) тела 2, откуда и определяем их значения.

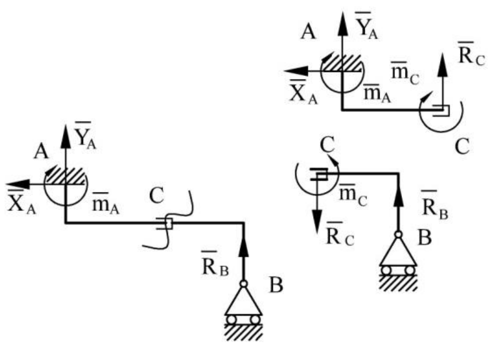


Рис. 11. Равновесие составной конструкции при соединении скользящей заделкой

Для определения реакций внешних и внутренних связей можно воспользоваться одним из предложенных ниже способов. Рассмотрим их применительно к рис. 10 (активные силы на рисунке не показаны).

1-й способ. Составить уравнения равновесия для всей конструкции (рис. 10a). Получают три уравнения с четырьмя неизвестными: X_A, Y_A, X_B, Y_B. Рассмотрев дополнительно равновесие тела 1 (рис. $10b$) или тела 2 (рис. $10c$), получают еще три уравнения с двумя новыми неизвестными: для шарнирного соединения - X_C, Y_C (или X_C^1, Y_C^1), для скользящей заделки - $\bar{R}_C$, m_C (или $\bar{R}_C{}^1, m_C{}^1$). Решая полученную систему шести уравнений, определяют все шесть неизвестных.

2-й способ. Конструкцию сразу расчленить на два тела и составить по три уравнения равновесия для каждого тела в отдельности. В результате получают систему шести уравнений, из которых находят все шесть неизвестных.

Предпочтение отдают тому способу, при котором уравнения получаются более простые.

Ферма. Методы расчета плоской фермы.

Ферма – геометрически неизменяемая шарнирно-стержневая конструкция. Места соединения стержней – шарниры – называются узлами фермы. Все активные силы и реакции связей, действующие на ферму, прикладываются только к ее узлам. Все стрежни фермы, испытывающие нагрузки, считаем растянутыми, а их усилия направленными на сжатие от концов к центру.

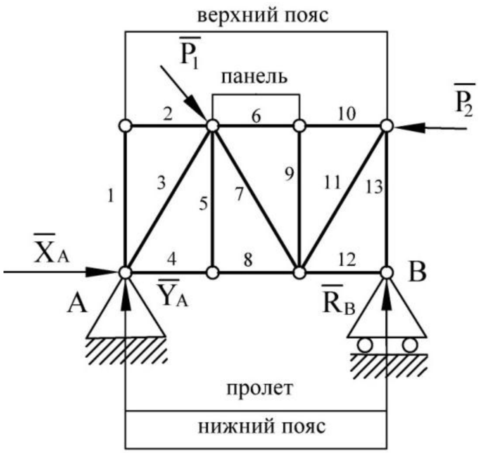


Рис. 12. Элементы плоской фермы с параллельными поясами.

На рис. 12 изображена плоская ферма с указанием названий основных ее частей: стержни № 1, 5,9, 13 – стойка; стержни № 3,7,11 – раскос; стержни № 1,13 – опорная стойка; стержни № 3,11 – опорный раскос.

Метод вырезания узлов

- считая ферму абсолютно твердым телом, определить реакции в опорах и сделать проверку;
- вырезать узел фермы, содержащий не более двух неизвестных усилий стержней;
- считая узел фермы сходящейся системой сил, находящейся в равновесии, составить уравнение равновесия для узла, как для сходящейся системы сил согласно 1-ой форме условия равновесия (5);
- решая полученную систему уравнений, рассчитать усилия стержней;
- перемещаясь от узла к узлу, последовательно вырезая их таким образом, чтобы в каждом из них содержалось не более двух стержней с неизвестными усилиями, рассчитать усилия всех стержней фермы;
- последний узел фермы является проверочным - для данного узла все усилия стержней известны, необходимо составить уравнения равновесия, которые, при подстановке всех входящих в них величин, должны обратиться в тождество.

Метод сечений Риттера

- считая ферму абсолютно твердым телом, определить реакции в опорах и сделать проверку;
- мысленно рассечь ферму таким образом, чтобы в сечении оказалось не более трех стержней с неизвестными усилиями;
- одну из частей конструкции отбрасываем, и действие отброшенной части на оставшуюся выражают усилиями стержней, стремящихся к сжатию;
- составим уравнение равновесия для оставшейся части; для этого запишем два уравнения моментов, относительно точек, в которых попарно пересекаются стержни с неизвестными усилиями, и одно уравнений проекций на ось координат, согласно одной из форм равновесия произвольной плоской системы сил (10).
- решая полученную систему уравнений, определим усилия стержней.

Распределенные нагрузки.

Характеристикой распределенной нагрузки является интенсивность.
q – интенсивность – сила действующая на единицу длины. [q] = 1Н/м

При решении задач возникает необходимость замены распределенной нагрузки силой $\overline{Q}$, сосредоточенной в одной точке. В случае равномерно распределенной нагрузки (рис. 12) необходимо воспользоваться формулой

$$Q = q \cdot l \tag{12}$$

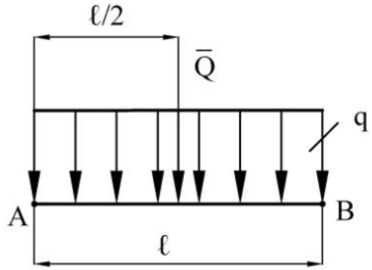


Рис. 13. Равномерно распределенная нагрузка

Если нагрузка распределена по линейному закону, т.е. интенсивность на рассматриваемом участке изменяется от максимального значения до нуля (рис. 13), то для ее замены сосредоточенной силой необходимо воспользоваться следующей формулой

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} \cdot l \tag{13}$$

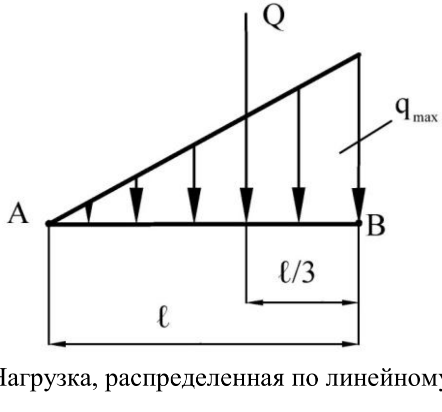


Рис. 14. Нагрузка, распределенная по линейному закону

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ НА ПЛОСКОСТИ

Задача С - 1

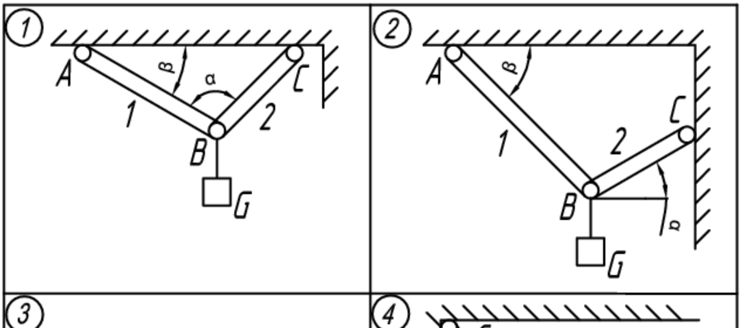
Равновесие системы сходящихся сил

Исходные данные

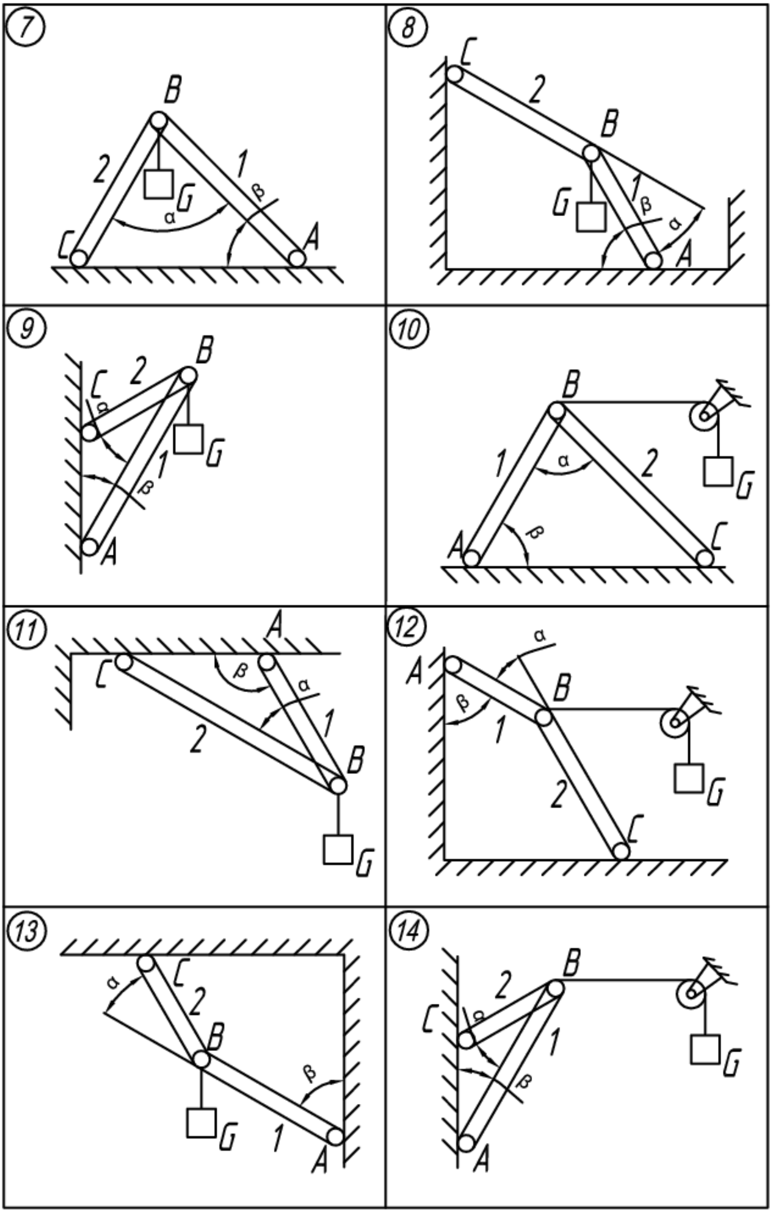
Для представленных на схемах механических систем найти усилия в опорных стержнях 1 и 2. Вес груза *G*, стержни, блоки и тросы невесомы. Схемы даны в табл. 1, заданные величины – в табл. 2.

Таблица 1

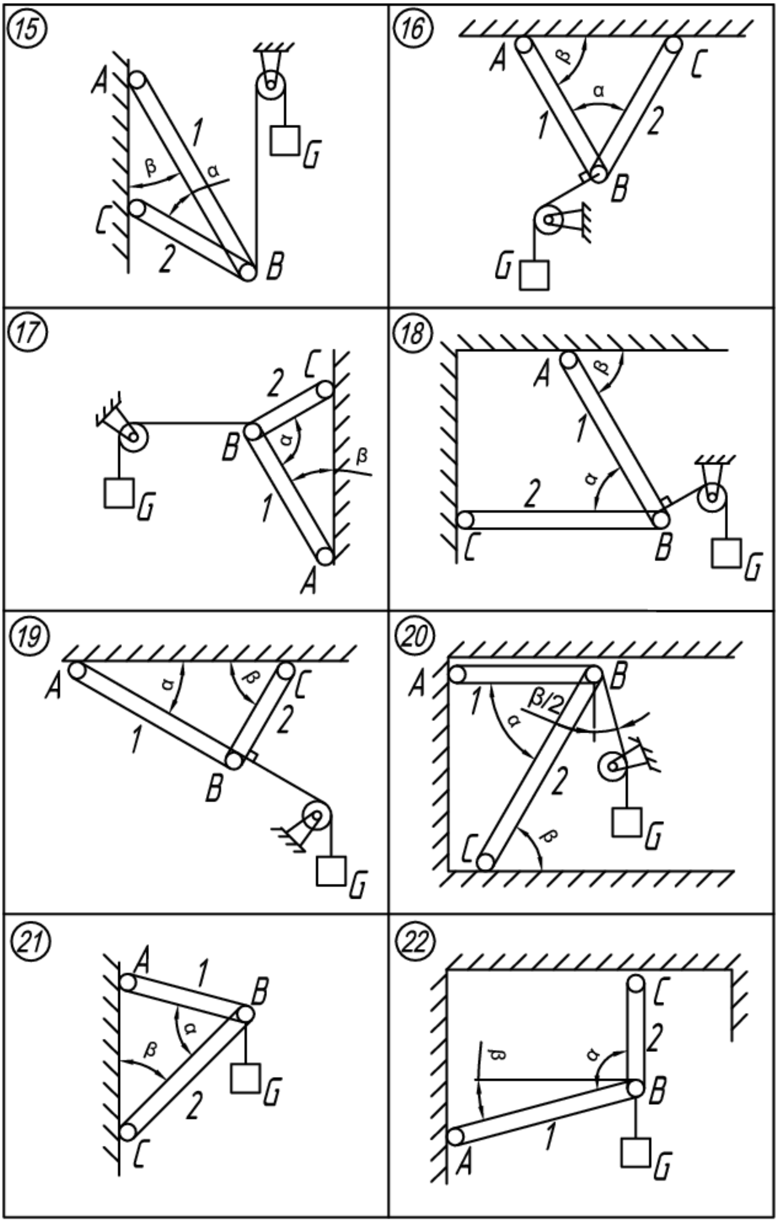
Варианты заданий



Продолжение табл. 1

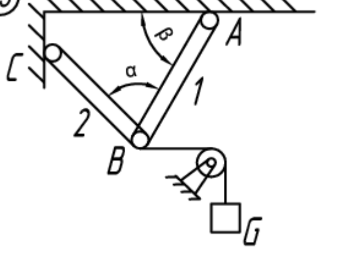


Продолжение табл. 1

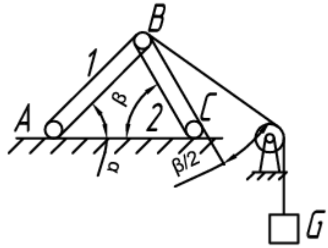


Окончание табл. 1

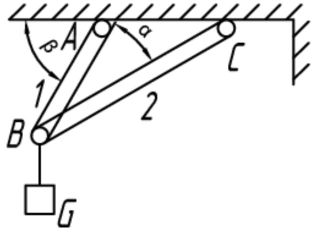
23



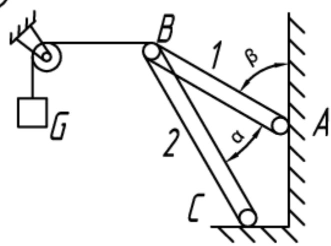
24



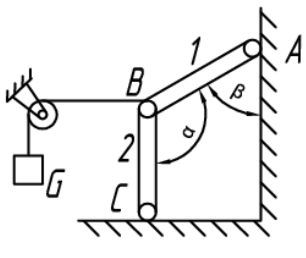
25



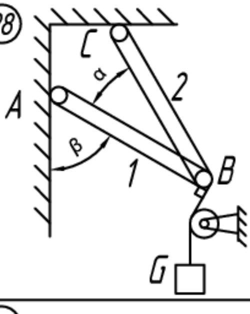
26



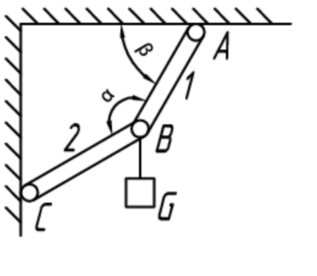
27



28



29



30

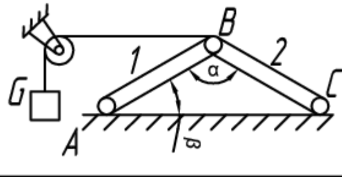


Таблица 2

Варианты заданий

№ вар	G, кН	α,град	β,град	№ вар	G, кН	α,град	β,град
1	10	105	30	16	10	60	60
2	12	30	45	17	12	90	30
3	8	30	45	18	14	60	60
4	16	30	60	19	16	30	60
5	10	30	45	20	18	60	30
6	18	30	30	21	10	60	45
7	22	75	45	22	22	105	15
8	16	30	60	23	8	75	60
9	20	30	30	24	20	45	60
10	14	75	60	25	12	30	60
11	8	30	120	26	14	30	60
12	16	30	60	27	18	120	60
13	12	30	60	28	20	30	60
14	10	30	30	29	22	150	60
15	20	30	30	30	14	120	30

Пример 1

Мачтовый кран состоит из стрелы AB, прикрепленной шарниром A к мачте, и цепи CB. К концу B стрелы подвешен груз $P = 2$ кН. Определить натяжение цепи и усилие в стреле.

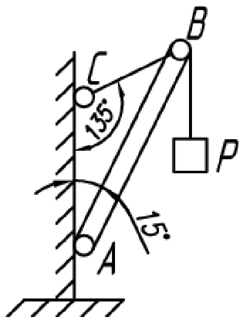


Рис. 15. Заданная конструкция

В этой задаче груз привязан к шарниру B, удерживаемой в заданном положении цепью BC и стрелой AB. Активной силой является вес груза $\bar{P}$. Реакции цепи и стрелы направлены вдоль цепи и вдоль ось стержня – стрелы, соответственно $\overline{T}$ и $\bar{S}$.

Имеем систему трёх сходящихся сил, находящуюся в равновесии. Систему координат свяжем с точкой В – центром сходящейся системы. Составим уравнения равновесия сходящейся системы сил.

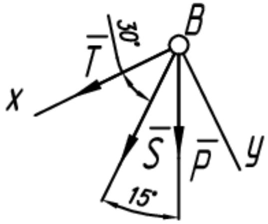


Рис. 16. Расчетная схема сходящейся системы сил

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \end{cases}$$

$x: T + S\cos 30° + P\cos 45° = 0$

$y: S\cos 60° + P\cos 45° = 0$

Решая систему двух уравнений, находим реакции связей:

$$S = -\frac{P\cos 45°}{\cos 60°} = -2{,}82 \text{ кН}$$

Знак «−» показывает, что стрела *AB* испытывает сжатие.

$T = -S\cos 30° - P\cos 45° = 2{,}82 \cdot 0{,}866 - 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}03$ кН

Ответ: *S* = -2,82 кН; *T* = 1,03 кН.

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Задача С - 2

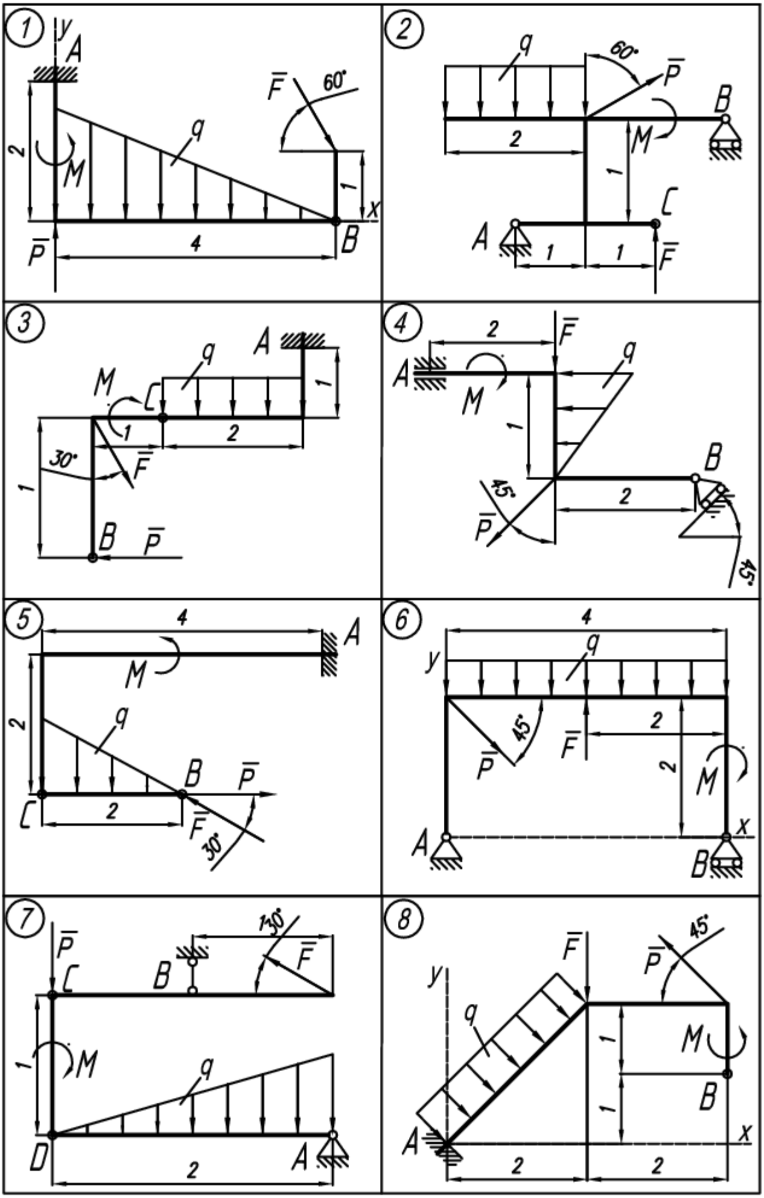
Определение реакций опор твердого тела

Исходные данные

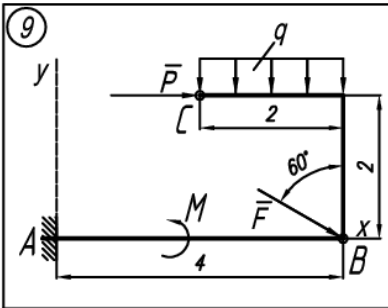
Для представленных на схемах конструкций определить реакции в опорах. На схемах (табл. 3) показаны для каждого варианта три способа закрепления бруса (табл. 5), находящегося в равновесии, ось которого – ломаная линия. Задаваемая нагрузка (табл. 4) и размеры (м) во всех трех случаях одинаковы. Положительное направление оси x – горизонтально вправо, оси y - вертикально вверх.

