

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

И.В. Колмыкова

**Теоретическая механика
Кинематика
Сборник заданий**

**Белгород
2019**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

И.В. Колмыкова

Теоретическая механика
Кинематика
Сборник заданий

*Утверждено ученым советом университета
в качестве учебного пособия для студентов всех
технических специальностей и направлений бакалавриата*

Белгород
2019

УДК 531(07)

ББК 22.2я7

К60

Рецензенты:

Кандидат технических наук ведущий инженер-проектировщик ООО
«ПСК«БелЭнергоСтрой» *А.С. Горшков*

Кандидат технических наук, доцент Белгородского государственного
технологического университета им. В.Г. Шухова *Т.Г. Калачук*

Колмыкова, И. В.

к60 Теоретическая механика. Кинематика. Сборник заданий:
учебное пособие/ И. В. Колмыкова. – Белгород: Изд-во
БГТУ, 2019. – 87 с.

В данном учебном пособии представлены задачи по основным темам раздела «Кинематика». Задачи предваряются кратким изложением материала по соответствующей теме и сопровождаются примерами решений. Для каждого из типов задач предложены тридцать вариантов заданий для индивидуальной работы студентов.

Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта высшего образования и может быть использовано для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки специалитета и бакалавриата технического ВУЗа при выполнении расчетно-графических и индивидуальных домашних заданий.

Данное издание публикуется в авторской редакции.

УДК 531(07)

ББК 22.2я7

© Белгородский государственный
технологический университет
(БГТУ) им. В.Г. Шухова, 2019

Введение

Теоретическая механика - одна из фундаментальных естественнонаучных дисциплин физико-математического цикла. Она представляет собой одну из научных основ современных технических дисциплин. На основных законах теоретической механики базируются многие общетехнические и специальные дисциплины, такие как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин и подъемно-транспортные устройства, гидравлика и гидравлические машины, тракторы и автомобили, сельскохозяйственные машины и многие другие. Изучение теоретической механики дает также тот минимум фундаментальных знаний, на основе которых будущий специалист сможет самостоятельно овладеть новой информацией, с которой ему придется столкнуться в производственной и научной деятельности.

Залогом успешного освоения дисциплины является не только тщательное изучение и проработка теоретического материала, но и приобретение уверенных, отработанных до автоматизма навыков решения типовых задач. Работа студентов на практических занятиях, самостоятельная работа при выполнении расчетно-графических заданий (РГЗ), индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) способствуют формированию умений и навыков решения задач по данному курсу.

Раздел теоретической механики «Кинематика» предшествует, изучению другого более сложного раздела «Динамика». Не имея опыта расчета кинематических характеристик, невозможно выполнить динамический расчет движения точки или механической системы. Для освоения материала необходимы прочные знания основ векторной алгебры и отточенные навыки владения математическим аппаратом.

Настоящее пособие предназначено для оказания помощи студентам в подготовке к практическим занятиям и выполнении расчетно-графических заданий по разделу «Кинематика». В пособии приведены некоторые вопросы теории, необходимые для решения задач, а также алгоритмы, методика и примеры решения всех типов задач, включенных в РГЗ.

Данный раздел изложен по принципу «от простого к сложному» и состоит из четырех тем: «Кинематика точки», «Кинематика твердого тела», «Плоскопараллельное движение твердого тела», «Сложное движение точки». Для каждой из тем представлены задачи в 30 вариантах для индивидуальной работы студентов.

Каждую задачу студенты выполняют и защищают отдельно по мере изложения соответствующей темы на лекциях и проработки ее на практических занятиях. Порядок оформления работ и образец титульного листа представлены в прил. 1 и прил. 2 – соответственно.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Предмет и задачи кинематики

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел, т.е. движение тел без учета их инертности (массы) и действующих сил.