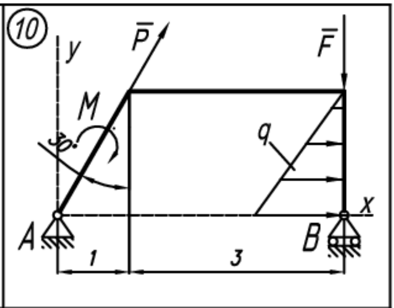
Таблица 3

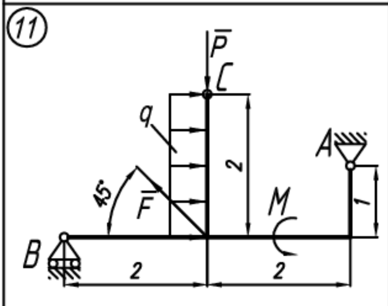
Варианты заданий

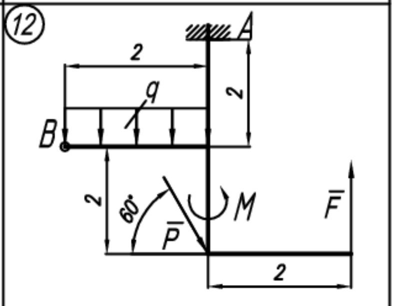


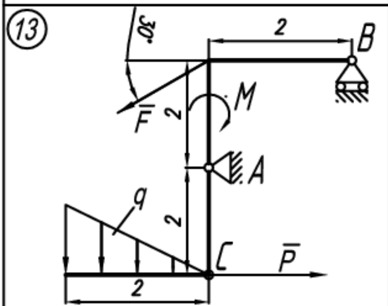
Продолжение табл. 3

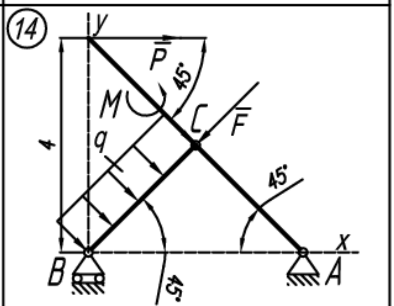


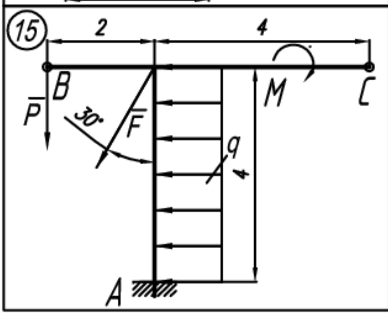


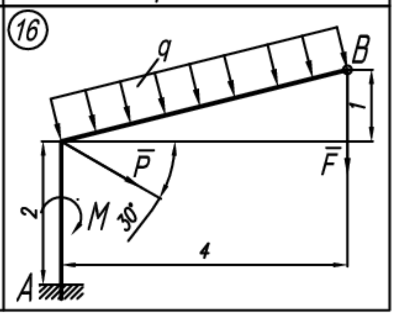




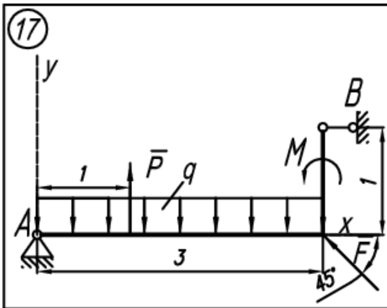


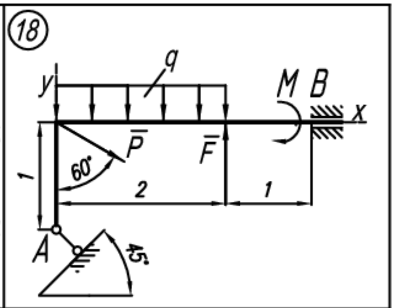


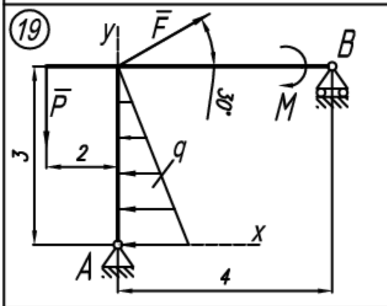


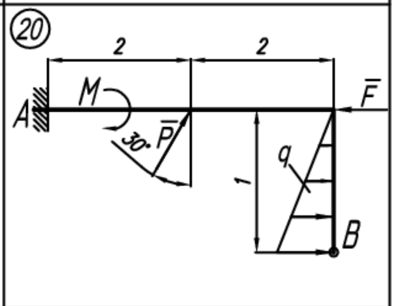


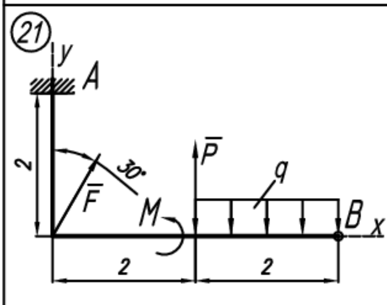
Продолжение табл. 3

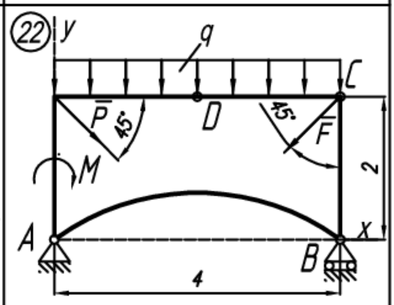


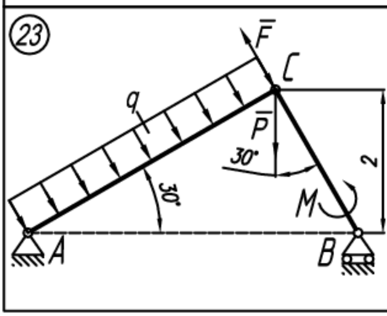


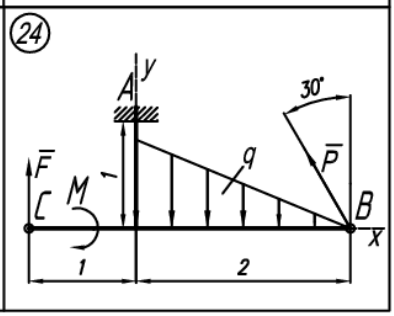












Окончание табл. 3

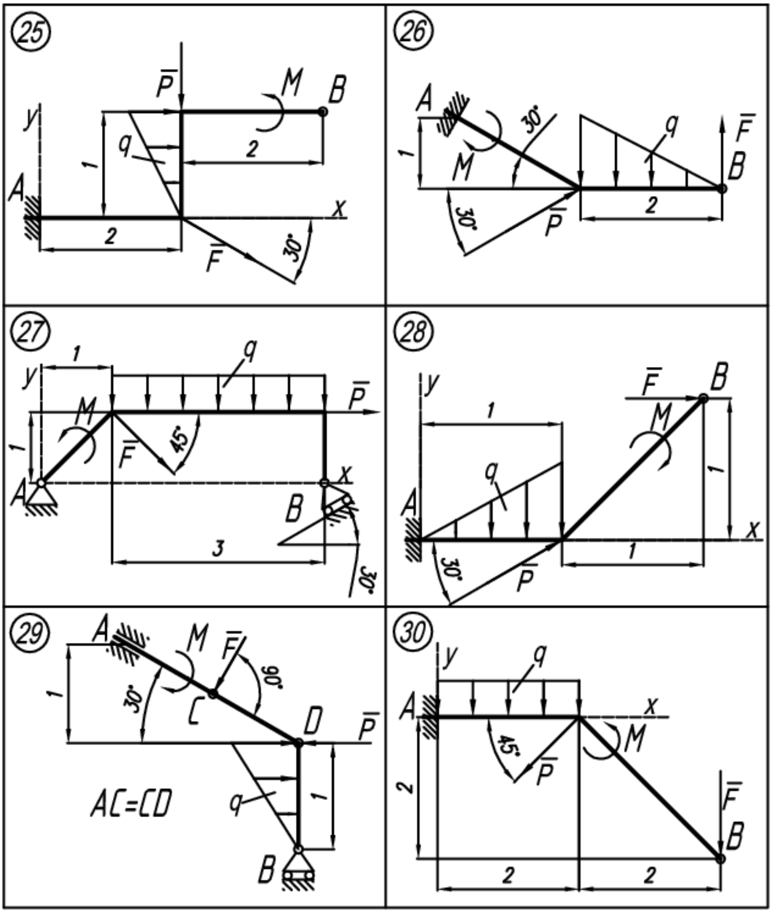


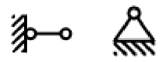
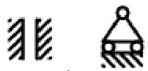
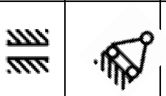
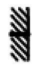
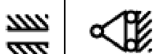
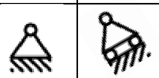
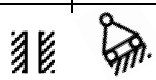
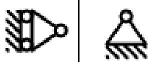
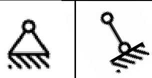
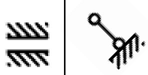
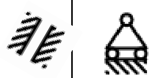
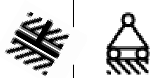
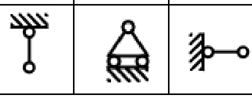
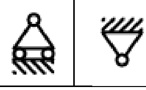
Таблица 4

Варианты заданий

№ вар	M, кН·м	P, кН	F, кН	q, кН/м	q_{max}, кН/м
1	10	10	4,4	-	2
2	3	4	6	1	-
3	4	10	12	2	-
4	6	6	3,6	-	1
5	10	20	4	-	2
6	5	10	8	2	-
7	4	15	7,2	-	3
8	12	20	10	2	-
9	5	10	12	2	-
10	10	4	16	-	1
11	10	20	10,4	2	-
12	8	25	8,6	1	-
13	10	20	12,2	-	2
14	6	10	18	1	-
15	5	20	16,4	2	-
16	2	6	12,6	1	-
17	4	10	10,8	3	-
18	2	5	20	1	-
19	8	15	7,6	-	1
20	5	20	18,4	-	4
21	6	10	14,4	2	-
22	8	10	16	2	-
23	6	16	8,8	3	-
24	4	14	16,2	-	2
25	4	20	18,6	-	1
26	6	12	20	-	4
27	4	2	10,8	2	-
28	6	10	14,6	-	4
29	10	20	7,6	-	4
30	4	2	3,2	2	-

Таблица 5

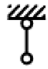
Варианты заданий

№ вар	α, град*	Опоры в точках для						
		Схемы *б*			Схемы *в*			
		$(\cdot)$ *A*	$(\cdot)$ *B*	$(\cdot)$ *C*	$(\cdot)$ *A*	$(\cdot)$ *B*	$(\cdot)$ *C*	$(\cdot)$ *D*
1	45			-			-	-
2	-						-	-
3	-			-		-		-
4	45			-		-	-	-
5	45			-		-		-
6	30			-			-	-
7	-		-			-	-	
8	30			-			-	-
9	45			-		-		-
10	-			-			-	-
11	-				-			-

Продолжение табл. 5

№ вар	α, град*	Опоры в точках для						
		Схемы *б*			Схемы *в*			
		(·) *A*	(·) *B*	(·) *C*	(·) *A*	(·) *B*	(·) *C*	(·) *D*
12	-			-			-	-
13	45			-		-		-
14	-			-		-		-
15	-			-		-		-
16	-			-			-	-
17	45			-			-	-
18	105			-	-		-	-
19	-			-			-	-
20	-			-			-	-
21	30			-			-	-
22	-					-		
23	-						-	-

Окончание табл. 5

№ вар	α, град*	Опоры в точках для						
		Схемы *б*			Схемы *в*			
		(·) *A*	(·) *B*	(·) *C*	(·) *A*	(·) *B*	(·) *C*	(·) *D*
24	-			-			-	-
25	45			-			-	-
26	-			-			-	-
27	30		-	-			-	-
28	45			-			-	-
29	-			-			-	-
30	-			-			-	-

**Примечание:* угол α, заданный в табл. 5 – это угол, составляющий невесомым стержнем с вертикальной осью или угол между плоскостью, на которой расположена шарнирно-подвижная опора, и горизонтальной осью.

Пример 2

Для представленных на схемах *а, б, в* конструкций в виде ломаного бруса, находящегося в равновесии, определить реакции в опорах. Задаваемая нагрузка P = 15 кН, M = 4 кН·м, q = 3 кН/м и размеры (м) во всех трех случаях одинаковы.

а)

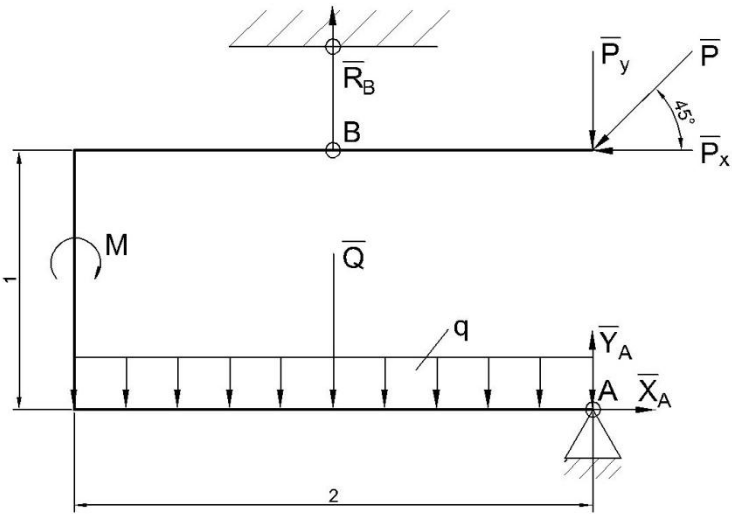


Рис. 17. Схема *а)* - равновесие бруса под действием активных сил и сил реакций

Дано:
P= 15 кН
M = 4кН·м
q = 3 кН/м

Найти:
R_B - ?
$У_A$ - ?
X_A - ?

Решение:

$Q = 3{\cdot}2{=}6$ *кН*

$\bar{P} = \bar{P}_X + \bar{P}_Y$

$P_X = P \cdot cos45°$

$P_Y = P \cdot sin45°$

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}$$

x: $-P \cdot cos45° + X_A = 0$

y: $Y_A - P \cdot sin45° + R_B - Q = 0$

(·)A: $-M + Q \cdot 1 + P \cdot cos45° \cdot 1 - R_B \cdot 1 = 0$

$X_A = P \cdot cos45°$; $X_A = 10{,}61$ кН

$R_B = P \cdot cos45° - M + Q$; $R_B = 12{,}61$ кН

$Y_A = Q + P \cdot sin45° - R_B$; $Y_A = 4$ кН

Проверка: $\sum m_B(\bar{F}_k) = 0$

$(\cdot)B$: $-M - P \cdot sin45° \cdot 1 + Y_A \cdot 1 + X_A \cdot 1 = -4 - 15 \cdot sin45° \cdot 1 + 4 *$
$* 1 + 10{,}61 \cdot 1 = 0$

Ответ: $X_A = 10{,}61$ кН ; $Y_A = 4$ кН ; $R_B = 12{,}61$ кН

б)

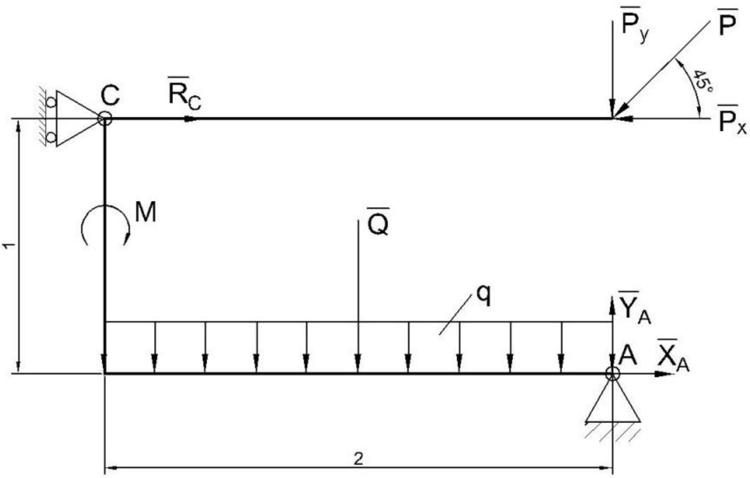


Рис. 18. Схема *б)* - равновесие бруса под действием активных сил и сил реакций

Дано:	**Решение:**
P = 15 кН M = 4 кН·м q = 3 кН/м	Q = 3·2=6 кН $\overline{P} = \overline{P}_x + \overline{P}_y$ $P_x = P \cdot cos45°$ $P_y = P \cdot sin45°$
Найти: R_C - ? $У_A$ - ? X_A - ?	$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum m_A(\overline{F}_k) = 0 \end{cases}$ *x:* $-P \cdot cos45° + X_A + R_C = 0$

y: $Y_A - P \cdot sin45° - Q = 0$

(·)A: $-M + Q \cdot 1 + P \cdot cos45° \cdot 1 - R_C \cdot 1 = 0$
$Y_A = P \cdot Sin45° + Q$; $Y_A = 16{,}61$ кН
$R_C = P \cdot cos45° - M + Q$; $R_C = 12{,}61$ кН
$X_A = P \cdot cos45° - R_C$; $X_A = -2$ кН, *знак «-» означает, что искомая реакция направлена в противоположную сторону.*

Проверка: $\sum m_C(\bar{F}_k) = 0$

(·)C: $-M - P \cdot sin45° \cdot 2 + Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 2 - Q \cdot 1 = -4 - 15 \cdot sin45° *$
$* 2 + 16{,}61 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0$

Ответ: $X_A = -2$ кН ; $Y_A = 16{,}61$ кН ; $R_C = 12{,}61$ кН

в)

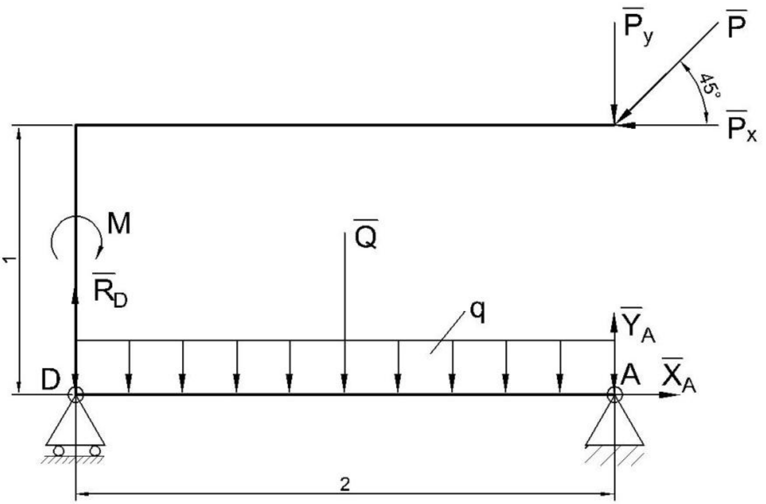


Рис. 19. Схема *в)* - равновесие бруса под действием активных сил и сил реакций

Дано:	Q = 3·2=6 кН
P = 15 кН	$\bar{P} = \bar{P}_x + \bar{P}_y$
M = 4 кН·м	$P_x = P \cdot cos45°$
q = 3 кН/м	$P_y = P \cdot sin45°$

Найти:	**Решение:**
R_D - ? $У_A$ - ? X_A - ?	$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}$

x: $-P \cdot cos45° + X_A = 0$
y: $Y_A - P \cdot sin45° + R_D - Q = 0$
(·)A: $-M + Q \cdot 1 + P \cdot cos45° \cdot 1 - R_D \cdot 2 = 0$
$X_A = P \cdot cos45°$; $X_A = 10{,}61$ кН
$R_D = \dfrac{P \cdot cos45° - M + Q}{2}$; $R_D = 6{,}3$ кН
$Y_A = Q + P \cdot sin45° - R_D$; $Y_A = 10{,}3$ кН

Проверка: $\sum m_D(\bar{F}_k) = 0$

(·)D: $-M - Q \cdot 1 - P \cdot sin45° \cdot 2 + Y_A \cdot 2 + P \cdot cos45° \cdot 1 = -4 - 6 *$
$* 1 - 15 \cdot sin45° \cdot 2 + 10{,}61 \cdot 2 + 15 \cdot cos45° \cdot 1 = 0$

Ответ: $X_A = 10{,}61$ кН ; $Y_A = 10{,}3$ кН ; $R_D = 6{,}3$ кН

РАВНОВЕСИЕ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Задача С - 3

Определение реакций связей и усилий в стержнях плоской фермы

Исходные данные

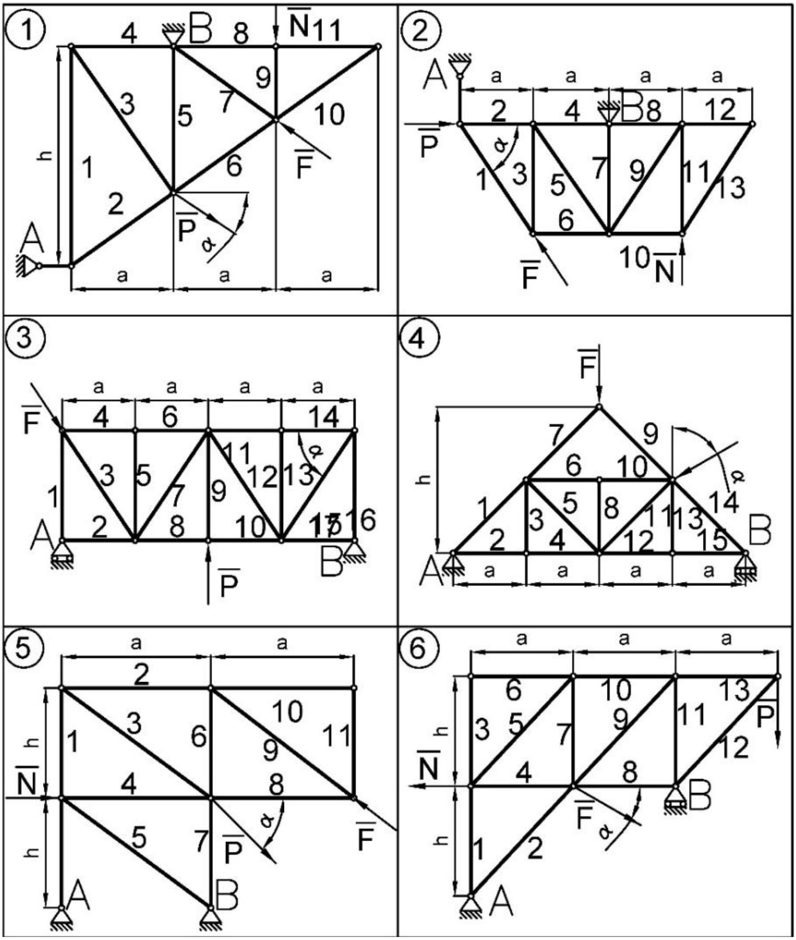
Определить реакции опор фермы при заданной нагрузке, а также усилия во всех ее стержнях методом вырезания узлов. Схемы стержневых конструкций показаны в табл. 6, необходимые для расчета данные приведены в табл. 7.

Дополнительно определить усилия в трех стержнях фермы при той же нагрузке методом сечений Риттера (номера стержней указаны в табл. 6).