Под движением в механике понимают *механическое движение*, т.е. изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам. С этими «другими» телами жестко связывают какую-либо систему координат, которая вместе с телом образует систему отсчета и по отношению к этой системе определяют положение тела, устанавливают прибор для учета времени. Если координаты всех точек тела остаются все время постоянными, то тело в этой системе отсчета находится в покое. Если же координаты всех или некоторых точек тела изменяются с течением времени, то тело в этой системе отсчета находится в движении. Покой или движение тел определяется только относительно выбранной системы отсчета. Например, человек, стоящий на палубе движущегося парохода, находится в покое по отношению к пароходу и соответственно к системе отсчета с ним связанной. Но тот же человек находится в движении по отношению к берегу и системе координат, связанной с берегом. Таким образом, понятия «движение» и «покой» являются относительными и имеют смысл только тогда, когда указана система отсчета, относительно которой рассматривается положение тела. Выбор системы отсчета в кинематике произволен и определяется целью исследования. Все кинематические зависимости, полученные при изучении движения в какой-нибудь одной системе отсчета, будут справедливы и в другой системе отсчета.

Движение тел в пространстве совершается с течением времени. Пространство в механике рассматриваем, как трехмерное евклидово. Все измерения в нем производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается 1м. Время в механике считается универсальным, т.е. протекающим одинаково во всех рассматриваемых системах отсчета. За единицу времени принимается 1с.

Для решения задач кинематики изучаемое движение должно быть как-то задано (описано).

Положение тела относительно данной системы отсчета определяется соответствующими координатами, а движение (или закон движения) - уравнениями, выражающими эти координаты, как функции времени.

Кинематически задать движение тела - значит задать положение этого тела относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики. Поэтому изучение движения любого объекта начинают с установления способов задания этого движения.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы по заданному закону (уравнениям) движения тела, установить методы определения кинематических величин, характеризующих движение как тела в целом, так и каждой его точки в отдельности.

Изучение кинематики начинают с изучения движения простейшего объекта - точки (кинематика точки), а затем переходят к изучению кинематики твердого тела, представляющего собой совокупность (систему) точек.

Основные понятия

Способы задания движения точки

Траектория движения точки - это непрерывная линия, описываемая движущейся точкой относительно данной системы отсчета.

Задать движение точки, значит указать такой способ, при помощи которого можно определить положение точки в выбранной системе отсчета в любой момент времени. Известно несколько способов задания движения, основными из которых являются: векторный, естественный и координатный способы.

Векторный способ удобен для установления общих зависимостей, его чаще применяют при теоретических исследованиях. Естественный и координатный способы удобны для практического решения задач.

При векторном способе положение точки M в выбранной системе отсчета $Oxuz$ можно определить, задав радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат точки O в точку M (рис. 1).

Вектор $\vec{r}$ при движении точки M изменяется с течением времени и по модулю, и по направлению, т.е. является переменным вектором, зависящим от аргумента t .

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1)$$

Уравнение (1) является законом движения точки в векторной форме, т.к. позволяет в любой момент времени построить вектор $\vec{r}$ и найти положение точки M .

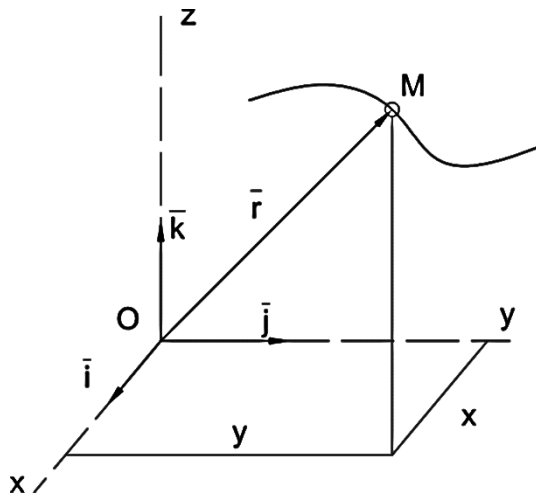


Рис. 1. Векторный и координатный способы задания движения точки

При координатном способе положение точки M в системе отсчета $Oxyz$ определяют ее декартовыми координатами x, y, z (рис. 1). При движении точки M эти координаты с течением времени изменяются. Чтобы определить положение точки в любой момент времени, нужно знать значения координат для каждого момента времени, т.е. иметь зависимости

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (2)$$

Уравнения (2) являются уравнениями движения точки в декартовых координатах, они и определяют закон движения точки при координатном способе задания движения.