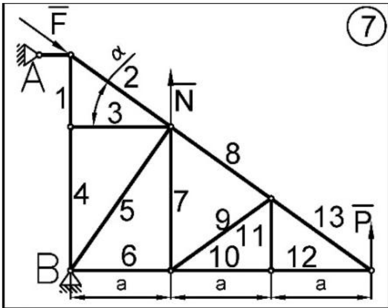
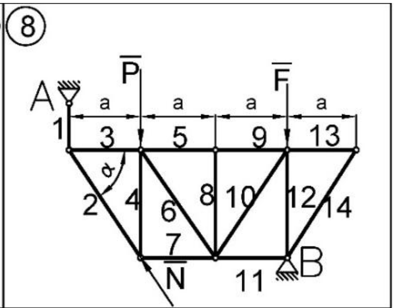
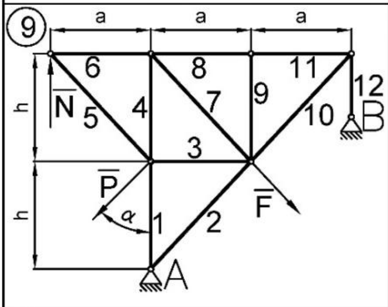
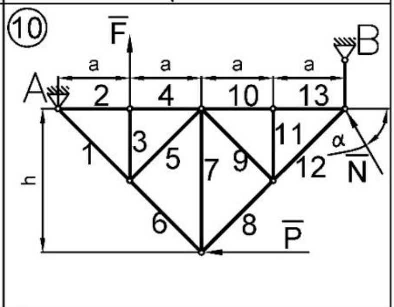
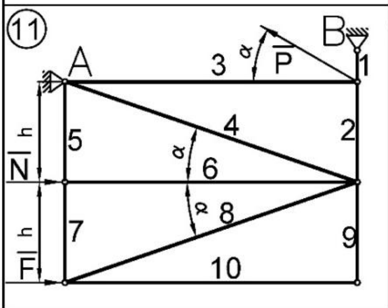
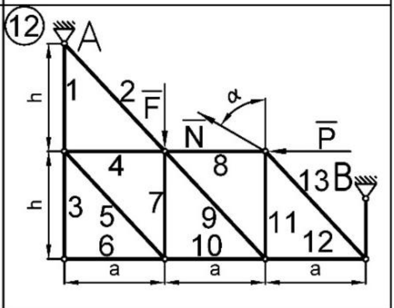
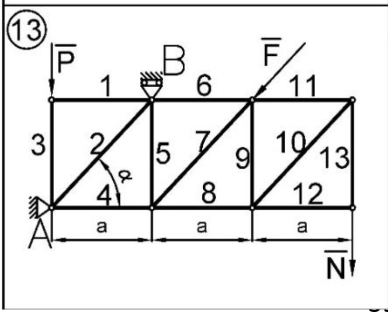
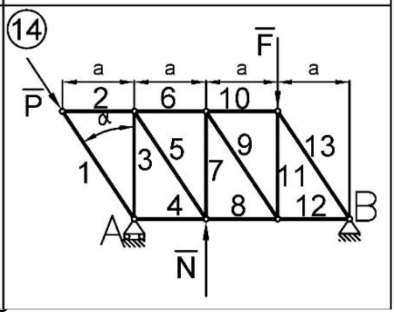
По умолчанию, положительное направление оси x – горизонтально вправо, оси y – вертикально вверх.

Таблица 6

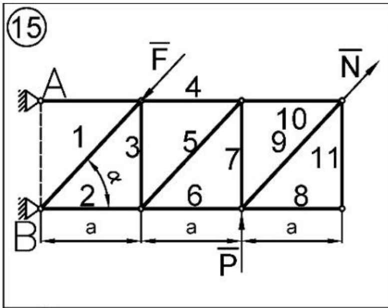
Варианты заданий

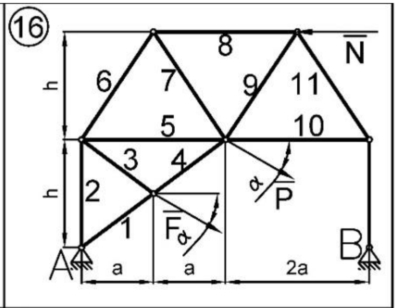


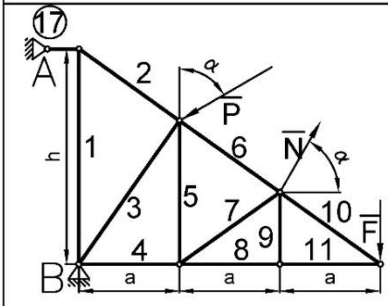
Продолжение табл. 6

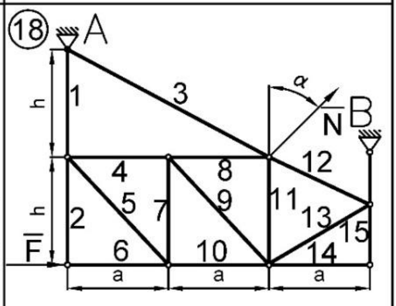
	
	
	
	

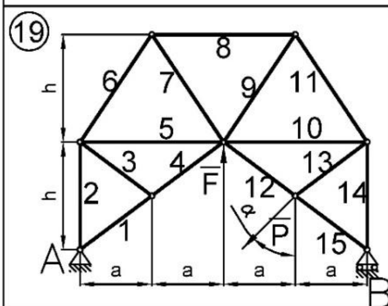
Продолжение табл. 6

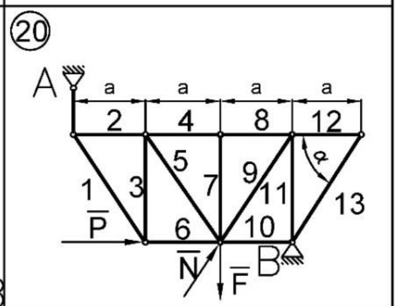


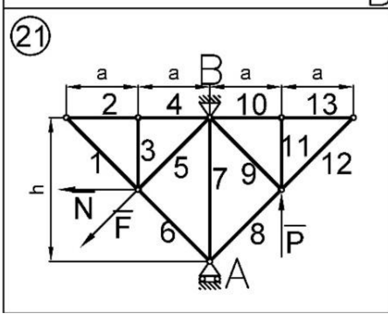


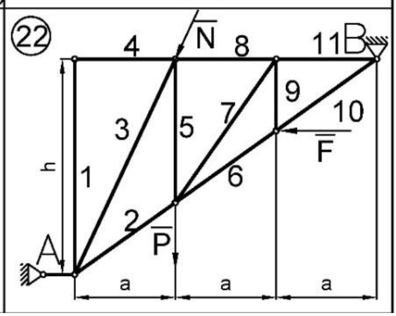




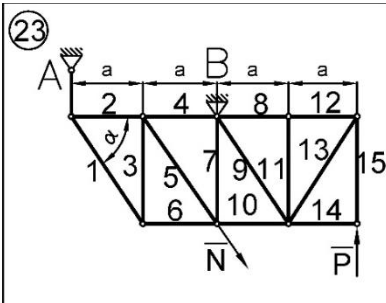


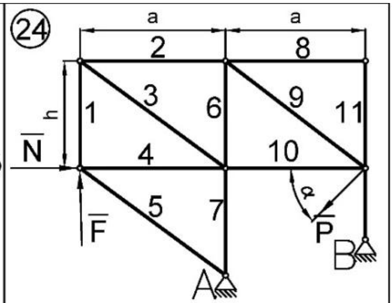


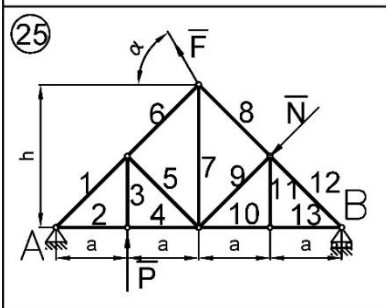


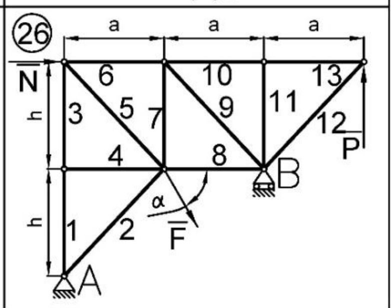


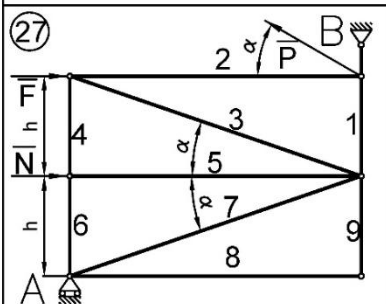
Окончание табл. 6

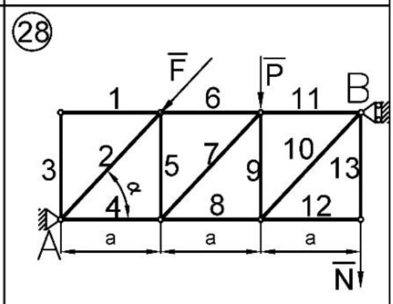


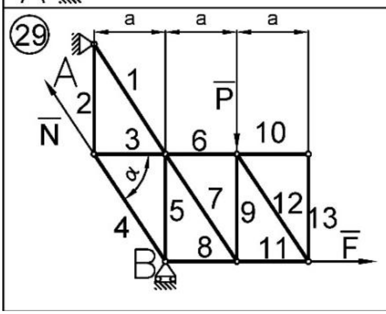












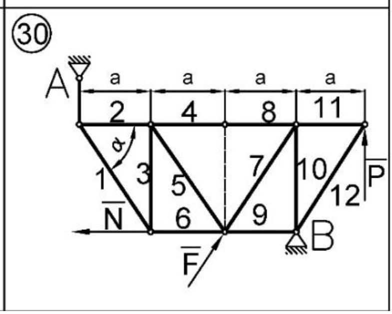


Таблица 7

Варианты заданий

№ вар	P	N	F	a	h	α,град	Номера стержней
	кН			м			
1	10	5	3	3	8	30	7, 8, 9
2	4	6	2	4	-	60	11, 12, 13
3	5	-	8	3,6	-	60	6, 9, 10
4	4	-	8	2,2	4,6	60	1, 3, 4
5	3	5	5	5	4	45	3, 6, 5
6	9	4	4	4,2	4,5	30	8, 9, 10
7	4	9	2	3,4	-	30	6, 7, 8
8	7	2	15	2,8	-	45	5, 6, 7
9	3	7	5	5	5,2	45	8, 9, 10
10	4	8	3	2	4	60	4, 5, 6
11	5	4	6	3,8	4	30	3, 4, 5
12	15	3	3	4,3	4,3	60	8, 11, 12
13	9	2	7	4	5	30	6, 7, 8
14	10	10	5	3,9	-	30	8, 9, 10
15	5	4	3	3,1	-	45	5, 6, 7
16	6	8	2	3,7	4,3	30	4, 5, 6
17	10	3	4	2,9	6	60	7, 8, 9
18	-	5	7	4,5	4,5	45	1, 2, 3
19	4	-	9	2	3	45	10, 11, 12
20	11	3	4	4,7	-	60	2, 3, 6
21	9	5	12	2,5	5	-	6, 7, 8
22	2	12	6	2	5	-	2, 3, 4
23	5	5	-	3	-	60	13, 14, 15
24	3	3	5	4	4,2	45	9, 10, 11
25	5	10	4	5,2	9	60	1, 3, 4
26	9	3	2	3,8	3,8	60	8, 9, 10
27	6	8	4	-	4	30	2, 4, 5
28	8	5	7	4,1	-	45	6, 7, 8
29	4	6	9	3,2	-	60	5, 6, 7
30	2	7	3	3,4	-	60	6, 7, 8

Пример 3

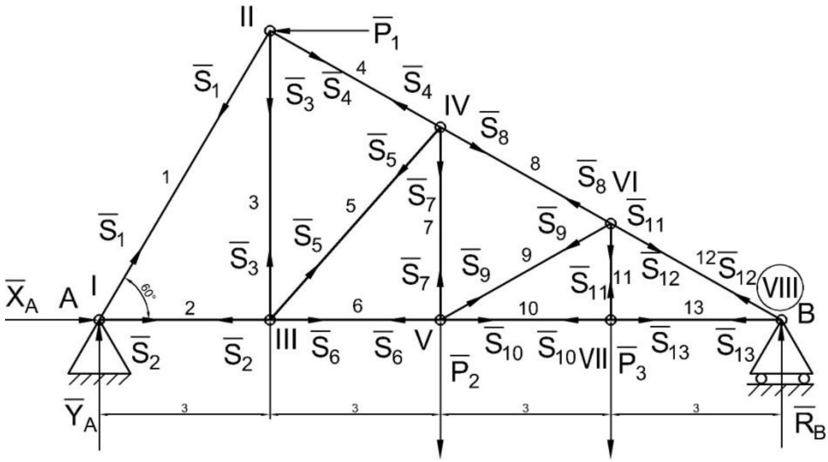


Рис. 20. Определение внешних (реакций в опорах) и внутренних (усилий в стержнях) реакций фермы.

Дано:
P_1=3 кН
P_2 = 5 кН
P_3 = 5 кН
a = 3 м
$\alpha = 60°$

Найти:
$S_1 - S_{13}$-?
Дополнительно:
$S_5, S_7, S_8 - ?$

Решение:

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}$$

x: $-P_1 + X_A = 0$

y: $Y_A - P_2 - P_3 + R_B = 0$

$(\cdot)$A: $\mathrm{P}_1 \cdot \tan 60° \cdot 3 - P_2 \cdot 6 - P_3 \cdot 9 + R_B \cdot 12 = 0$

$X_A = P_1$; $X_A = 3$ кН

$$R_B = \frac{P_2 \cdot 6 + P_3 \cdot 9 - P_1 \cdot \tan 60° \cdot 3}{12};$$

$R_B = 4{,}95$ кН

$Y_A = P_2 + P_3 - R_B$; $Y_A = 5{,}05$ кН

Проверка: $\sum m_B(\bar{F}_k) = 0$

$(\cdot)$B: $P_1 \cdot \tan 60° \cdot 3 - Y_A \cdot 12 + P_2 \cdot 6 + P_3 \cdot 3 = 3 \cdot \tan 60° \cdot 3 - 5{,}05 *$
$* 12 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 0$

Метод вырезания узлов

I узел

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \end{cases}$$

x: $X_A + S_2 + S_1 \cdot \cos 60° = 0$
y: $Y_A + S_1 \cdot \sin 60° = 0$

$S_1 = -\dfrac{Y_A}{\sin 60°}$; $\quad S_1 = -5{,}83$ кН
$S_2 = -S_1 \cdot \cos 60° - X_A$; $\quad S_2 = -0{,}08$ кН

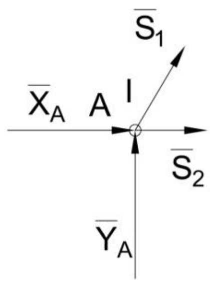


Рис. 21. I узел

II узел

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \end{cases}$$

x: $S_4 \cdot \sin 60° - S_1 \cdot \sin 30° - P_1 = 0$
y: $-S_1 \cdot \cos 30° - S_3 - S_4 \cdot \cos 60° = 0$

$S_4 = \dfrac{S_1 \cdot \sin 30° + P_1}{\sin 60°}$; $\quad S_4 = 0{,}098$ кН
$S_3 = -S_1 \cdot \cos 30° - S_4 \cdot \cos 60°$; $S_3 = 5$ кН

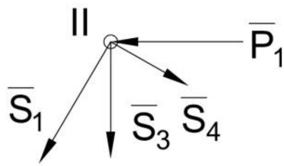


Рис. 22. II узел

III узел

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \end{cases}$$

$\tan^{-1}\gamma = \tan^{-1} 2 \cdot \tan 30° = 49°$
x: $S_6 - S_2 + S_5 \cdot \cos 49° = 0$
y: $S_3 + S_5 \cdot \sin 49° = 0$

$S_5 = -\dfrac{S_3}{\sin 49°}$; $\quad S_5 = -6{,}63$ кН
$S_6 = S_2 - S_5 \cdot \cos 49°$; $\quad S_6 = 4{,}26$ кН

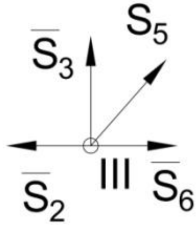
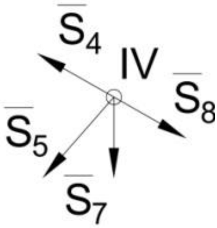


Рис. 23. III узел

IV узел

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \end{cases}$$



x: $S_8 \cdot \sin 60° - S_5 \cdot \sin 41° - S_4 \cdot \sin 60° = 0$

y: $-S_8 \cdot \cos 60° - S_7 + S_4 \cdot \cos 60° - S_5 \cdot \cos 41° = 0$

$S_8 = \frac{S_5 \cdot \sin 41° + S_4 \cdot \sin 60°}{\sin 60°}$; $S_8 = -4{,}92$ кН

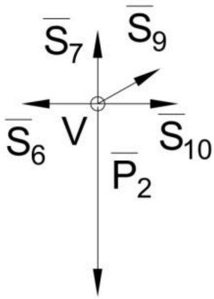
$S_7 = -S_8 \cdot \cos 60° + S_4 \cdot \cos 60° - S_5 \cdot \cos 41°$;

$S_7 = 7{,}51$ кН

Рис. 24. IV узел

V узел

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \end{cases}$$



x: $S_9 \cdot \cos 30° - S_6 + S_{10} = 0$

y: $S_7 - P_2 + S_9 \cdot \sin 30° = 0$

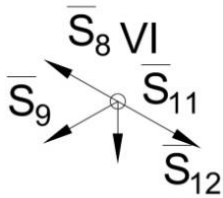
$S_9 = \frac{-S_7 + P_2}{\sin 30°}$; $S_9 = -5{,}02$ кН

$S_{10} = S_6 - S_9 \cdot \cos 30°$; $S_{10} = 8{,}61$ кН

Рис. 25. V узел

VI узел

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \end{cases}$$



x: $S_{12} \cdot \sin 60° - S_8 \cdot \sin 60° - S_9 \cdot \sin 60° = 0$

y: $S_8 \cdot \cos 60° - S_{11} - S_9 \cdot \cos 60° - S_{12} \cdot \cos 60° = 0$

$S_{12} = \frac{S_8 \cdot \sin 60° + S_9 \cdot \sin 60°}{\sin 60°}$; $S_{12} = -10$ кН

$S_{11} = S_8 \cdot \cos 60° - S_9 \cdot \cos 60° - S_{12} \cdot \cos 60°$;

$S_{11} = 5{,}02$ кН

Рис. 26. VI узел

VII узел

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \end{cases}$$

x: $S_{13} - S_{10} = 0$
y: $S_{11} - P_3 = 0$
$S_{13} = S_{10}$; $\quad S_{13} = 8{,}61$ кН
$S_{11} = P_3 \qquad S_{11} = 5$ кН

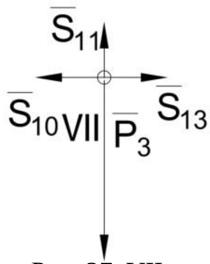


Рис. 27. VII узел

VIII узел (проверочный)

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \end{cases}$$

x: $S_{12} \cdot \cos 30° + S_{13} = 0$
y: $-S_{12} \cdot \sin 30° - R_B = 0$
$-10 \cdot \cos 30° - 8{,}61 = 0 \qquad 0 = 0$
$10 \cdot \sin 30° - 4{,}95 = 0 \qquad 0 = 0$

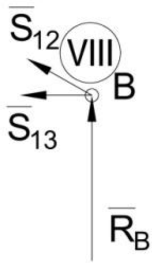


Рис. 28. VIII узел

Метод сечений Риттера

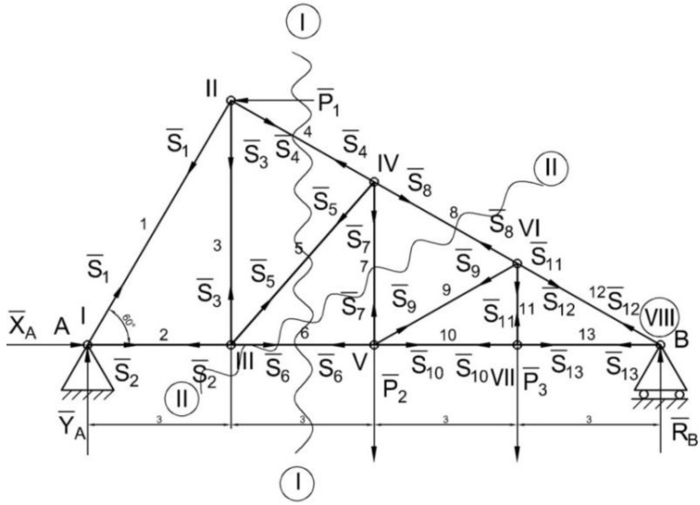


Рис. 29. Схема сечений

I сечение

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum m_D(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_E(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}$$

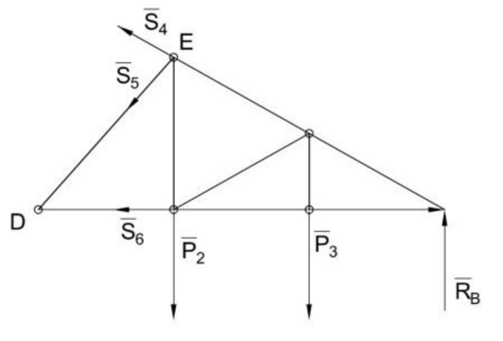


Рис. 30. Сечение I - I

x: $\quad -S_6 - S_5 \cdot \sin 41° - S_4 \cdot \sin 60° = 0$

$(\cdot)$D: $S_4 \cdot \sin 60° \cdot \tan 30° \cdot 9 - P_2 \cdot 3 - P_3 \cdot 6 + R_B \cdot 9 = 0$

$(\cdot)$E: $-S_6 \cdot \tan 30° \cdot 6 - P_3 \cdot 4{,}5 + R_B \cdot 7{,}5$

$S_6 = \dfrac{R_B \cdot 7{,}5 - P_3 \cdot 4{,}5}{\tan 30° \cdot 6}$; $\qquad S_6 = 4{,}22$ кН

$S_4 = \dfrac{P_2 \cdot 3 + P_3 \cdot 6 - R_B \cdot 9}{\sin 60° \cdot \tan 30° \cdot 9}$; $\qquad S_4 = 0{,}1$ кН

$S_5 = \dfrac{-S_6 - S_4 \cdot \sin 60°}{\sin 41°}$; $\qquad S_5 = -6{,}57$ кН

II сечение

$$\begin{cases} \sum F_{k_Y} = 0 \\ \sum m_R(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_T(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}$$