Связь между векторным и координатным способами задания движения определяется зависимостью (3)

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (3)$$

где $x = r_x$, $y = r_y$, $z = r_z$ – координаты точки, равные проекциям радиус-вектора $\vec{r}$ на координатные оси $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы осей координат (рис. 1). Уравнение (3) позволяет при необходимости перейти от векторного способа к координатному, и наоборот.

Естественным (или натуральным, или траекторным) способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда заранее известна траектория точки, или когда ее легко определить из условия задачи.

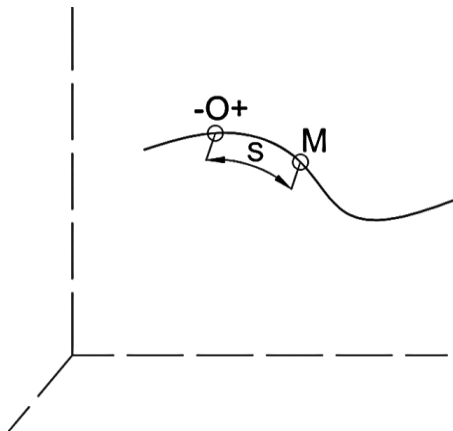


Рис. 2. Естественный способ задания движения

Принимая эту траекторию за криволинейную координатную ось, выбирают на ней начало отсчета (точка O) и указывают положительное и отрицательное направления отсчета (рис.2). Положение точки M на траектории будет однозначно определяться криволинейной (дуговой) координатой S , равной расстоянию от точки O до точки M , измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точки M ее положение и координата S будут с течением времени изменяться. Чтобы определить ее положение на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость

$$S = f(t). \quad (4)$$

Уравнение (4) выражает закон движения точки вдоль траектории.

Итак, чтобы задать движение точки естественным способом нужно задать:

- 1) *траекторию* точки;
- 2) *начало отсчета* на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета;
- 3) *закон движения* точки вдоль траектории в виде $S = f(t)$.

Следует иметь в виду, что величина S в уравнении (4) определяет положение движущейся точки, а не пройденный ею путь, т.е. S - это криволинейная координата, соответствующая длине дуги OM .

Связь между координатным и естественным способами задания движения определяется зависимостью (5)

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (5)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ (точка над буквой есть символ дифференцирования по времени).

Скорость точки

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью точки. Скорость при различных способах задания движения точки определяется по-разному.

Векторный способ

Скоростью точки в данный момент времени t называется векторная величина $\vec{V}$, равная первой производной от радиус-вектора точки по времени.

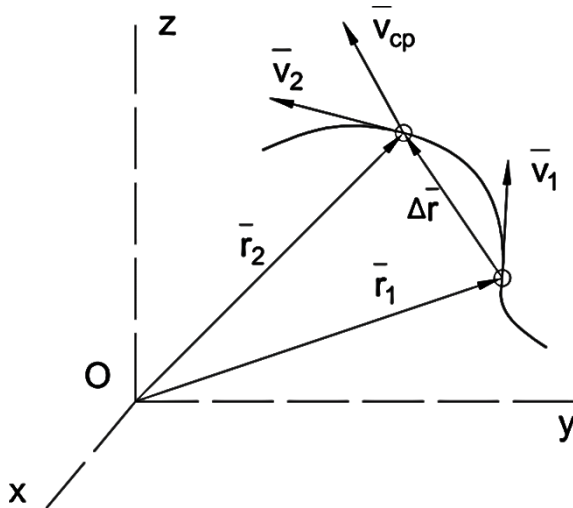


Рис.3. Скорость точки при векторном способе задания движения.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (6)$$

Вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения (рис.3).