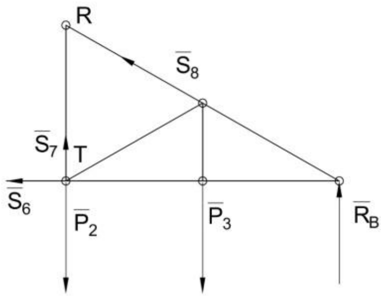


Рис. 31. Сечение II - II

y: $\quad S_7 + S_8 \cdot \sin 30° - P_2 - P_3 + R_B = 0$

$(\cdot)$R: $-S_6 \cdot \tan 30° \cdot 6 - P_3 \cdot 3 + R_B \cdot 6 = 0$

$(\cdot)$T: $S_8 \cdot \sin 60° \cdot \tan 30° \cdot 6 - P_3 \cdot 3 + R_B \cdot 6 = 0$

$$S_8 = \frac{P_3 \cdot 3 - R_B \cdot 6}{\sin 60° \cdot \tan 30° \cdot 6};\ S_8 = -4{,}9\ \text{кН}$$

$$S_7 = -S_8 \cdot \sin 30° + P_2 + P_3 - R_B;\ S_7 = 7{,}5\ \text{кН}$$

Таблица 8

№ стержня / Метод расчета		1	2	3	4	5	6	7
Метод вырезания узлов	модуль, кН	5,83	0,08	5	0,1	6,63	4,26	7,51
	знак	-	-	+	+	-	+	+
	Р/С	С	С	Р	Р	С	Р	Р
Метод сечений Риттера	модуль, кН					6,57		7,5
	знак					-		+
	Р/С					С		Р

Продолжение табл. 8

Метод \ № стержня		8	9	10	11	12	13
Метод вырезания узлов	модуль, кН	4,92	5,02	8,61	5,02	10	8,61
	знак	-	-	+	+	-	+
	Р/С	С	С	Р	Р	С	Р
Метод сечений Риттера	модуль, кН	4,9					
	знак	-					
	Р/С	С					

Задача С - 4

Определение реакций внешних и внутренних связей составной конструкции (система двух тел)

Исходные данные

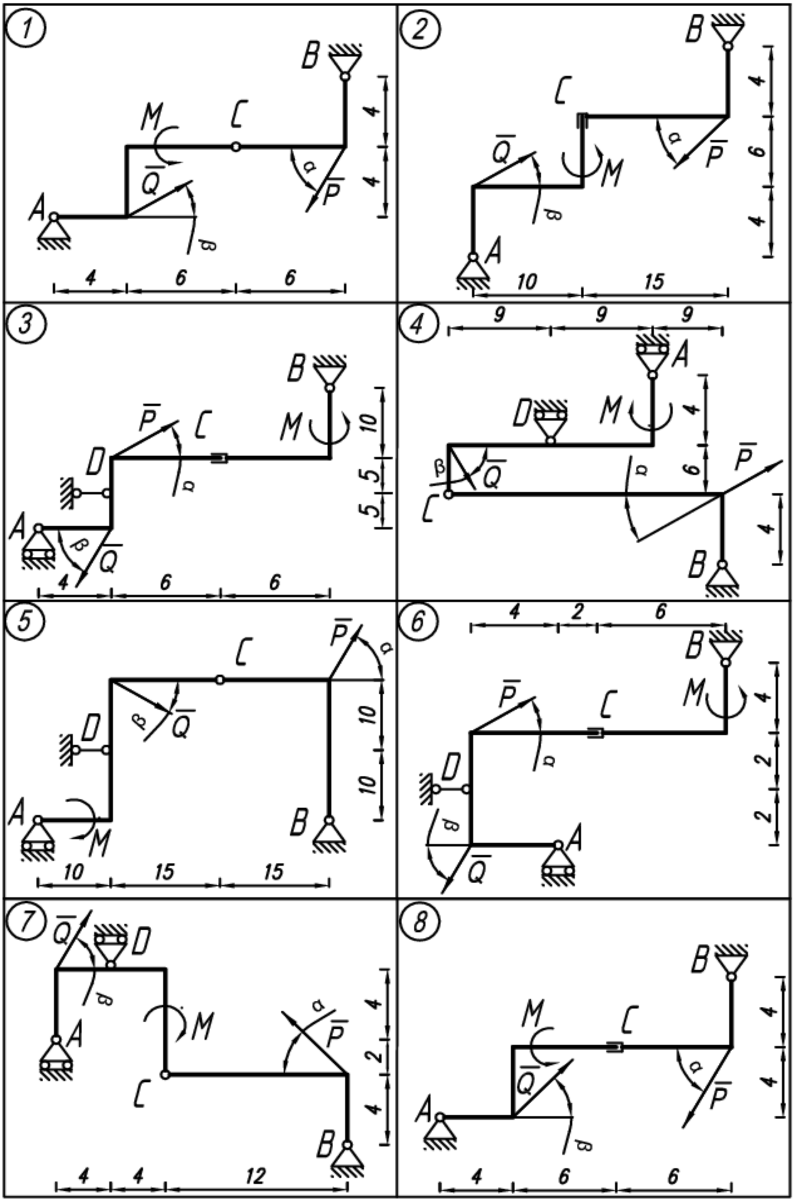
Рама, состоящая из двух частей, соединенных шарниром или скользящей заделкой, находится в равновесии. Найти реакции опор.

ρ – вес одного погонного метра горизонтальных частей рамы. Размеры конструкции заданы в метрах, нагрузки – в кН. Схемы составных конструкций представлены в табл. 9, задаваемые нагрузки – в табл. 10.

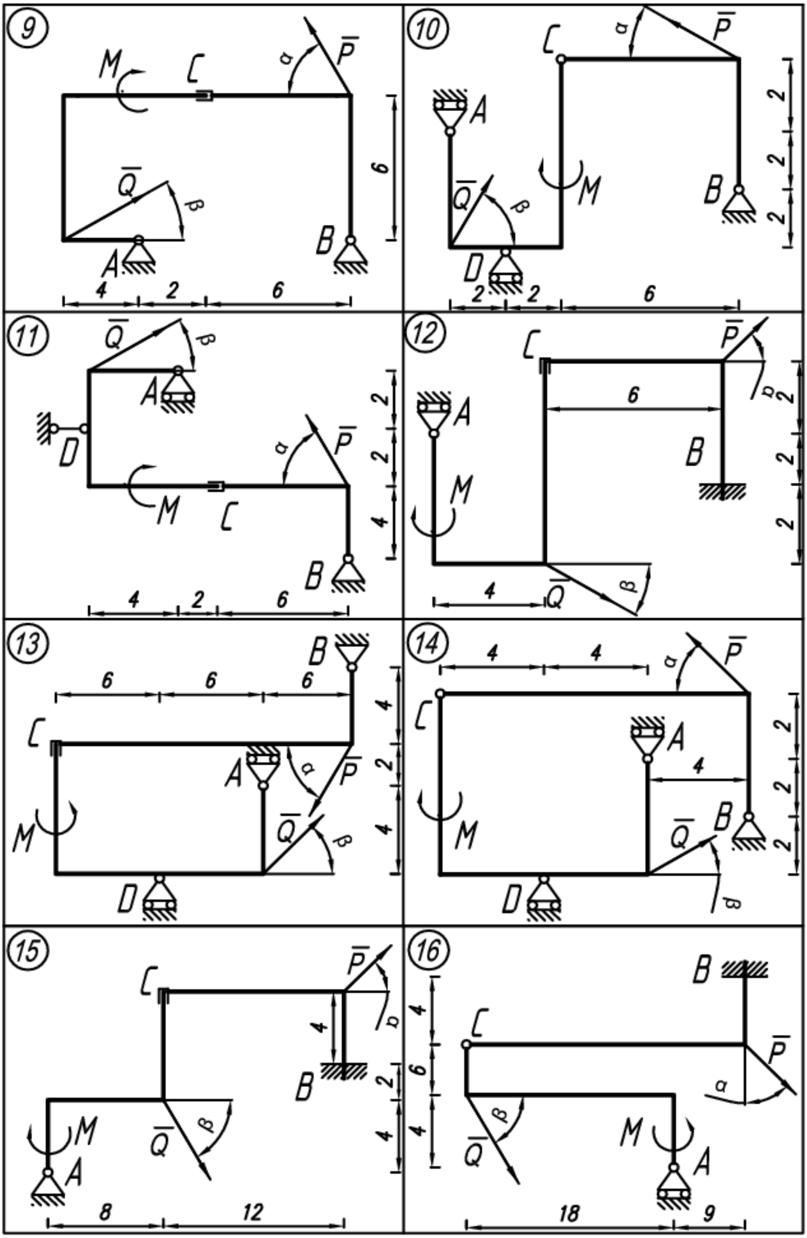
По умолчанию, положительное направление оси x – горизонтально вправо, оси y – вертикально вверх.

Таблица 9

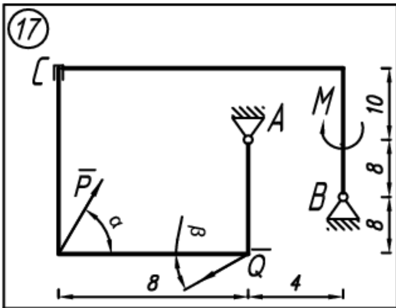
Варианты заданий

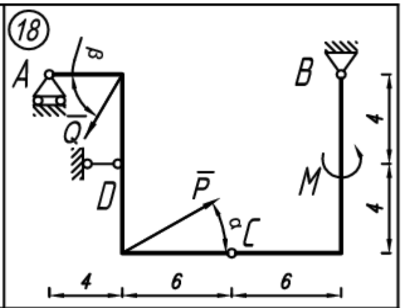


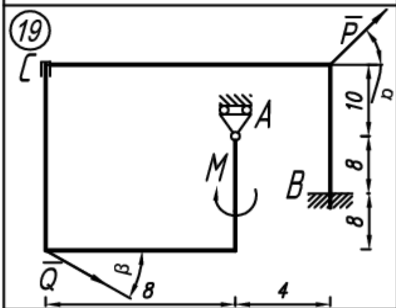
Продолжение табл. 9

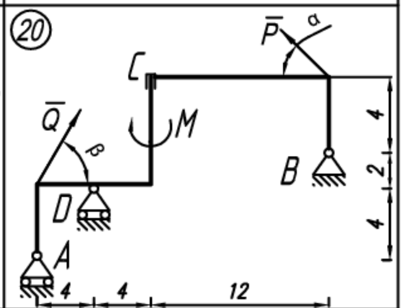


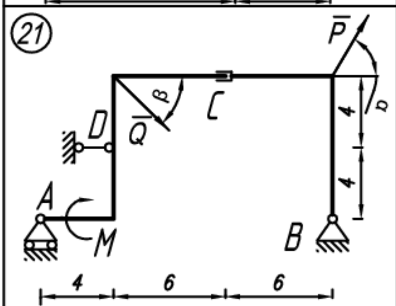
Продолжение табл. 9

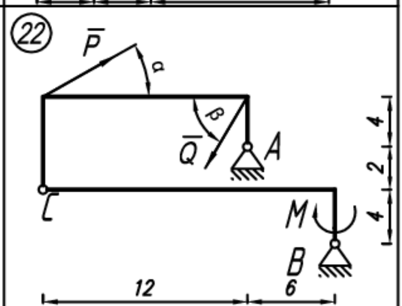


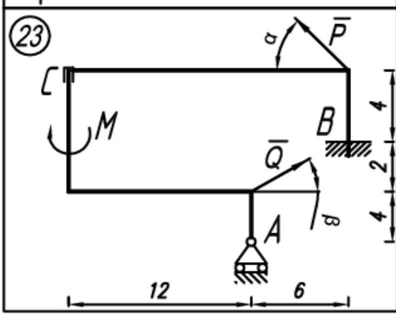


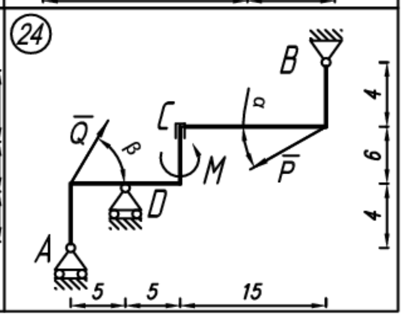




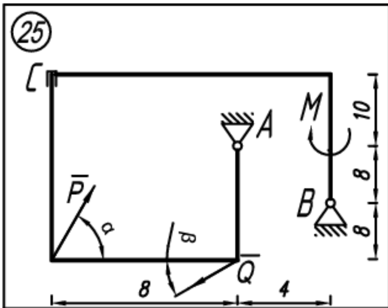


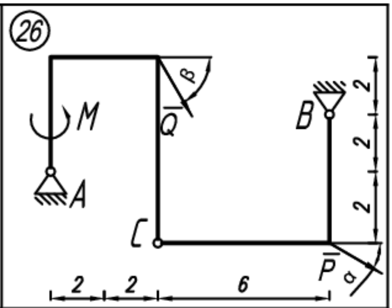


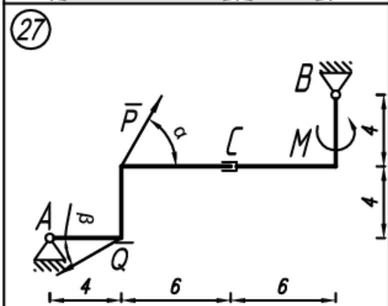


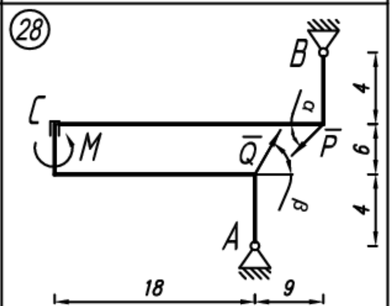


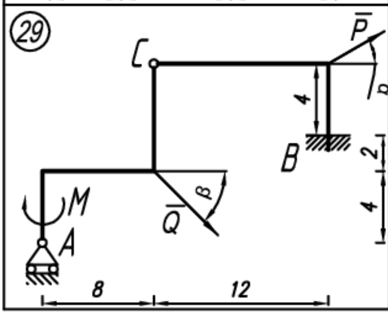
Окончание табл. 9











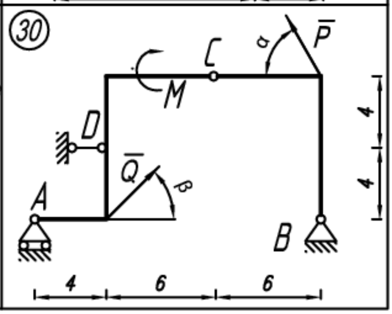


Таблица 10

Варианты заданий

№ вар	M, кН·м	P, кН	Q, кН	p, кН/м	α,град	β,град
1	70	20	30	1	60	30
2	60	50	60	2	45	30
3	50	10	20	4	30	60
4	100	10	20	3	30	60
5	60	20	30	3	60	30
6	60	10	20	4	30	60
7	140	60	70	3	45	60
8	70	40	50	2	60	45
9	80	20	30	2	60	30
10	50	10	20	3	30	60
11	100	20	30	4	60	30
12	40	50	60	6	45	30
13	30	40	50	4	60	45
14	30	50	60	3	45	30
15	50	60	70	6	45	60
16	30	60	70	5	45	60
17	10	20	30	2	60	30
18	70	10	20	3	03	60
19	20	50	60	6	45	30
20	60	60	70	4	45	60
21	60	40	50	4	60	45
22	100	10	20	1	30	60
23	40	50	60	6	45	30
24	60	10	20	4	30	60
25	120	30	40	5	30	45
26	130	10	20	1	30	60
27	50	20	30	2	60	30
28	40	60	70	2	45	60
29	50	30	40	5	30	45
30	70	40	50	3	60	45

Пример 4

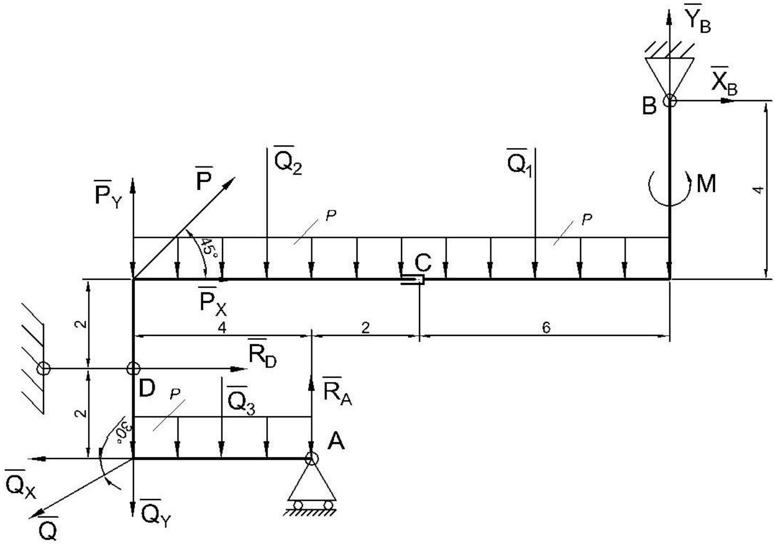


Рис. 32. Схема составной конструкции

Дано:

$P = 50$ кН

$Q = 60$ кН

$M = 60$ кН·м

$\rho = \ 4$ кН/м

$\alpha = 45°$

$\beta = 30°$

Найти:

R_A - ?

$У_B$ - ?

X_B - ?

R_D - ?

Решение:

$Q_1 = \rho \cdot l_1 \ = 4 \cdot 6 = 24$ кН

$Q_2 = \rho \cdot l_2 \ = 4 \cdot 6 = 24$ кН

$Q_3 = \rho \cdot l_3 \ = 4 \cdot 4 = 16$ кН

$\bar{P} = \ \bar{P}_X + \bar{P}_Y$

$P_X = P \cdot cos45°$

$P_Y = P \cdot sin45°$

$\bar{Q} = \ \bar{Q}_X + \bar{Q}_Y$

$Q_X = Q \cdot cos30°$

$Q_Y = Q \cdot sin30°$

Составим уравнения равновесия для всей конструкции:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}$$

x: $X_B + R_D + Pcos45° - Qcos30° = 0$

y: $Y_B + R_A - Q_1 - Q_2 - Q_3 - Qsin30° + Psin45° = 0$

(·)A: $\boldsymbol{M + Y_B \cdot 8 - X_B \cdot 8 - Q_1 \cdot 5 + Q_2 \cdot 1 + Q_3 \cdot 2 - R_D \cdot 2 - Pcos45° * * 4 - Psin45° \cdot 4 + Qsin30° \cdot 4 = 0}$

Составим уравнения равновесия для части А:

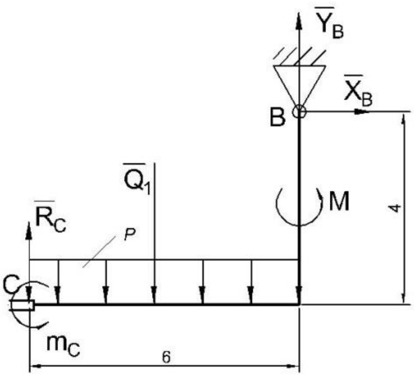


Рис. 33. Схема части А

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}$$

x: $X_B = 0$

y: $Y_B + R_C - Q_1 = 0$

(·)B: M+$m_C - R_C \cdot 6 + Q_1 \cdot 3 = 0$

$X_B = 0$ кН

$R_D = Qcos30° - Pcos45°$

$R_D = 16{,}6$ кН

$$Y_B = \frac{-M + X_B \cdot 8 + Q_1 \cdot 5 - Q_2 \cdot 1 - Q_3 \cdot 2 + R_D \cdot 2 + Pcos45^\circ \cdot 4}{8} +$$

$$+ \frac{Psin45^\circ \cdot 4 - Qsin30^\circ \cdot 4}{8}$$

$Y_B = 25$ кН

$R_A = -Y_B + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Qsin30^\circ - Psin45^\circ$

$R_A = 33{,}64$ кН

Проверка: $\sum m_B(\bar{F}_k) = 0$

(·)D: $M + Y_B \cdot 12 - X_B \cdot 6 - Q_1 \cdot 9 - Q_2 \cdot 3 - Q_3 \cdot 2 - P \cdot cos45^\circ \cdot 2 -$
$Qcos30^\circ \cdot 2 + R_A \cdot 4 = 60 + 25 \cdot 12 - 0 \cdot 6 - 24 \cdot 9 - 24 \cdot 3 - 16 \cdot 2 -$
$-50 \cdot cos45^\circ \cdot 2 - 60cos30^\circ \cdot 2 + 33{,}4 \cdot 4 = 0$

Ответ: $\boldsymbol{X_B = 0}$ **кН;** $\boldsymbol{Y_B = 25}$ **кН ;** $\boldsymbol{R_A = 33,64}$ **кН;** $\boldsymbol{R_D = 16,6}$ **кН**

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Основные понятия

Проекция силы на ось и на плоскость.

В задачах пространственной статики для нахождения проекций силы на какие-либо оси сначала нужно найти ее проекцию на плоскость, в которой лежат эти оси, а затем полученную проекцию спроецировать на эти оси. В отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, которая характеризуется не только модулем, но и направлением.

Например, для определения проекций силы $\bar{F}$ на оси *Ox* и *Oy* (рис. 34.) нужно сначала спроецировать эту силу на плоскость *Oxy*, в которой лежат оси. Для этого находим проекции начала вектора (точка *A*) и конца вектора (точка *B*) на плоскость *Oxy*. Направленный отрезок $\overline{ab}$, заключенный между проекциями начала (точка *a*) и конца (точка b), и будет вектором $\bar{F}_{xy}$.

$$\bar{F}_{xy} = \overline{ab}$$

$$F_{xy} = F \cdot \cos\alpha,$$

где α - угол между направлением силы $\bar{F}$ и плоскостью *Oxy*, в которой расположена полученная проекция $\bar{F}_{xy}$.

Найдем проекции вектора $\bar{F}_{xy}$ оси *Ox* и *Oy*:

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos\beta = F \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta,$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \sin\beta = F \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta. \qquad (14)$$

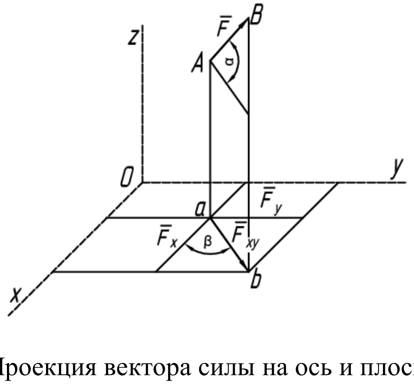


Рис. 34. Проекция вектора силы на ось и плоскость

Момент силы относительно центра (точки) как вектор

Момент силы F относительно центра O (рис. 35.), как характеристика ее вращательного эффекта, определяется тремя элементами: 1) модулем момента силы, равным произведению модуля силы F на плечо h $(F \cdot h)$, 2) плоскостью поворота OAB, проходящую через линию действия силы F и центр O, 3) направлением поворота в этой плоскости.

В задачах плоской статики все силы и центр O лежат в одной плоскости, поэтому плоскость поворота у всех сил одна и задавать ее для каждой силы нет необходимости При пространственной ориентации сил плоскости поворота у разных сил различны и должны задаваться дополнительно.

Положение плоскости поворота задают отрезком, перпендикулярным к этой плоскости; длину его выбирают равной модулю момента силы $|\bar{m}_o(\bar{F})|$; и направляют в ту сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки Полученный вектор-момент силы $\bar{m}_o(\bar{F})$ полностью определяет все элементы момента силы F относительно центра O.

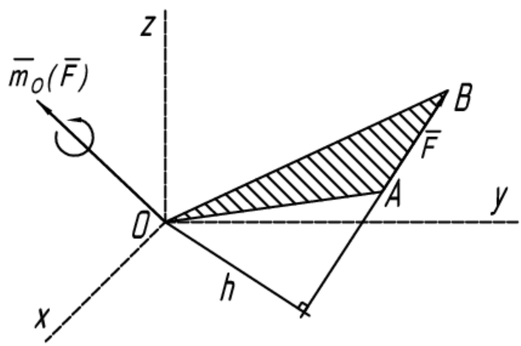


Рис. 35. Момент силы относительно центра О

Момент силы относительно оси

В практических задачах пространственной статики пользуются понятием момента силы относительно оси (например, $m_z(\bar{F})$- момент силы $\bar{F}$ относительно оси z). Момент силы относительно оси есть величина скалярная. Модуль момента $m_z(\bar{F})$ находят, пользуясь алгоритмом:

1. Находим проекцию силы $\bar{F}$ (рис. 36.) на любую плоскость, перпендикулярную оси *Oz* (удобнее выбирать плоскость, проходящую через точку A приложения силы), и вычисляют величину этой проекции F_{xy}.

2. Опустив перпендикуляр из точки *O* на линию действия силы $\bar{F}_{xy}$, находят плечо h.

3. Определяют знак момента. Момент считается положительным, если с положительного конца оси *Oz* поворот, совершаемый силой $\bar{F}_{xy}$, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным - если по ходу часовой стрелки.

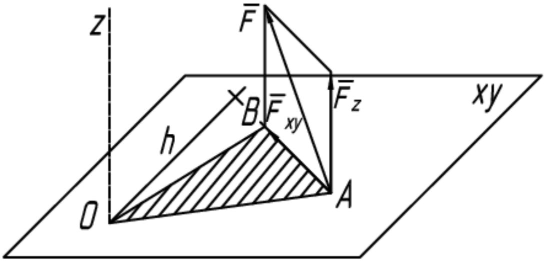


Рис. 36. Момент силы относительно оси z

$$m_z(F) = m_z\left(F_{xy}\right) = m_o\left(F_{xy}\right) = \pm F_{xy} \cdot h \qquad (15)$$

При вычислении момента силы относительно оси следует иметь в виду следующие частные случаи:

а) момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна этой оси (т.к. $F_{xy} = 0$);

б) момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает ось (т.к. h = 0).

Объединяя оба случая, заключаем: *момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.*

Приведение произвольной пространственной системы сил к простейшему виду

При приведении произвольной пространственной системы сил к некоторому центру O (рис. 34.) система сил заменяется одной силой $\bar{R}$ (главный вектор) и одной парой с моментом $\overline{M_O}$ (главный момент).

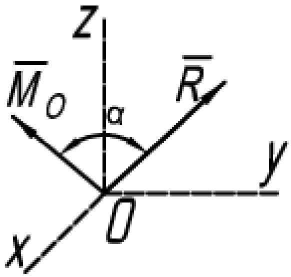


Рис. 37. Главный вектор и главный момент системы сил, приведенной к центру О

Аналитически эти векторы определяются через их проекции на оси координат

$$R_x = \sum F_{kx}\,, \qquad R_y = \sum F_{ky}\,, \qquad R_z = \sum F_{kz}\,,$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{16}$$

$$M_x = \sum m_x(\bar{F}_k)\,, \qquad M_y = \sum m_y(\bar{F}_k)\,, \qquad M_z = \sum m_z(\bar{F}_k)\,,$$
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{17}$$

Вычислив главный вектор и главный момент по формулам (16) и (17), исследуют полученные результаты.

При этом возможны частные случаи:

1) Если $\bar{R} = 0$ и $\bar{M}_O = 0$, система сил находится в равновесии.
2) Если $\bar{R} = 0$ и $\bar{M}_O \neq 0$, система сил приводится к паре сил.
3) Если $\bar{R} \neq 0$ и $\bar{M}_O = 0$, система сил приводится к равнодействующей, проходящей через центр O.
4) Если $\bar{R} \neq 0$ и $\bar{M}_O \neq 0$, то может быть несколько вариантов приведения совокупности этих векторов к простейшему виду. Эти варианты зависят от взаимной ориентации векторов $\bar{R}$ и $\bar{M}_O$, которую можно установить, вычислив их скалярное произведение.

$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = \pm R \cdot M_O \cdot \cos\alpha$ или
$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \qquad (18)$$

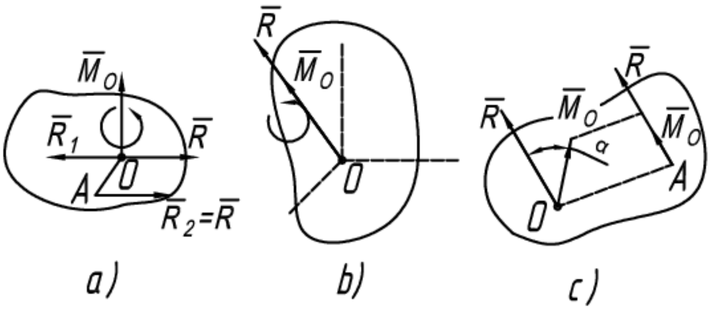


Рис. 38. Частные случаи приведения пространственной системы сил к заданному центру

При этом возможны такие случаи:

а) $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$, значит $\cos\alpha = 0$, а угол $\alpha = 90°\,(270°)$, т.е. $\bar{R} \perp \bar{M}_O$ (рис. 38, *а*). Система сил приводится к равнодействующей $\bar{R} = \bar{R}_2$, не проходящей через центр *О*.

Действительно, заменив вектор $\bar{M}_O$ парой сил $(\overline{R_1}, \overline{R_2})$, видим, что эта пара и сила $\bar{R}$ лежат в одной плоскости. Располагаем пару так, как показано на рис. 38, *а*; выбираем модули сил пары равными модулю главного вектора $R = R_1 = R_2$. В полученной совокупности трех сил $(\bar{R}, \bar{R}_1, \bar{R}_2)$ силы $\bar{R}$ и $\bar{R}_1$ образуют уравновешенную систему сил (их отбрасываем), оставшаяся сила $\bar{R}_2 = \bar{R}$ и будет равнодействующей, проходящей через точку *А* на расстоянии $OA = \frac{M_O}{R}$ от центра приведения *О*.

б) $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = \pm R \cdot M_O$, значит $\cos\alpha = \pm 1$, а угол $\alpha = 0$ (или $180°$), т.е. есть $\bar{R} \parallel \bar{M}_O$ (рис. 38, *б*). Система сил приводится к динамическому винту или динаме, ось которой проходит через центр приведения *О*. Дальнейшее упрощение этой системы невозможно, т.е. привести ее к одной равнодействующей или к одной паре сил нельзя. Свободное тело под действием такой системы будет совершать винтовое движение.

в) $\bar{R} \cdot \bar{M}_O < R \cdot M_O$, значит $0 < \cos\alpha < 1$, а угол α будет острым или тупым (рис. 38, *в*). Система сил приводится также к динаме, но ось ее не проходит через центр приведения, а отстоит от него на некотором расстоянии.

Условие равновесия систем сил, расположенных в пространстве

1. Система сходящихся сил

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \\ \sum F_{k_z} = 0 \end{cases} \tag{19}$$

2. Система параллельных сил

$$\begin{cases} \sum F_{kz} = 0 \\ \sum m_x(\overline{F}_k) = 0 \\ \sum m_y(\overline{F}_k) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

где ось Oz || *силам*

3. Система произвольно расположенных сил

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \\ \sum F_{k_z} = 0 \\ \sum m_x(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_y(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Задача С - 5

Определение главного вектора и главного момента пространственной системы сил

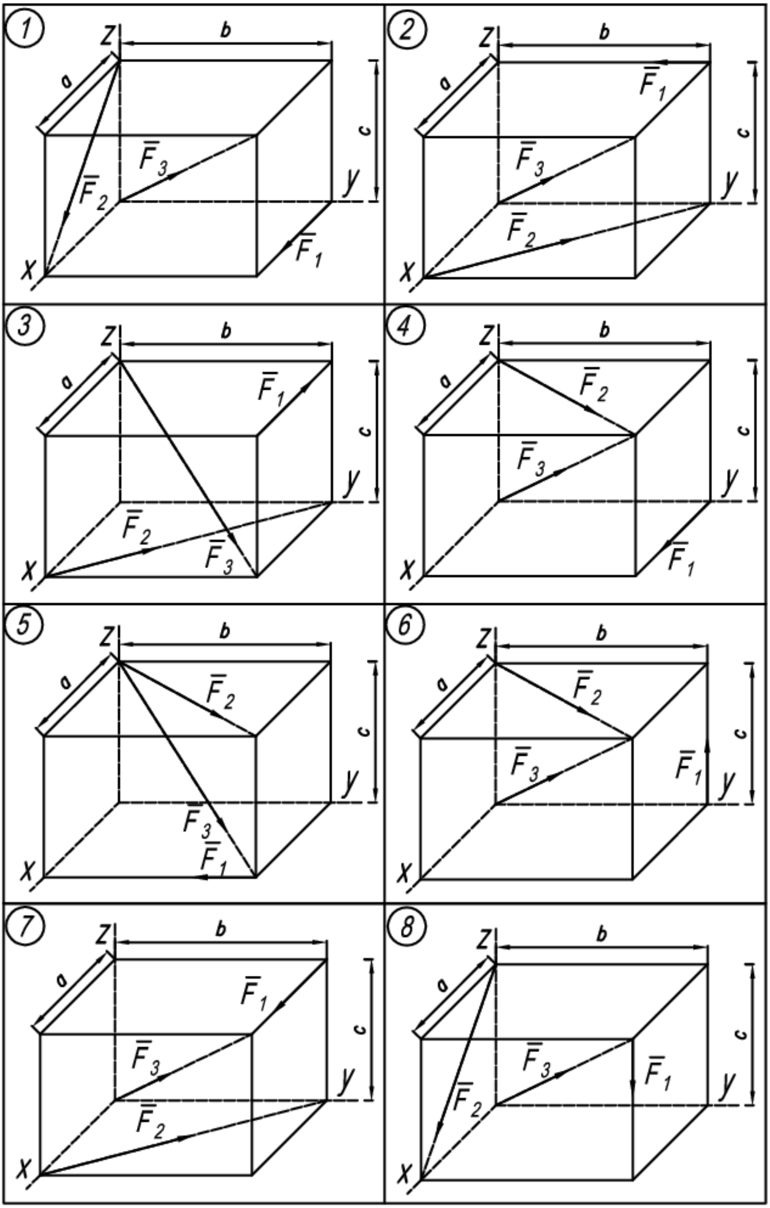
Исходные данные

Для заданной системы сил найти главный вектор и главный момент. Расчетные схемы представлены в табл. 11, исходные данные – в табл. 12.

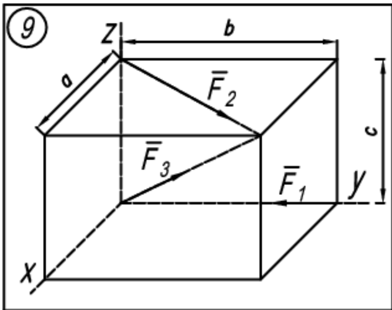
Построить в декартовой системе координат (правая ориентация) главный вектор и главный момент системы сил согласно найденным значениям проекций.

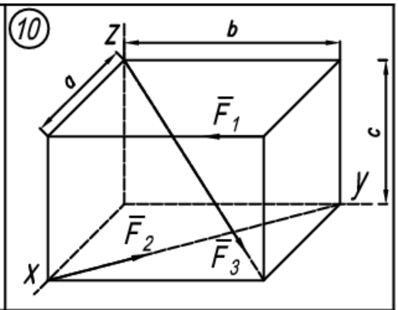
Таблица 11

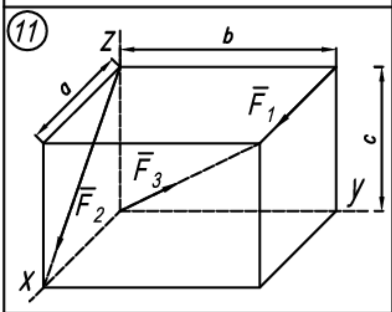
Варианты заданий

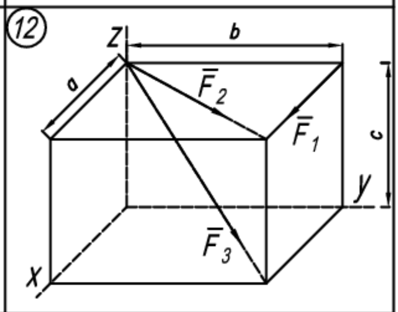


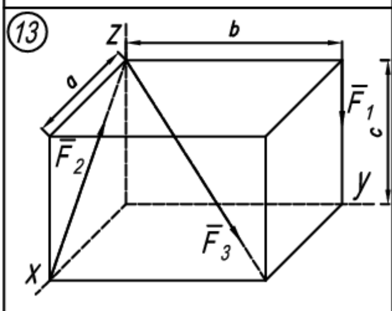
Продолжение табл. 11

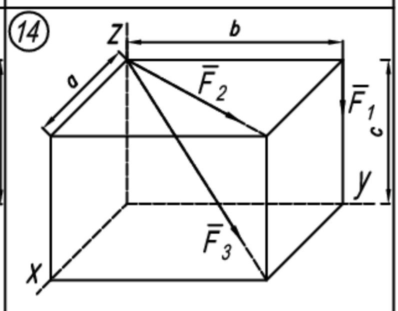


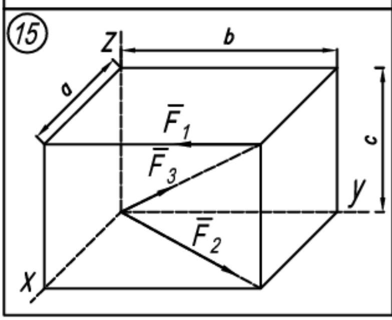


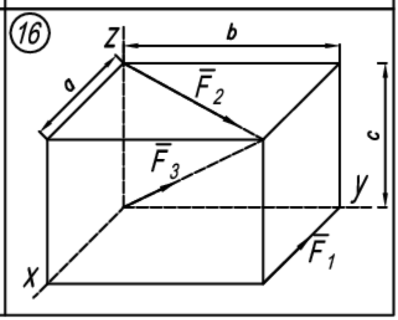




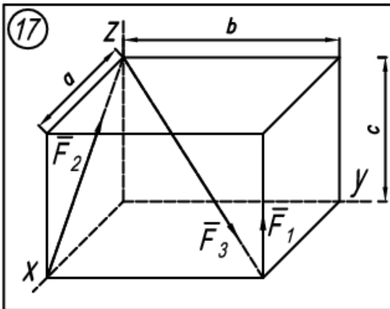


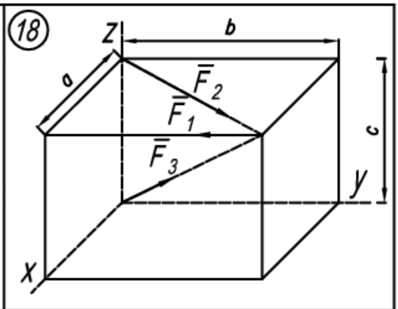


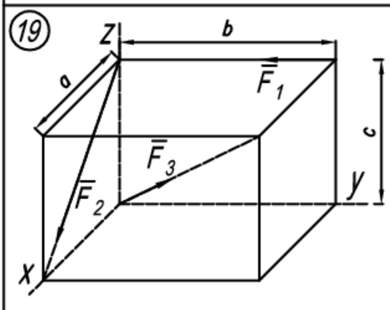


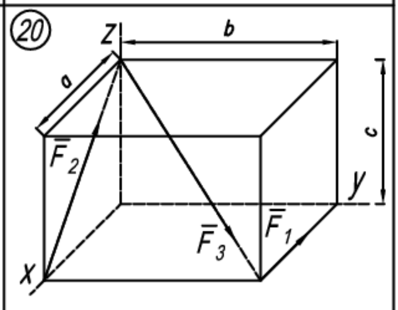


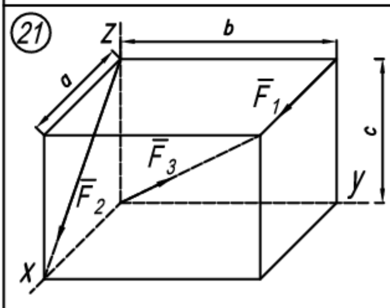
Продолжение табл. 11

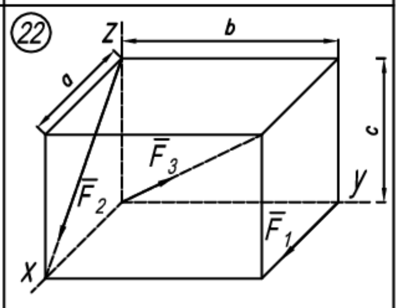


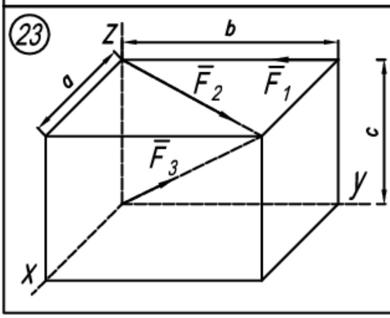


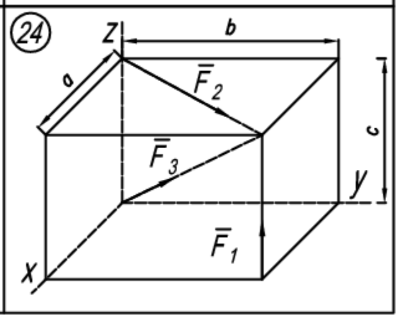




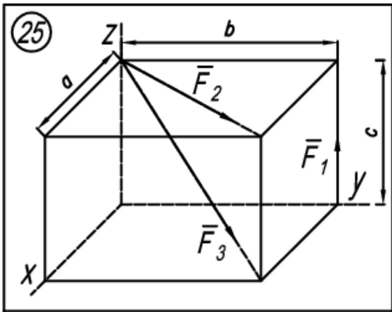


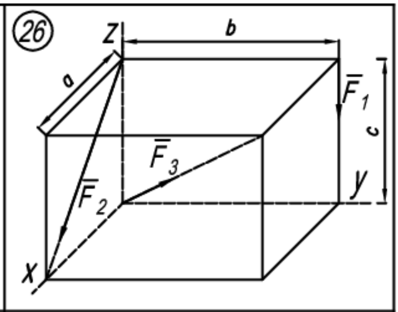


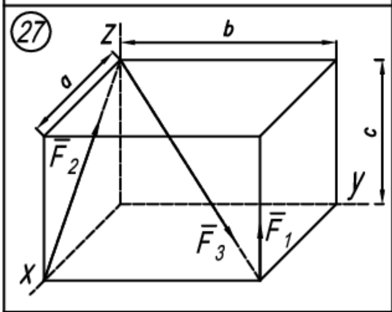


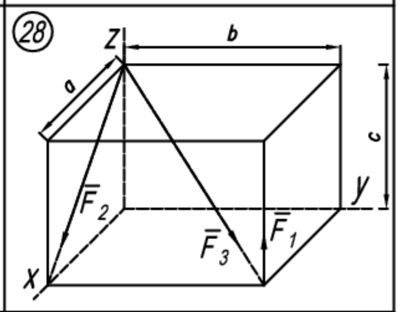


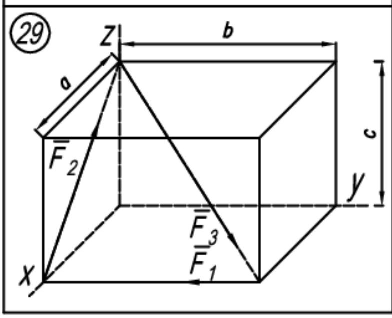
Окончание табл. 11











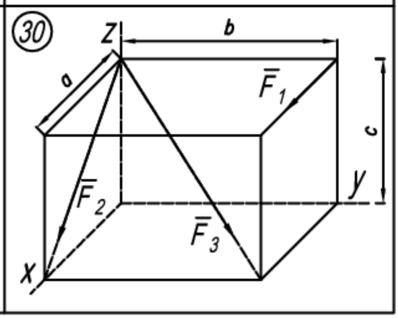


Таблица 12

Варианты заданий

Номер варианта	F_1, Н	F_2, Н	F_3, Н	a, м	b, м	c, *м*
1	1	1	3	4	5	3
2	2	3	6	8	10	6
3	4	5	7	8	10	6
4	1	1	3	4	5	3
5	3	3	6	4	5	3
6	1	1	2	4	5	3
7	2	3	5	8	10	6
8	4	4	5	4	5	3
9	1	1	4	4	5	3
10	4	5	8	8	10	6
11	2	2	4	4	5	3
12	2	2	4	4	5	3
13	2	3	4	8	10	6
14	2	2	3	4	5	3
15	4	4	7	4	5	3
16	3	3	5	4	5	3
17	3	4	5	8	10	6
18	4	4	7	4	5	3
19	2	2	5	4	5	3
20	3	4	6	8	10	6
21	2	2	4	4	5	3
22	1	1	3	4	5	3
23	2	2	5	4	5	3
24	3	3	4	4	5	3
25	1	1	2	4	5	3
26	2	2	3	4	5	3
27	3	4	5	8	10	6
28	3	3	4	4	5	3
29	3	4	7	8	10	6
30	2	2	4	4	5	3

Пример 5

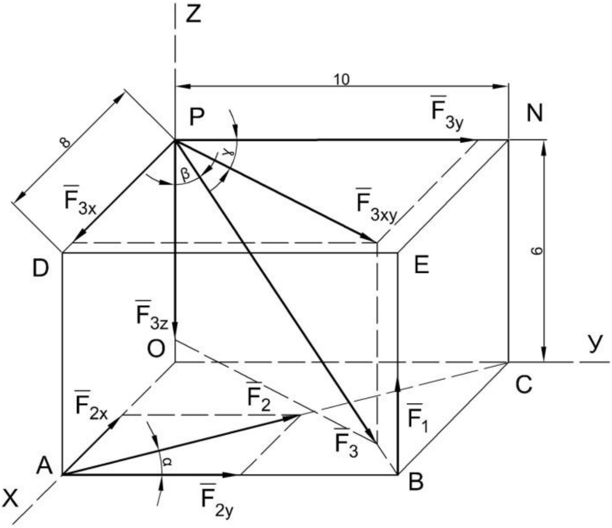


Рис. 39. Пространственная система сил

Дано:
$F_1 = 3$ Н
$F_2 = 4$ Н
$F_3 = 5$ Н
$a = 8$ м
$b = 10$ м
$c = 6$ м

Найти:
$\bar{R}$-?
$\bar{M}_O$-?