Координатный способ

Если движение точки задано уравнениями (2), то скорость определяется через ее проекции на оси координат (рис. 4).

Учитывая, что $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ и принимая во внимание выражение (3), получим

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}, \quad (7)$$

где $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$.

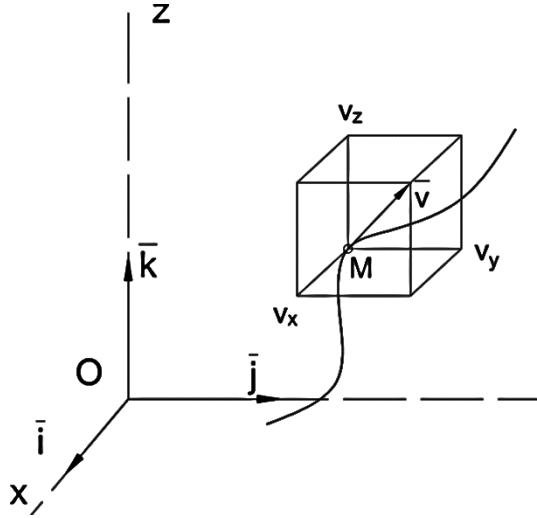


Рис.4.Скорость точки при координатном способе задания движения.

Модуль полной скорости V и ее направление в декартовых координатах определяют по формулам

$$\begin{cases} V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \\ \cos \alpha = \frac{V_x}{V}, \cos \beta = \frac{V_y}{V}, \cos \gamma = \frac{V_z}{V}, \end{cases} \quad (8)$$

где α, β, γ - углы между вектором скорости $\vec{V}$ и соответствующими осями координат.

Естественный способ

Модуль скорости точки в данный момент времени равен первой производной от дуговой координаты по времени

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \quad (9)$$

Направлен вектор $\vec{V}$ по касательной к траектории движения точки (рис. 5).

Если величина $V > 0$, то вектор скорости $\vec{V}$ направлен в положительном направлении отсчета дуговой координаты S , если $V < 0$, то в отрицательном.

При криволинейном движении вектор скорости $\vec{V}$ направлен по касательной к траектории в направлении движения точки, при прямолинейном движении – вдоль траектории в направлении движения точки.

Единицей измерения скорости является 1 м/с.

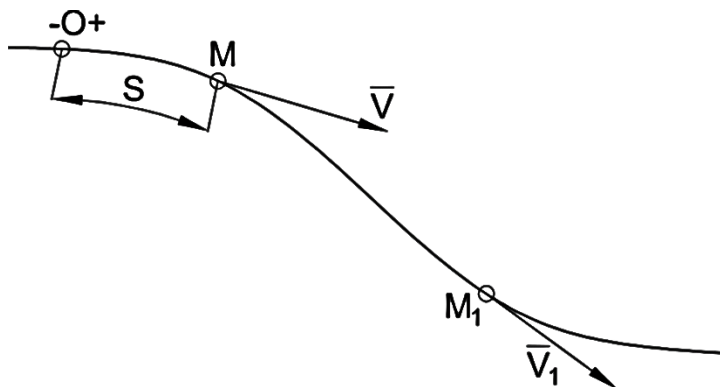


Рис. 5. Скорость точки при естественном способе задания движения.

Ускорение точки

Ускорением точки называется векторная величина $\vec{a}$, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления вектора скорости $\vec{V}$.

Векторный способ.

Вектор ускорения точки определяется равенством

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (10)$$

В литературе ускорение $\vec{a}$ может выражено в виде равенства

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}},$$

что абсолютно идентично равенству (10).

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора.

Единицей измерения ускорения является 1 м/с^2 .

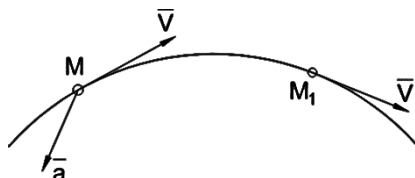


Рис. 6. Вектор ускорения точки, движущейся вдоль плоской кривой.