Решение:

$$\bar{F}_2 = \bar{F}_{2x} + \bar{F}_{2y}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin\alpha$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{8^2+10^2}} = 0{,}781$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{8^2+10^2}} = 0{,}625$$

$$\bar{F}_3 = \bar{F}_{3z} + \bar{F}_{3xy}$$

$$F_{3z} = F_3 \cdot \cos\beta$$

$$F_{3xy} = F_3 \cdot \sin\beta$$

$$\cos\beta = \frac{6}{\sqrt{10^2+8^2+6^2}} = 0{,}424$$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{10^2+8^2}}{\sqrt{10^2+8^2+6^2}} = 0{,}906$

$\bar{F}_{3xy} = \bar{F}_{3x} + \bar{F}_{3y}$

$F_{3x} = F_{3xy} \cdot \sin\gamma = F_3 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

$F_{3y} = F_{3xy} \cdot \cos\gamma = F_3 \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma$

$\sin\gamma = \frac{8}{\sqrt{8^2+10^2}} = 0{,}625$

$\cos\gamma = \frac{10}{\sqrt{8^2+10^2}} = 0{,}781$

$\bar{R} = \sum \bar{F}_k$

$R_x = F_{k_X}$

$R_y = F_{k_y}$

$R_z = F_{k_Z}$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

$R_x = -F_2 \cdot \sin\alpha + F_3 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$; $\quad R_x = 0{,}331$ Н

$R_y = F_2 \cdot \cos\alpha + F_3 \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma$; $\quad R_y = 6{,}662$ Н

$R_z = F_1 - F_3 \cdot \cos\beta$; $\quad R_z = -2$ Н

$R = \sqrt{0{,}331^2 + 6{,}662^2 + (-2)^2} = 6{,}96$ Н

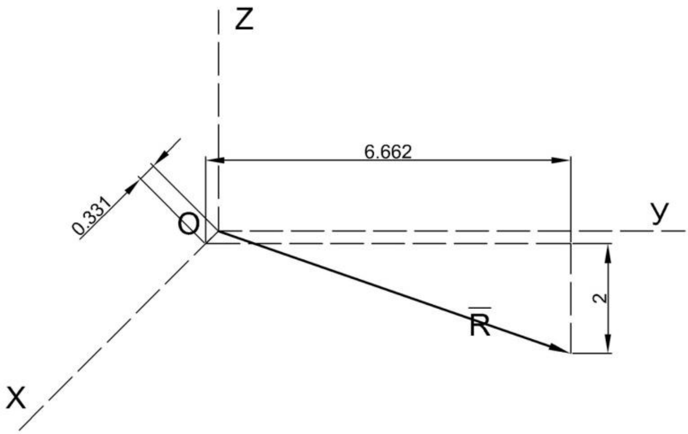


Рис. 40. Главный вектор системы сил

$\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\bar{F}_k)$; $\overline{M}_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$

$M_x = \sum m_x(\bar{F}_k)$ $M_y = \sum m_y(\bar{F}_k)$ $M_z = \sum m_z(\bar{F}_k)$

M_x:

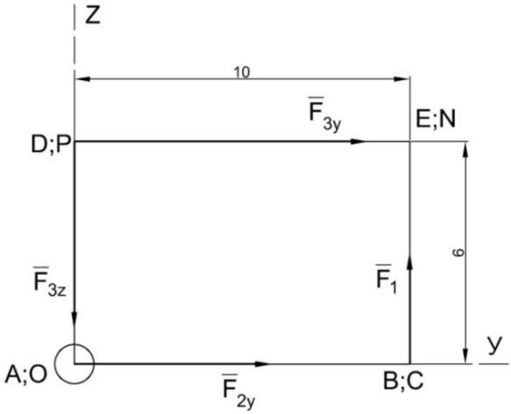


Рис. 41. Момент системы сил относительно оси x

$M_x = F_1 \cdot 10 - F_3 \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma \cdot 6$; $M_X = 8{,}772$ Н · м

M_y:

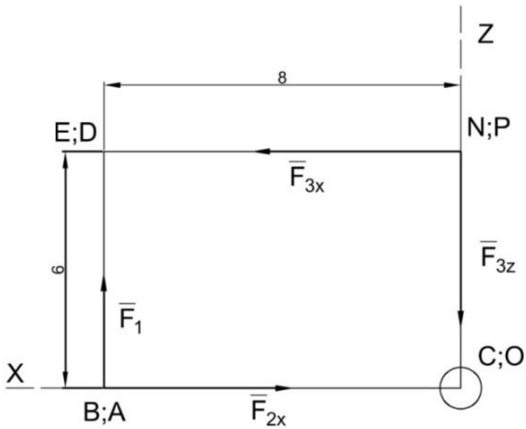


Рис. 42. Момент системы сил относительно оси y

$M_y = -F_1 \cdot 8 + F_3 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot 6$; $M_Y = -7{,}013$ Н · м

M_z:

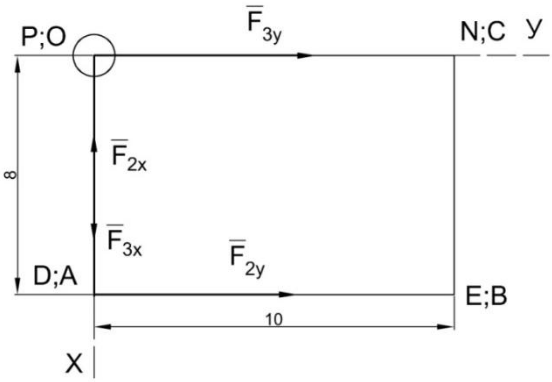


Рис. 43. Момент системы сил относительно оси z

$M_z = F_2 \cdot \cos\alpha \cdot 8$; $M_z = 25$ Н · м

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{8{,}772^2 + (-7{,}013)^2 + 25^2} = 27{,}41 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

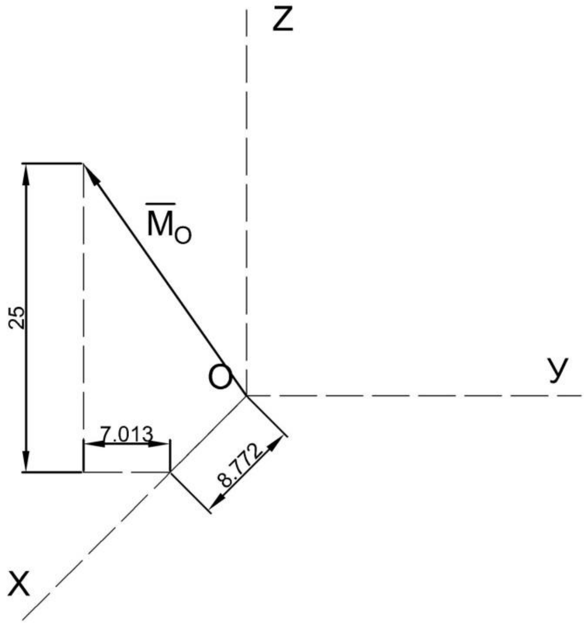


Рис. 44. Главный момент системы сил

Ответ: $R = 6{,}96$ Н; $M_O = 27{,}41$ Н · м

Задача С – 6.1

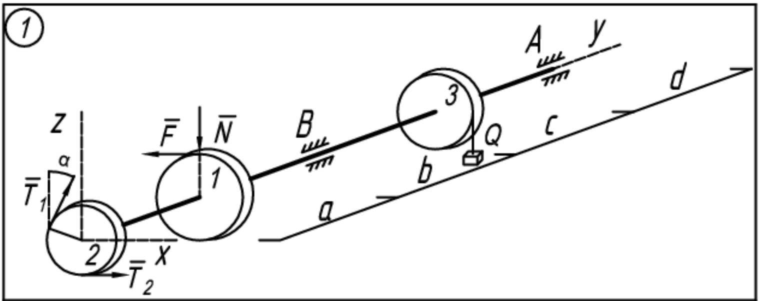
Равновесие вала

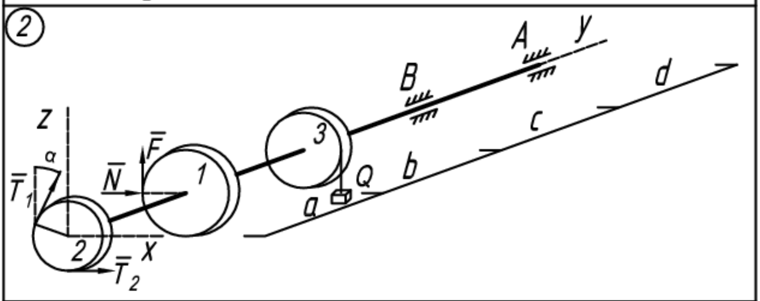
Исходные данные

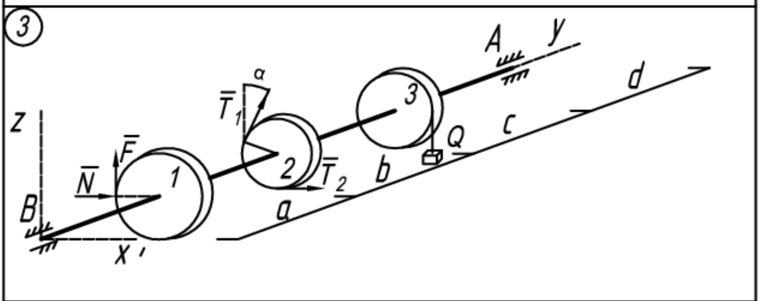
Горизонтальный вал весом G может вращаться в цилиндрических шарнирах A и B. К шкиву 1 приложено нормальное давление N и касательная сила сопротивления F, пропорциональная N. На шкив 2 действуют силы натяжения ремней T_1 и T_2. Груз Q висит на нити, навитой на шкив 3. Определить силу давления N и реакции шарниров в условии равновесия вала. Учесть веса шкивов P_1, P_2, P_3. Все нагрузки действуют в вертикальной плоскости.

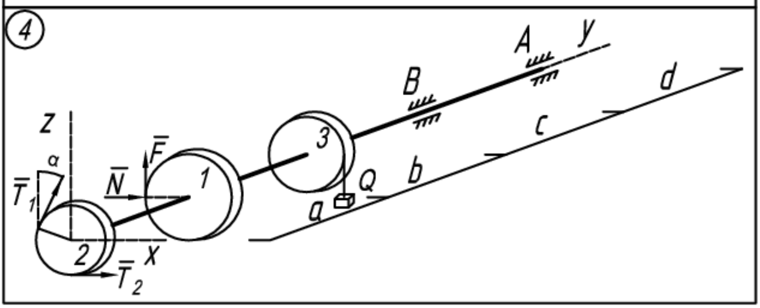
Таблица 13

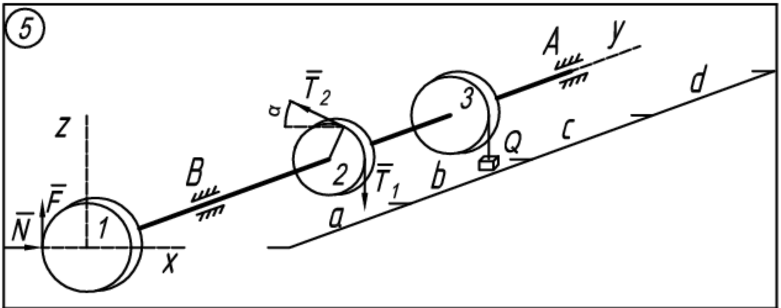
Варианты заданий

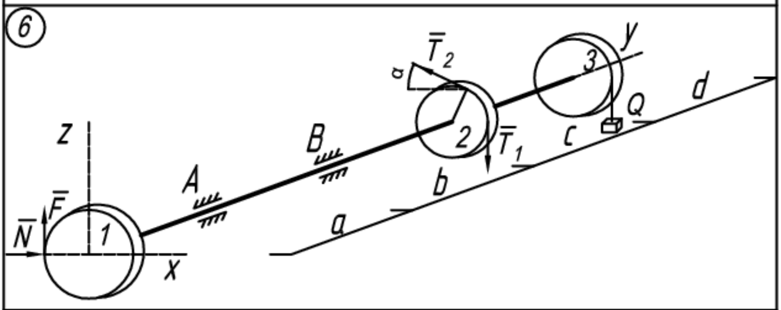


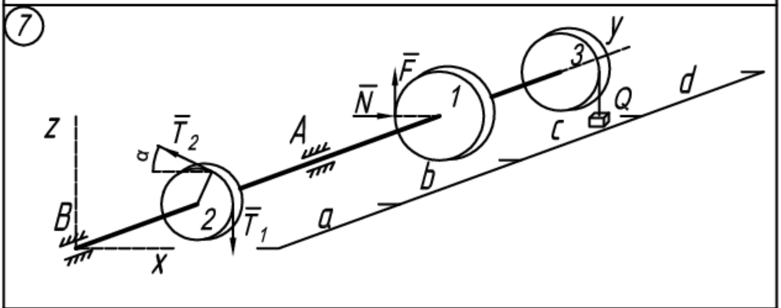


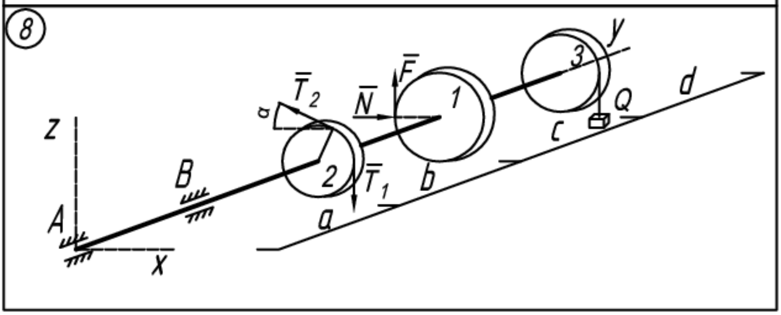




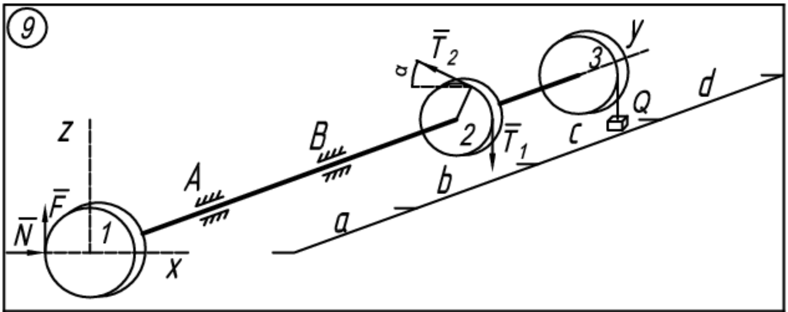

5
A
y
$\overline{T}_2$
α
d
3
z
Q
c
B
2
$\overline{T}_1$
b
$\overline{F}$
$\overline{N}$
1
a
x

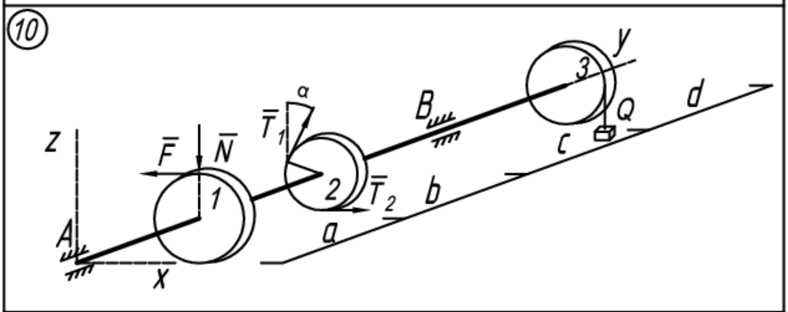

6
y
$\overline{T}_2$
α
3
d
Q
z
B
2
$\overline{T}_1$
c
A
b
$\overline{F}$
$\overline{N}$
1
a
x

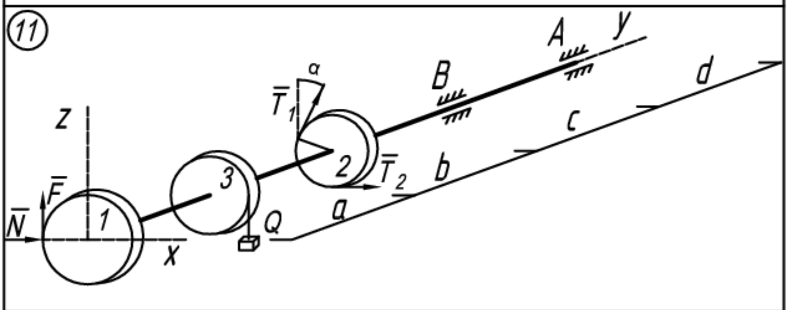

7
y
$\overline{F}$
3
d
$\overline{N}$
1
Q
z
$\overline{T}_2$
A
c
α
b
B
2
$\overline{T}_1$
a
x

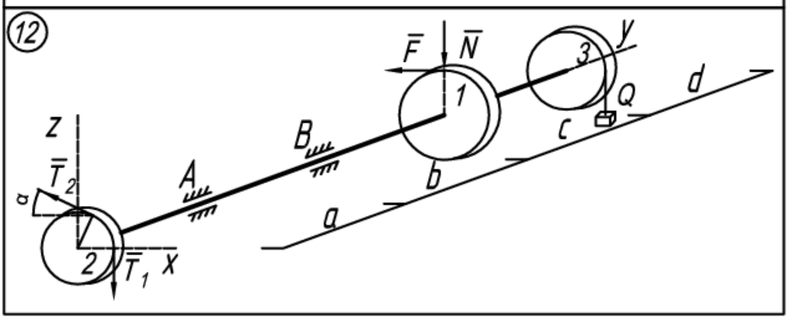

8
y
$\overline{F}$
3
$\overline{T}_2$
d
$\overline{N}$
1
Q
α
z
c
B
2
$\overline{T}_1$
b
A
a
x