Если траекторией точки является прямая, то вектор $\vec{a}$ направлен вдоль этой прямой. Если траекторией точки является плоская кривая (рис. 6.), то вектор $\vec{a}$ лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. Если точка движется вдоль пространственной кривой (рис. 7), то вектор $\vec{a}$ так же направлен в сторону ее вогнутости и лежит в соприкасающейся плоскости. Последняя представляет собой предельное положение плоскости, проходящей через касательную в точке M и прямую, параллельную касательной в точке M_1 , когда точка M_1 стремится к точке M .

Координатный способ

Ускорение точки определяют через его проекции на координатные оси (рис. 7) по формулам

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (11)$$

Иногда в литературе можно встретить следующие обозначения, аналогичные равенству (11)

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}.$$

Модуль и направление ускорения определяют из выражений

$$\begin{cases} a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \\ \cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ - углы между вектором ускорения и соответствующими осями координат.

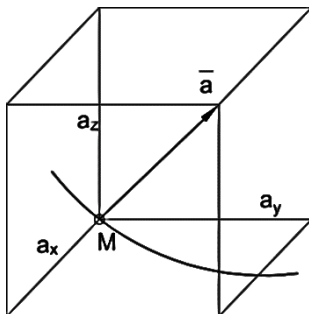


Рис. 7. Вектор ускорения точки при координатном способе задания движения.

Естественный способ

Ускорение точки определяют через его проекции на *естественные* координатные оси. В отличие от декартовых естественные координатные оси – это оси подвижные, начало отсчета этих осей совмещается с движущейся точкой M , а ориентация осей в пространстве

при ее движении непрерывно меняется (рис. 8).

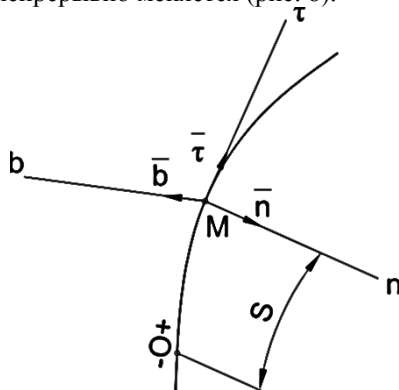


Рис. 8. Естественные оси координат

Направлены оси следующим образом: ось $M\tau$ (касательная) направлена вдоль касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуговой координаты S ; ось Mn (главная нормаль) направлена по главной нормали к центру кривизны кривой в данной точке; ось Mb (бинормаль) - направлена перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку. Оси $M\tau$ и Mn лежат в соприкасающейся плоскости, т.е. плоскости, имеющей с кривой наибольший порядок касания.

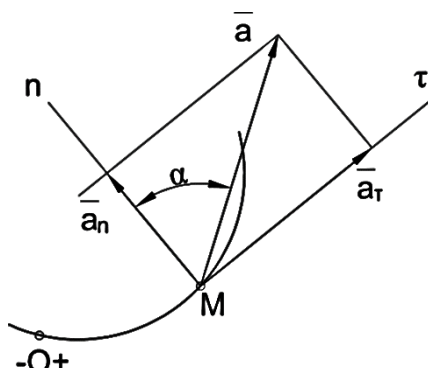


Рис. 9. Ускорение точки при естественном способе задания движения.

Так как ускорение точки $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости Mtn (рис. 9), то проекция вектора $\vec{a}$ на бинормаль равна нулю

($a_b = 0$). Составляющая вектора $\bar{a}$ вдоль касательной, называется *касательным ускорением* ($\bar{a}_\tau$), а вдоль главной нормали - *нормальным ускорением* ($\bar{a}_n$).

Полное ускорение точки $\bar{a}$ определяется по формуле

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = \bar{\tau} \frac{dV}{dt} + \bar{n} \frac{V^2}{\rho}, \quad (13)$$

где ρ - радиус кривизны траектории в точке M .

Модули составляющих ускорения точки по осям естественно-го трехгранника a_τ и a_n соответственно равны

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (14)$$

В некоторых изданиях модуль касательного ускорения a_τ может быть записан следующим образом

$$a_\tau = \dot{V} = \ddot{S}.$$

Таким образом, проекция ускорения точки на касательную a_τ равна первой производной от числового значения скорости или второй производной от криволинейной координаты S по времени. Касательное ускорение a_τ характеризует изменение вектора скорости $\bar{V}$ по модулю. Проекция ускорения на главную нормаль a_n равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точки кривой. Нормальное ускорение a_n характеризует изменение вектора скорости $\bar{V}$ по направлению.

Модуль полного ускорения и угол α его отклонения от нормали определяются формулами

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}, \quad tg \alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n}. \quad (15)$$

Частные случаи движения точки

1. Прямолинейное движение.

При движении точки вдоль прямой радиус кривизны траектории $\rho = \infty$, а модуль скорости $V \neq const$, тогда $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$. Отсюда следует, что *нормальное ускорение существует только при криволинейном движении и характеризует изменение вектора скорости по направлению*.

Полное ускорение точки в этом случае равно только касательному ускорению и определяется равенством

$$a = a_\tau = \frac{dV}{dt}. \quad (16)$$

2. Равномерное криволинейное движение.

При равномерном движении модуль скорости остается всегда постоянным $V = const$, а радиус кривизны траектории $\rho \neq \infty$, поэтому

$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$. Отсюда следует, что касательное ускорение существует только при неравномерном движении и характеризует изменение вектора скорости по модулю.

Полное ускорение точки равно только нормальному ускорению

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (17)$$

Закон равномерного криволинейного движения имеет вид

$$S = S_0 + V \cdot t. \quad (18)$$

3. Равномерное прямолинейное движение.

В этом случае $V = \text{const}$ и $\rho = \infty$, поэтому $a_\tau = a_n = 0$, а значит и $a = 0$. Следует особо отметить, что этот случай движения является единственным, при котором ускорение точки все время равно нулю.

4. Равнопеременное криволинейное движение.

При равнопеременном движении касательное ускорение точки остается все время величиной постоянной: $a_\tau = \text{const}$. Скорость точки будет выражаться как

$$V = V_0 + a_\tau t, \quad (19)$$

а закон движения точки равенством

$$s = s_0 + V_0 \cdot t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \quad (20)$$

В общем случае, когда модуль скорости при движении точки возрастает (при этом V и a_τ имеют одинаковые знаки, т.е. векторы направлены в одну сторону), движение называется *ускоренным* (рис. 10).

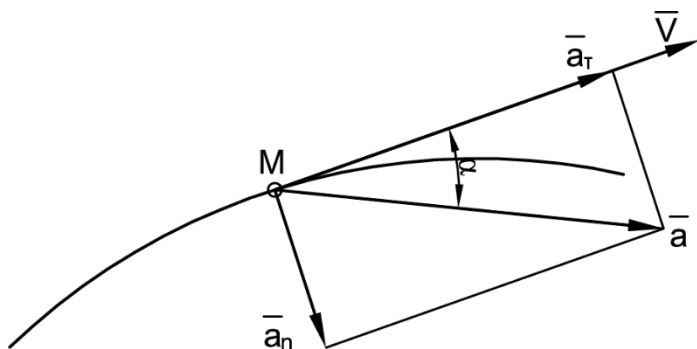


Рис. 10. Ускоренное движение точки.

Если модуль скорости убывает (V и a_t имеют разные знаки, т.е. векторы направлены в разные стороны), движение называется *замедленным* (рис. 11).

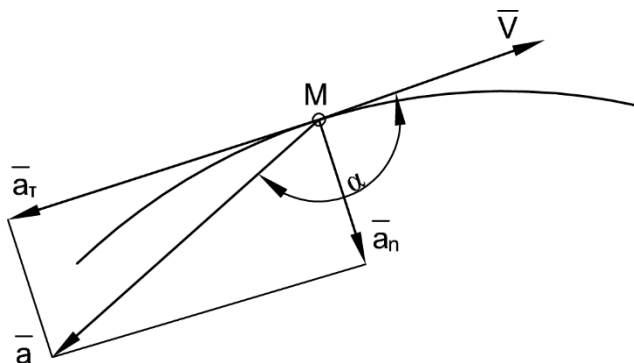


Рис. 11. Замедленное движение точки.