Продолжение табл. 13



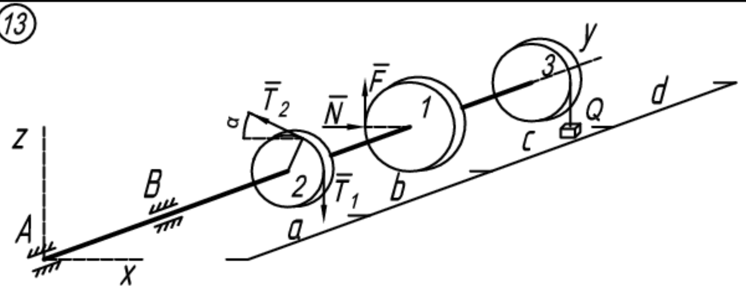




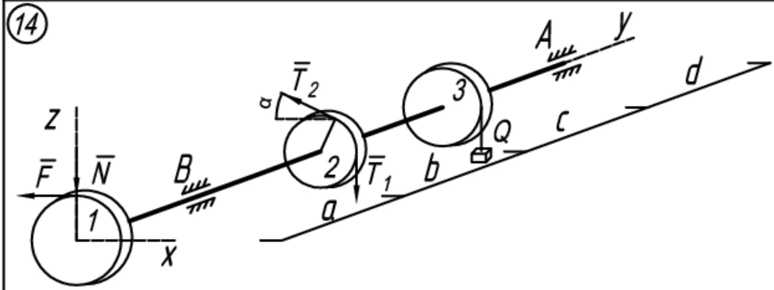


Продолжение табл. 13

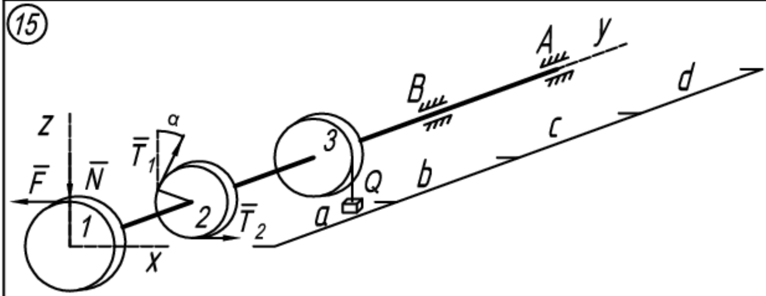
13



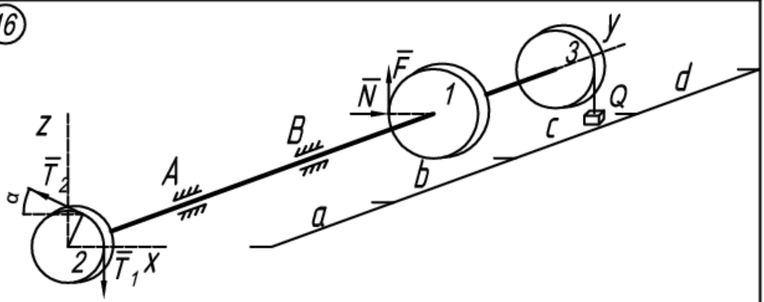
14

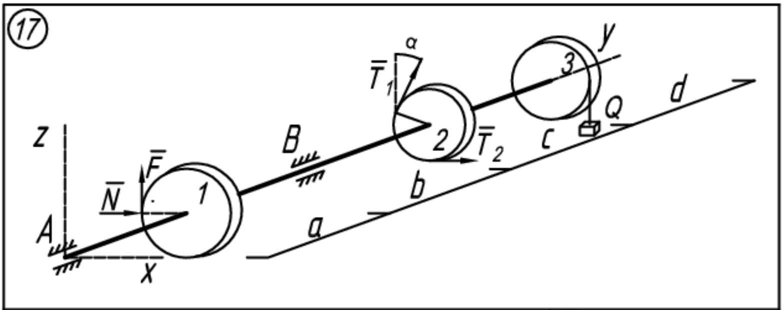


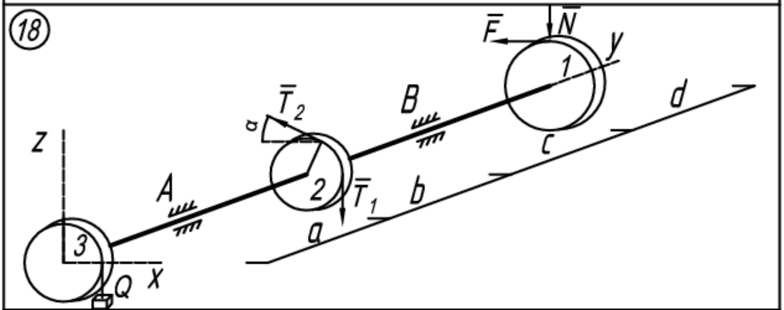
15

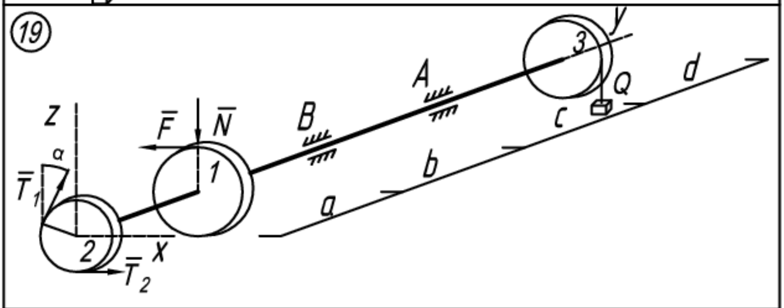


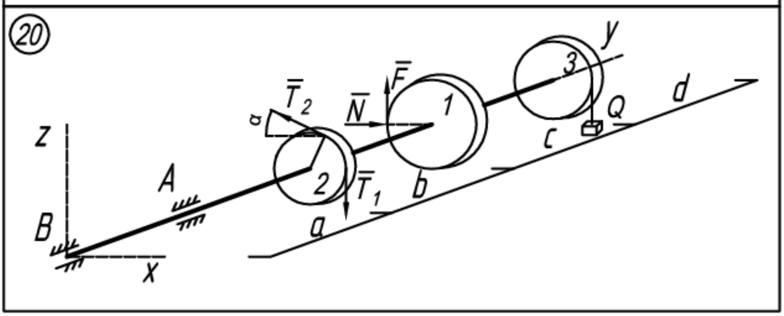
16



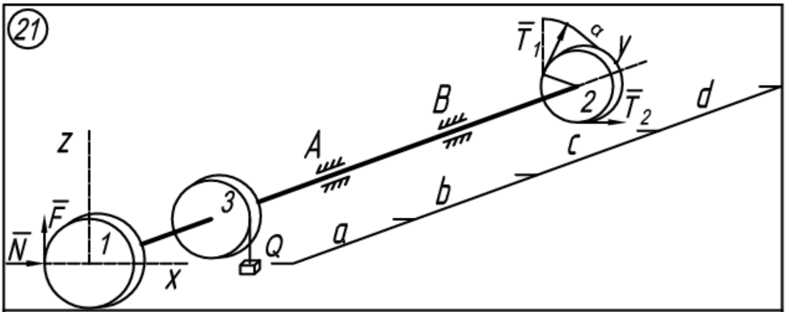

17
z
y
x
A
B
F
N
T1
T2
α
1
2
3
Q
a
b
c
d

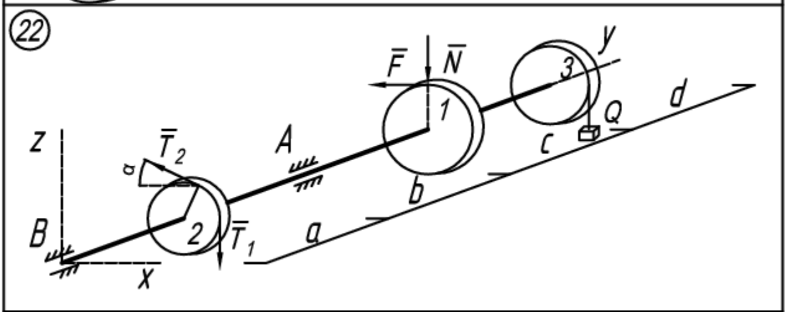

18
z
y
x
A
B
F
N
T1
T2
α
1
2
3
Q
a
b
c
d

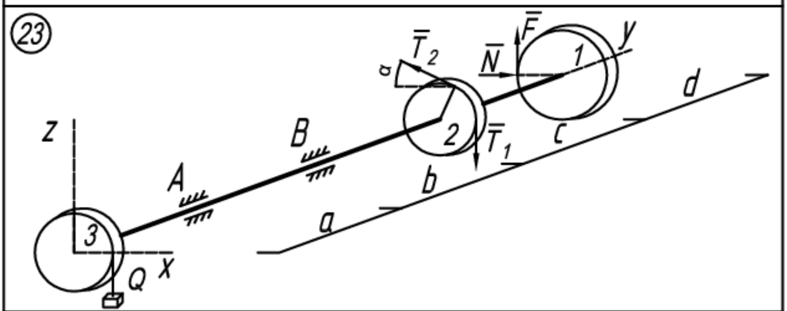

19
z
y
x
A
B
F
N
T1
T2
α
1
2
3
Q
a
b
c
d

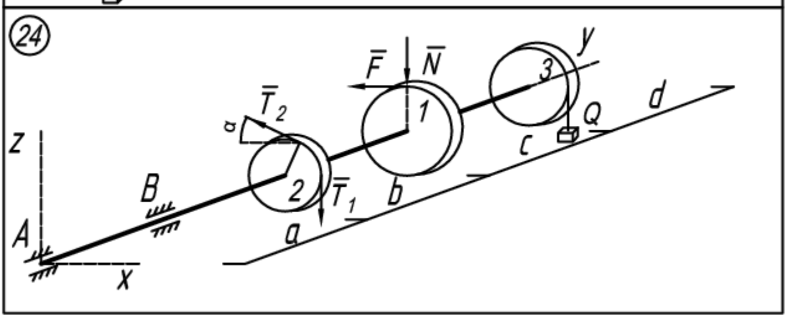

20
z
y
x
A
B
F
N
T1
T2
α
1
2
3
Q
a
b
c
d

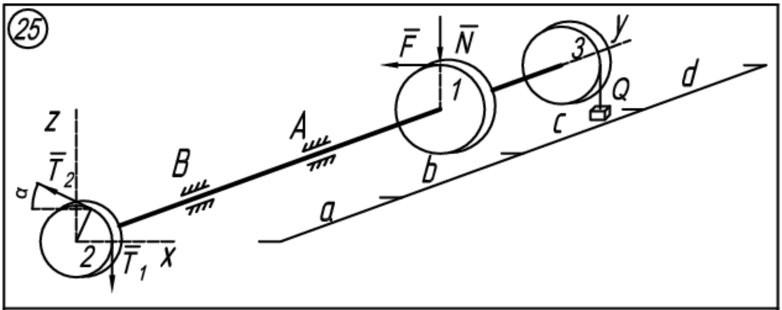
Продолжение табл. 13

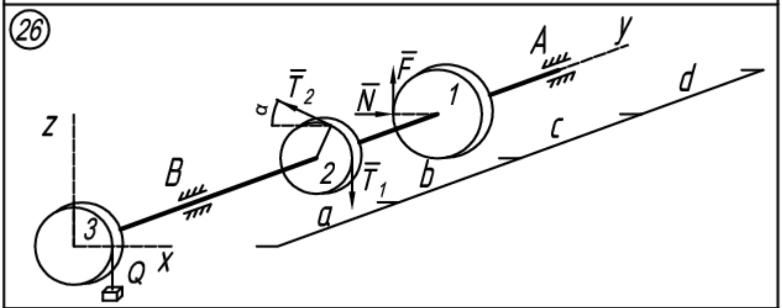


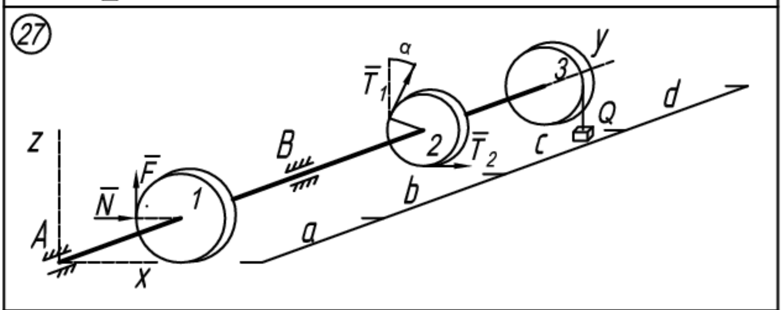


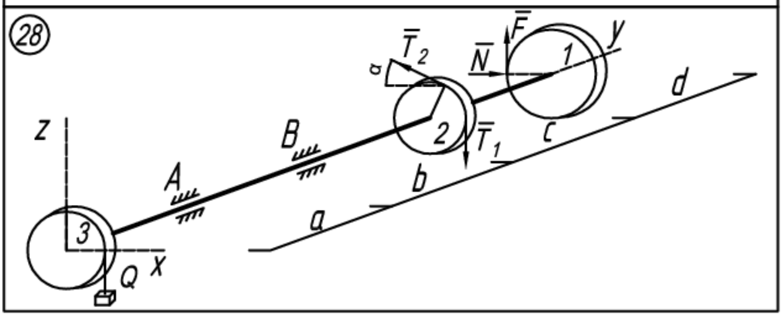




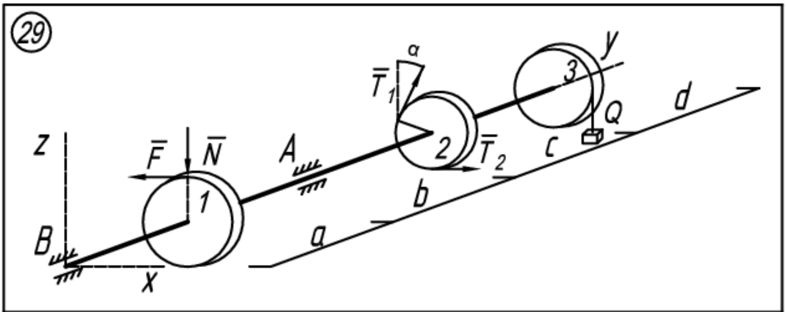

25
F̄
N̄
y
3
1
Q
d
z
A
c
T̄2
α
B
b
a
2
T̄1
x


26
A
y
F̄
d
T̄2
α
N̄
1
z
c
B
2
T̄1
b
3
a
Q
x


27
α
y
T̄1
3
d
Q
z
2
T̄2
c
F̄
B
N̄
1
b
A
a
x


28
F̄
y
T̄2
N̄
1
α
d
z
2
T̄1
c
B
A
b
a
3
Q
x

Окончание табл. 13



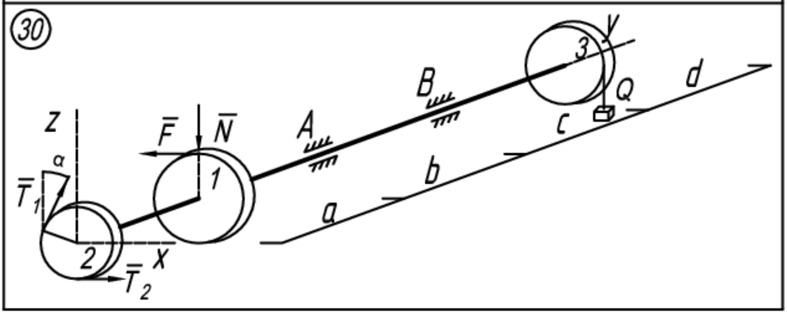


Таблица 14

Варианты заданий

№ вар	F(N)	T_1, Н	T_2, Н	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	Q, Н	G, Н	α, град	R_1, см	R_2, см	R_3, см	a, см	b, см	c, см	d, см
1	0,4N	50	29	34	20	28	10	25	45	24	10	12	24	25	27	27
2	0,4N	50	96	44	30	38	22	25	60	26	12	14	24	28	31	27
3	0,3N	40	78	46	30	38	14	20	60	30	12	14	24	26	29	28
4	0,3N	50	96	46	30	38	22	25	60	30	12	14	24	28	31	28
5	0,4N	60	117	32	20	28	18	30	45	20	10	12	24	27	29	26
6	0,4N	60	118	30	20	28	14	30	45	16	10	12	24	26	28	25
7	0,3N	40	77	22	10	18	18	20	30	18	8	10	24	27	28	26
8	0,1N	30	58	18	10	14	14	15	30	18	8	9	22	24	25	24
9	0,2N	60	117	16	10	14	18	30	30	14	8	9	22	25	26	23
10	0,4N	30	19	46	30	38	10	15	60	30	12	14	24	25	28	28
11	0,4N	60	116	46	30	38	22	30	60	30	12	14	24	28	31	28
12	0,1N	50	26	16	10	14	10	25	30	14	8	9	22	23	24	23
13	0,2N	30	58	26	20	24	14	15	45	16	10	11	22	24	26	23
14	0,3N	30	33	42	30	38	26	30	60	22	12	14	24	29	32	26
15	0,3N	60	33	44	30	38	10	30	60	26	12	14	24	25	28	27
16	0,3N	50	96	30	20	28	22	25	45	16	10	12	24	28	30	25
17	0,3N	30	57	26	10	18	18	15	30	26	8	10	24	27	28	28
18	0,1N	70	36	36	30	34	10	35	60	18	12	13	22	23	26	23
19	0,2N	50	27	32	20	24	26	25	45	28	10	11	22	27	29	26
20	0,1N	40	77	26	20	24	18	20	45	16	10	11	22	25	27	23
21	0,3N	60	117	26	10	18	18	30	30	26	8	10	24	27	28	28
22	0,1N	40	21	18	10	14	26	20	30	18	8	9	22	27	28	24
23	0,1N	70	137	16	10	14	18	35	30	14	8	9	22	25	26	23
24	0,4N	30	19	32	20	28	26	15	45	20	10	12	24	29	31	26
25	0,3N	50	28	22	10	18	26	25	30	18	8	10	24	29	30	26
26	0,3N	70	137	42	30	38	18	35	60	22	12	14	24	27	30	26
27	0,2N	30	56	22	10	14	22	15	30	26	8	9	22	26	27	26
28	0,1N	70	36	26	20	24	26	35	45	16	10	11	22	27	29	23
29	0,3N	40	23	26	10	18	26	20	30	26	8	10	4	29	30	28
30	0,2N	50	27	20	10	14	10	25	30	22	8	9	22	23	24	25

Пример 6

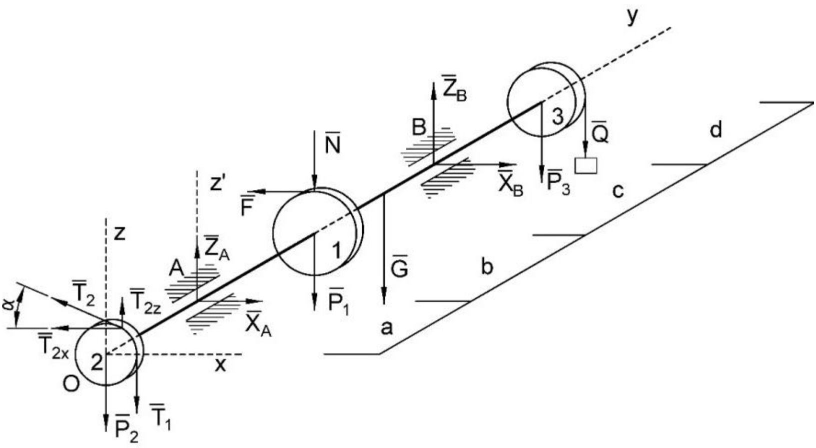


Рис. 45. Равновесие вала

Дано:
F = 0,4N
T_1 = 50 Н
$T_2 = 29$ Н
$P_1 = 40$ Н
$P_2 = 30$ Н
$P_3 = 38$ Н
$Q = 10$ Н
$G = 25$ Н
$\alpha = 60°$
$R_1 = 0{,}18$ м
$R_2 = 0{,}12$ м
$R_3 = 0{,}14$ м
a = 0,24 м
b = 0,25 м
c = 0,28 м
d = 0,25 м

Найти:
X_A - ? Z_A - ?
X_B - ?Z_B - ?
N - ?

Решение:

$\bar{T}_2 = \bar{T}_{2x} + \bar{T}_{2z}$
$T_{2x} = T_2 \cdot cos60°$
$T_{2z} = T_2 \cdot sin60°$

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \\ \sum F_{k_z} = 0 \\ \sum m_x(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_y(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}$$

x: $-T_2 \cdot cos60° - F + X_A + X_B = 0$
y: 0=0
z: $T_2 \cdot sin60° - T_1 + Z_A - N + Z_B - Q - P_1 - P_2 - P_3 - G = 0$

M_x: $Z_A \cdot a - P_1 \cdot (a+b) - N \cdot (a+b) - G\frac{(a+b+c+d)}{2} + Z_B \cdot\ (a+b+$
$c{-}P3{\cdot}a{+}b{+}c{+}d{-}Q{\cdot}a{+}b{+}c{+}d{=}0$
M_y: $T_1 \cdot R_2 - R_2 \cdot T_2 - F \cdot R_1 + Q \cdot R_3 = 0$
M_z: $-X_A \cdot a + F \cdot (a+b) - X_B \cdot (a+b+c) = 0$
$F = \dfrac{T_1 \cdot R_2 - R_2 \cdot T_2 + Q \cdot R_3}{R_1}$; $\quad F = 21{,}78$ Н; $\quad N = \dfrac{F}{0{,}4} = 54{,}45$ Н
$X_A = T_2 \cdot cos60^\circ + F - X_B$
$X_B = \dfrac{F \cdot (a+b) - (T_2 \cdot cos60^\circ + F) \cdot a}{b+c}$; $X_B = 3{,}71\ H$
$X_A = 32{,}57$ Н
$Z_A = N - Z_B + Q + P_1 + P_2 + P_3 + G - T_2 \cdot sin60^\circ + T_1$
$Z_B = -\dfrac{a \cdot (N + Q + P_1 + P_2 + P_3 + G - T_2 \cdot sin60^\circ + T_1)}{b+c} +$
$+P_1 \cdot (a+b) + N \cdot (a+b) + G \cdot \left(\dfrac{a+b+c+d}{2}\right) +$
$+P_3 \cdot (a+b+c+d) + Q \cdot (a+b+c+d)$
$Z_B = 7{,}31$ Н
$Z_A = 225{,}65$ Н

Проверка: $\sum m_z{'}(\bar{F}_k) = 0$
$M_{z\prime}$: $F \cdot b - X_B \cdot (b+c) - T_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot a = 21{,}78 \cdot 0{,}25 - 3{,}71 \cdot 0{,}53 -$
$29 \cdot \cos 60^\circ \cdot 0{,}24 =\ 0$
Ответ: $N = 54{,}45$ Н; $X_A = 232{,}57$ Н; $Z_A = 225{,}65$ Н;
$X_B = 3{,}71$ Н; $Z_B = 7{,}31$ Н.

Задача С – 6.2

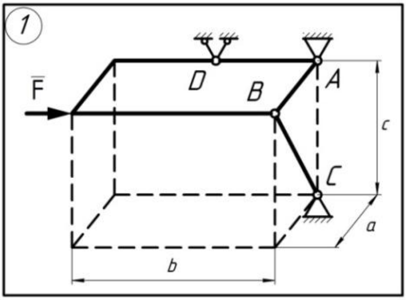
Равновесие твердого тела.

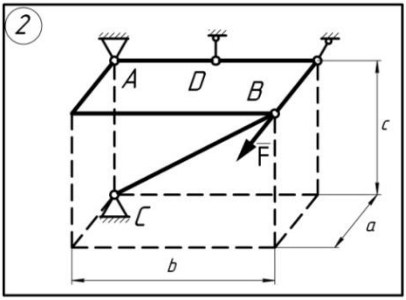
Исходные данные

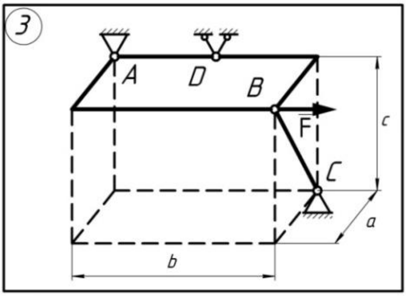
Горизонтальная однородная прямоугольная полка весом G имеет в точке A сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам стержнями (горизонтальным и вертикальным) и подпоркой BC. К полке приложена сила F, направленная вдоль одного из ребер. Определить реакции опор (в кН).

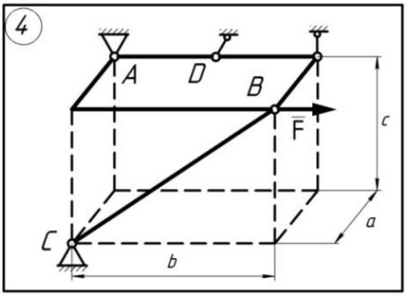
Таблица 15

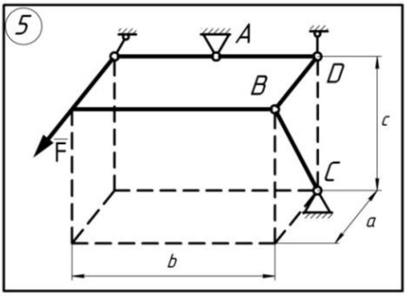
Варианты заданий

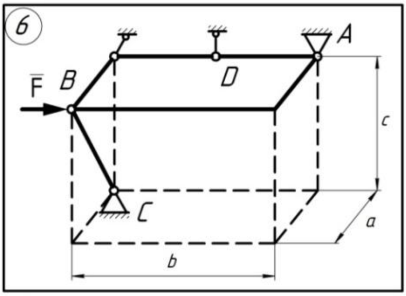


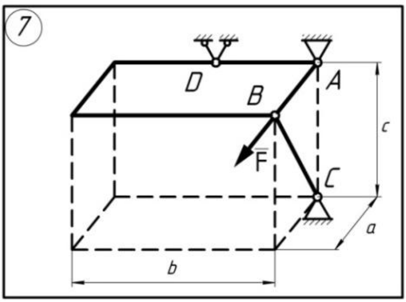


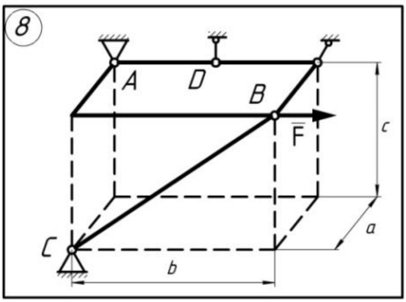


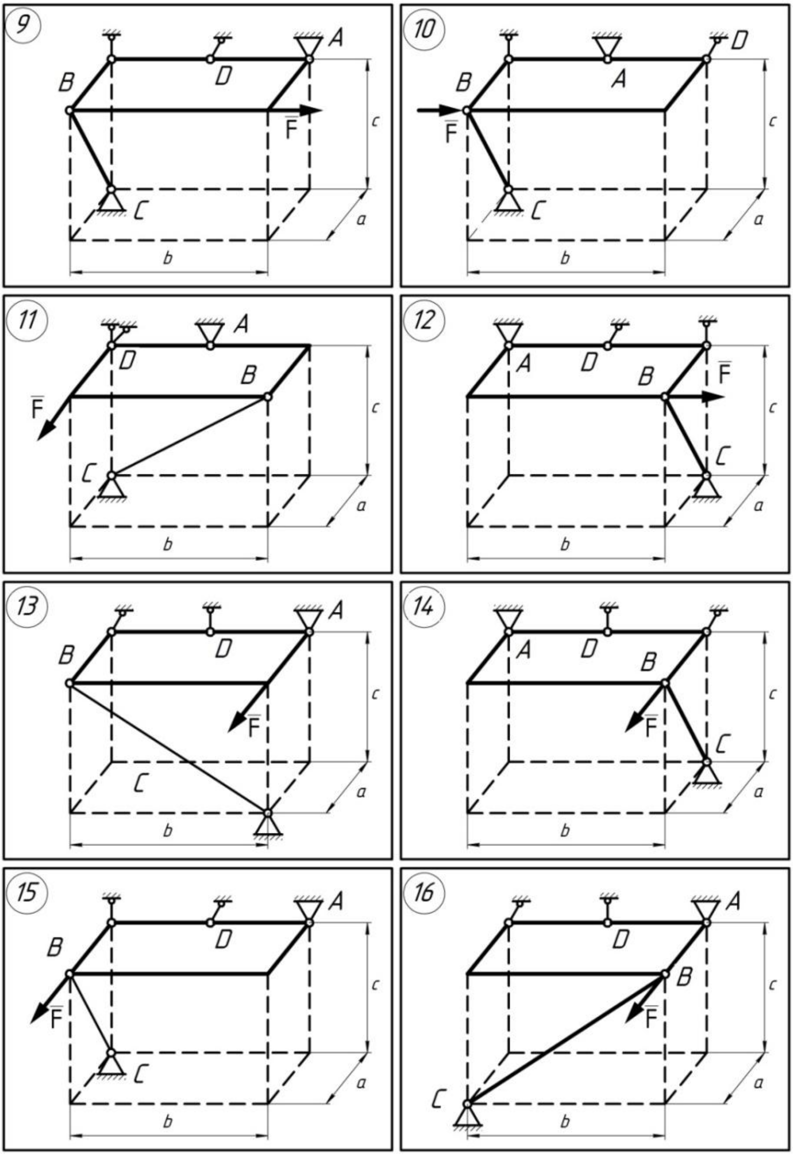




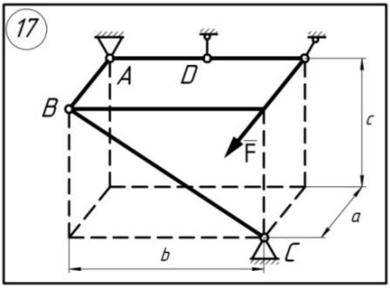


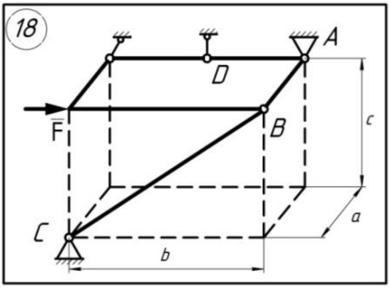


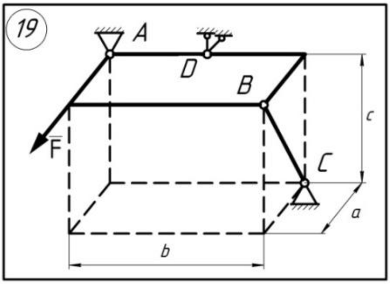


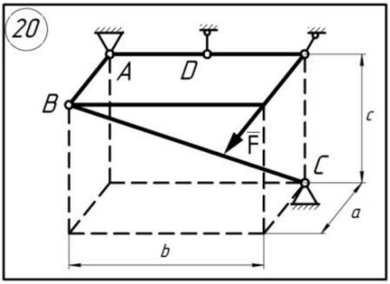

9
A
B
D
F
c
C
a
b
10
D
B
A
F
c
C
a
b
11
A
D
B
F
c
C
a
b
12
A
D
B
F
c
C
a
b
13
A
B
D
F
c
C
a
b
14
A
D
B
F
c
C
a
b
15
A
B
D
F
c
C
a
b
16
A
D
B
F
c
C
a
b

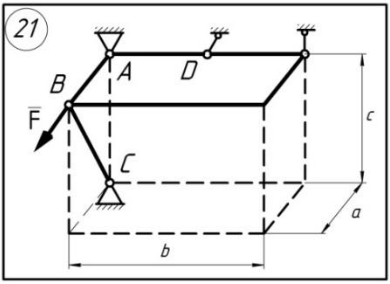
Продолжение табл. 15

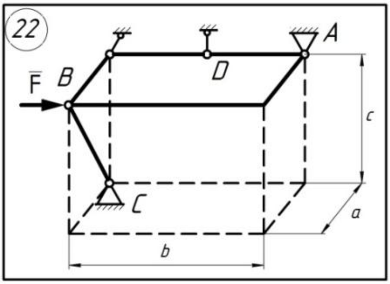


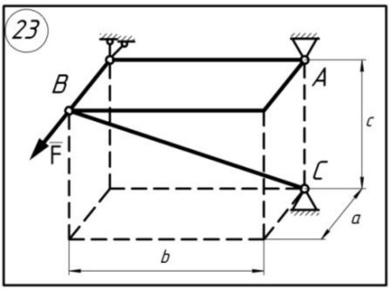


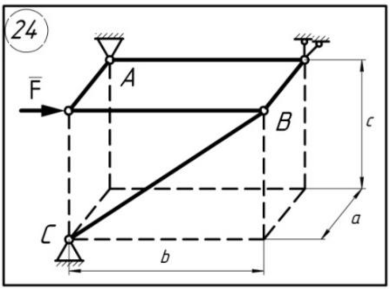




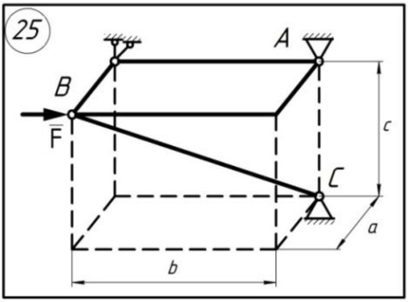


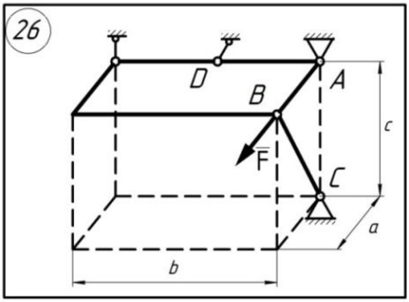


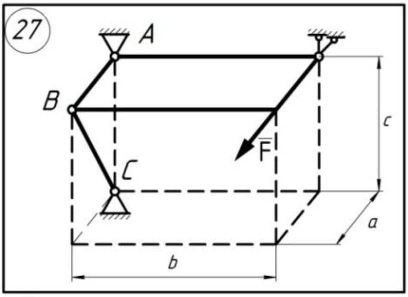


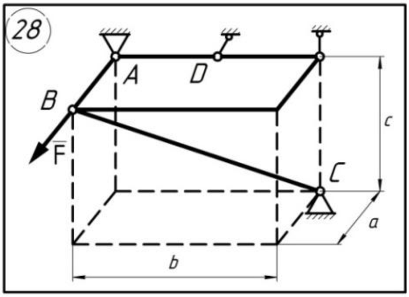


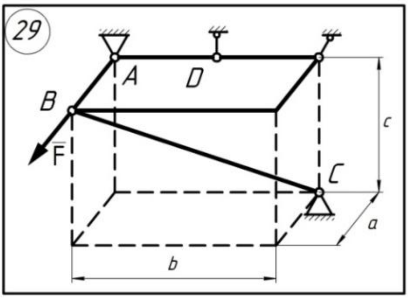
Окончание табл. 15











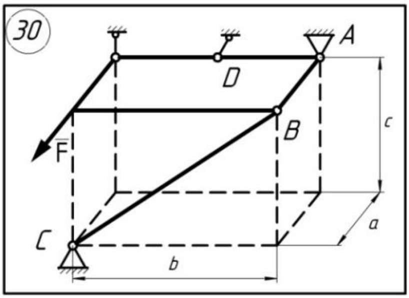


Таблица 16

Варианты заданий

№ Вар	*a*, м	*b*, м	*c*, м	AD, м	*G*, кН	*F*, кН
1	5	8	3	4	4	1
2	5	8	3	4	4	2
3	7	12	5	6	6	3
4	6	10	4	5	5	4
5	3	8	3	4	8	5
6	4	12	5	6	10	6
7	6	10	4	5	10	7
8	6	10	4	5	9	8
9	6	10	4	5	13	9
10	4	12	5	6	14	10
11	2	6	4	3	13	11
12	6	10	4	5	15	12
13	5	8	3	4	19	13
14	5	8	3	4	17	14
15	3	8	3	4	19	15
16	5	8	3	4	17	16
17	5	8	3	4	23	17
18	4	12	5	6	19	18
19	4	12	5	6	22	19
20	5	8	3	4	25	20
21	3	8	3	4	25	21
22	4	12	5	6	26	22
23	2	6	4	-	28	23
24	3	8	3	-	25	24
25	3	8	3	-	30	25
26	5	8	3	4	29	26
27	4	12	5	-	31	27
28	3	8	3	4	33	28
29	3	8	3	4	34	29
30	3	8	3	4	31	30

Пример 7

Горизонтальная однородная прямоугольная полка весом G имеет в точке A сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам стержнями (горизонтальным и вертикальным) и подпоркой CD. К полке приложена сила F, направленная вдоль одного из ребер. Определить реакции опор (в кН).

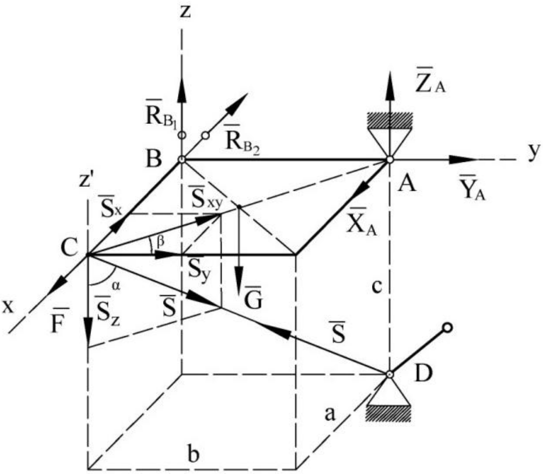


Рис.46. Равновесие полки

Дано:
a = 2 м
b = 6 м
c = 4 м
F = 30 кН
G = 36 кН

Найти:
R_{B_1} ; R_{B_2}-?
Z_A ; Y_A -?
X_A; S - ?

Решение:

Рассмотрим равновесие плиты под действием активных сил $\bar{F}$ и $\bar{G}$ и сил реакций связи: $\bar{S}$; $\bar{R}_{B_1}$; $\bar{R}_{B_2}$; $\bar{Z}_A$; $\bar{X}_A$; $\bar{Y}_A$.

Заменим усилие стержня-подпорки $\bar{S}$ системой сил $\bar{S}_x$; $\bar{S}_y$; $\bar{S}_z$, параллельных осям x; y; z.

$$\bar{S} = \bar{S}_x + \bar{S}_y + \bar{S}_z$$

$$\bar{S} = \bar{S}_z + \bar{S}_{xy} \qquad \bar{S}_{xy} = \bar{S}_x + \bar{S}_y$$

$$S_z = S \cdot cos\alpha \qquad S_x = S_{xy} \cdot sin\beta = Ssin\alpha sin\beta$$

$$S_{xy} = S \cdot sin\alpha \qquad S_y = S_{xy} \cdot cos\beta = Ssin\alpha cos\beta$$

Определим синусы и косинусы углов α и β

$sin\alpha = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ $sin\alpha = 0{,}85$

$cos\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ $cos\alpha = 0{,}54$

$sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $sin\beta = 0{,}32$

$cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $cos\beta = 0{,}95$

Запишем основную форму условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\begin{cases} \sum F_{k_x} = 0 \\ \sum F_{k_y} = 0 \\ \sum F_{k_z} = 0 \\ \sum m_x(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_y(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{cases}$$

Составим уравнения проекций всех сил системы на оси координат:

x: $F - Ssin\alpha sin\beta - R_{B_2} + X_A = 0$

y: $Y_A + Ssin\alpha cos\beta = 0$

z: $-Scos\alpha - G + R_{B_1} + Z_A = 0$

Составим уравнения моментов всех сил системы относительно координатных осей, применяя правило определения моментов силы относительно оси.

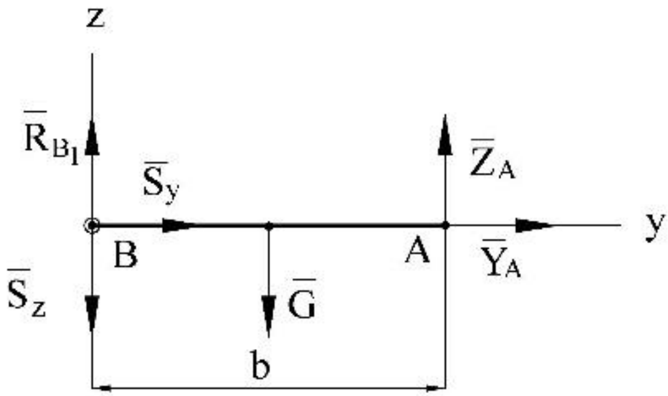


Рис.47. Определение момента системы сил относительно оси *x*

$$\sum m_x(\bar{F}_k):-G\cdot\frac{b}{2}+Z_A\cdot b=0$$

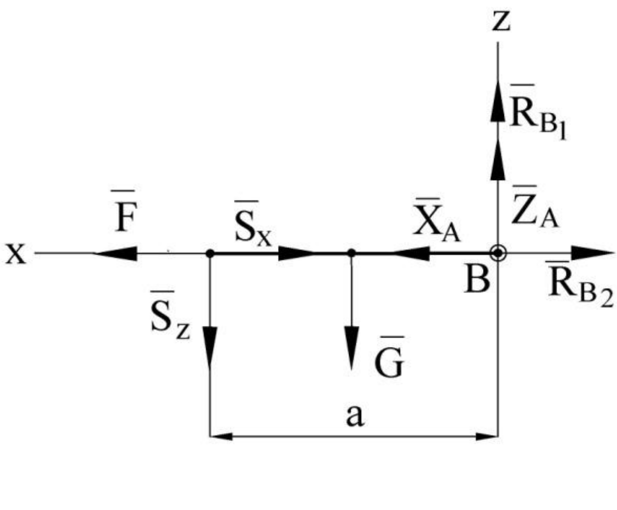


Рис. 48. Определение момента системы сил относительно оси

$$\sum m_y(\bar{F}_k): G\cdot\frac{a}{2}+Scos\alpha\cdot a=0$$

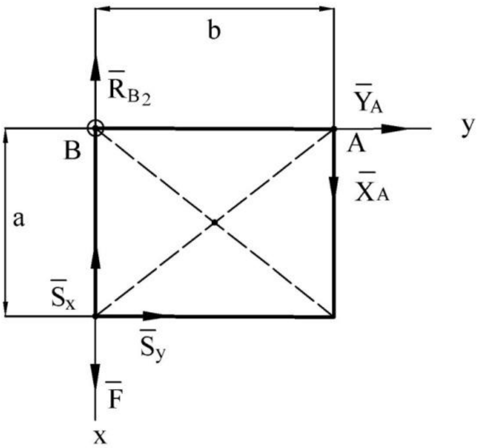


Рис. 49. Определение момента системы сил относительно оси z

$$\sum m_z(\bar{F}_k):\ -X_A \cdot b + Ssin\alpha cos\beta \cdot a = 0$$

Решая систему из шести уравнений с шестью неизвестными, определим реакции в опорах:

$$\begin{cases} F - Ssin\alpha sin\beta - R_{B_2} + X_A = 0 \\ Y_A + Ssin\alpha cos\beta = 0 \\ -Scos\alpha - G + R_{B_1} + Z_A = 0 \\ -G \cdot \dfrac{b}{2} + Z_A \cdot b = 0 \\ G \cdot \dfrac{a}{2} + Scos\alpha \cdot a = 0 \\ -X_A \cdot b + Ssin\alpha cos\beta \cdot a = 0 \end{cases}$$

$$S = \frac{G \cdot \frac{a}{2}}{a \cdot cos\alpha} = -\frac{G}{2cos\alpha} \qquad S = -33{,}65\ \text{кН}$$

$$X_A = \frac{Ssin\alpha cos\beta \cdot a}{b} \qquad X_A = -8{,}99\ \text{кН}$$

$$Z_A = -\frac{G \cdot \frac{b}{2}}{b} = -\frac{G}{2} \qquad Z_A = -18\ \text{кН}$$

$$R_{B_1} = Scos\alpha + G - Z_A \qquad R_{B_1} = 36\ \text{кН}$$

$R_{B_2} = F - Ssin\alpha sin\beta + X_A$ $\qquad$ $R_{B_2} = 29{,}99$ кН

$Y_A = -Ssin\alpha cos\beta$ $\qquad$ $Y_A = 26{,}98$ кН

Выполним проверку, составим уравнение суммы моментов системы сил относительно оси z′:

Проверка: $\sum m_{z\prime}(\bar{F}_k) = 0$

$$\sum m_{z\prime}(\bar{F}_k): -X_A \cdot b - Y_A \cdot a = 8{,}99 \cdot 6 - 26{,}98 \cdot 2 = 0$$

Задача решена верно.

Знак «−» у найденных реакций в опорах означает, что вектор, определяющий соответствующую реакцию связи, направлен в противоположную сторону.

Ответ: $S = -33{,}65$ кН

$Y_A = 26{,}98$ кН

$R_{B_2} = 29{,}99$ кН

$R_{B_1} = 36$ кН

$Z_A = -18$ кН

$X_A = -8{,}99$ кН

Заключение

Данная работа включает в себя задачи по основным темам раздела «Статика». В связи с сократившимся количеством аудиторных часов согласно учебным планам, составленным соответственно требованиям Федерального образовательного стандарта высшего образования, за короткий промежуток времени необходимо проработать достаточно большой объем материала. Эта задача решаема, главным образом, за счет увеличившегося количества часов самостоятельной работы студентов. Поэтому предлагаемое учебное пособие вполне может быть использовано в качестве источника для индивидуальных расчетно-графических заданий. Автор постарался лаконично и в максимально доступной форме изложить теоретический материал и продемонстрировать на примерах методику решения типовых задач по соответствующим темам.

Предлагаемое учебное пособие, по замыслу автора, является началом трилогии по теоретической механике, согласно разделам «Статика», «Кинематика», «Динамика». Такая преемственность работ, позволит студентам, привыкнув к стилю и манере подачи материала автором, освоить и другие разделы дисциплины, работая уже согласно выработанному алгоритму.

Приложения

Приложение 1

Требования к оформлению расчетно-графических заданий (РГЗ)

Расчетно–графическое задание включает в себя несколько задач. По мере изучения материала студенты получаю индивидуальные задания в виде задач по соответствующей теме.

К каждой задаче дается несколько рисунков и таблица с вариантами исходных данных. Студент по номеру своего варианта выбирает номер рисунка и исходные данные задачи. Задачи выполняют на листах формата А4. Титульный лист оформляют, в соответствии с прил. 2. На второй странице приводит условие задачи, рисунок к ней, расчетную схему, а затем решение. Решение задачи сопровождают краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяет, откуда получает те или иные результаты и т.п.). Все решение выполняют в общем виде, а числовые значения величин подставляют только в конечную формулу, производят расчет и получают результат, определяющий искомую величину.

Текстовую часть и рисунки предпочтительно выполнять на компьютере: текст - в текстовом редакторе шрифтом Times New Roman 14пт, межстрочный интервал – одинарный, формулы и вычисления - в редакторе формул, а рисунки - в любом графическом редакторе (AutoCAD, Компас-3D и т.д.). Рисунки должны соответствовать требованиям ЕСКД. Образцы оформления задач можно взять из соответствующих примеров в тексте пособия.

Приложение 2

Титульный лист расчетно-графического задания

Министерство образования и науки
Российской федерации
Белгородский государственный университет им. В.Г. Шухова

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

Расчетно-графическое задание – 1

Задача С – 1
«Определение реакций опор твердого тела»

выполнил:
студент гр. С -11
Семенов С.С.
проверил:
доцент
Сергеев И.П.

Белгород – 2017

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов /С.М. Тарг. — изд. 20-е, стер. — М.: Высш. шк., 2010. — 416 с.

2. *Мещерский, И.В.* Задачи по теоретической механике: учеб. пособ. / И.В. Мещерский. – изд. 48-е, стер. – СПб.: изд-во "Лань", 2008. – 448 с.

3. *Яблонский, А.А.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др.; под ред. А.А. Яблонского. – 13-е изд., стер. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 384 с.

4. *Воробьев, Н.Д.* Сборник расчетно-графических заданий по теоретической механике с примерами выполнения: учеб. пособие для студентов всех направлений бакалавриата/ Н.Д. Воробьев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2009. – 274 с.

5. *Бать, М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика: учеб. пособие/ М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. - СПб.: "Лань", 2013. – 672 с.

6. *Колмыкова, И.В.* Лекции по теоретической механике. Статика: учеб. пособие для студентов направления 15.03.02 – Технологические машины и оборудование, специальности 15.05.01 – Проектирование технологических машин и комплексов/ И.В. Колмыкова. – Электрон.текстовые данные. - Белгород: Изд-во БГТУ, 2016. – Режим доступа: https://elib.bstu.ru/Reader/Book/2016060215290706700000653719

7. *Диевский. В.А.* Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие.- С-П.: Изд-во «Лань», 2009 – 192 с.

8. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика. под ред. А.И. Кириллова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Теоретическая механика
Статика
Сборник заданий

Колмыкова Ирина Владимировна

Подписано в печать 07. 08. 17. Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 5.8. Уч. - изд. л. 6,3.
Тираж 400 экз. Заказ Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46