При ускоренном движении точки угол α , образуемый векторами скорости $\vec{V}$ и полного ускорения $\vec{a}$, меньше 90° , при замедленном движении – больше 90° .

При прямолинейном движении точки вектор полного ускорения $\vec{a}$ всегда направлен вдоль траектории движения, а при криволинейном движении – внутрь вогнутости траектории.

Задача К-1

Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения

Исходные данные

По заданным уравнениям движения точки (табл. 1) для указанного момента времени $t = t_1$ определить уравнение траектории движения точки, ее скорость, ускорение, касательную и нормальную составляющие ускорения, радиус кривизны траектории.

Построить траекторию движения точки и векторы кинематических характеристик точки для заданного момента времени.

Таблица 1

Варианты заданий

№ вар.	уравнения движения		$t_1, \text{с}$
	$x = f_1(t), \text{см}$	$y = f_2(t), \text{см}$	
1	$20t^2 + 5$	$15t^2 + 3$	0.25
2	$5 + 3\cos\frac{\pi}{3}t$	$4\sin\frac{\pi}{3}t$	1.0
3	$5t^2$	$3t$	1.0
4	$5\sin\frac{\pi}{2}t$	$4\cos\frac{\pi}{2}t$	0.5
5	$5\cos\frac{\pi}{4}t$	$3 - 5\sin\frac{\pi}{4}t$	1.0
6	$3 + 4\cos\frac{\pi}{3}t$	$2 + 5\sin\frac{\pi}{3}t$	1.0
7	$4\cos^2\frac{\pi}{3}t + 2$	$4\sin^2\frac{\pi}{3}t$	1.0
8	$4t + 4$	$-\frac{4}{t+1}$	2.0
9	$-4\cos\frac{\pi}{3}t$	$-2\sin\frac{\pi}{3}t - 3$	1.0
10	$4\cos\frac{\pi}{3}t$	$-3\sin\frac{\pi}{3}t$	1.0
11	$3t$	$4t^2 + 1$	0.5
12	$-\frac{3}{t+2}$	$3t + 6$	2.0
13	$2\sin\frac{\pi}{3}t$	$-3\cos\frac{\pi}{3}t + 4$	1.0
14	$\frac{4}{t+1}$	$4t + 4$	2.0
15	$3\sin^2\frac{\pi}{3}t$	$3\cos^2\frac{\pi}{3}t + 1$	1.0
16	$1 + 4\sin\frac{\pi}{3}t$	$2 + 3\cos\frac{\pi}{3}t$	1.0

Окончание табл. 1

№ Вар.	Уравнения движения		$t_1, \text{с}$
	$x = f_1(t), \text{см}$	$x = f_2(t), \text{см}$	
17	$2 - 4\sin\frac{\pi}{4}t$	$4\cos\frac{\pi}{4}t$	1.0
18	$3\cos\frac{\pi}{2}t$	$4\sin\frac{\pi}{2}t$	0.5
19	$2t$	$4t^2$	1.0
20	$2\sin\frac{\pi}{3}t$	$5 + 4\cos\frac{\pi}{3}t$	1.0
21	$20t^2 + 2$	$15t^2 + 4$	0.25
22	$2t + 4$	$\frac{2}{t + 4}$	2.0
23	$-\sin\frac{\pi}{3}t - 4$	$2\cos\frac{\pi}{3}t$	1.0
24	$3t^2 + 2$	$2t$	0.5
25	$-2\cos\frac{\pi}{3}t + 2$	$4\sin\frac{\pi}{3}t$	1.0
26	$\cos\frac{\pi}{6}t^2 + 8$	$5\sin\frac{\pi}{6}t^2$	2.0
27	$3t + 3$	$-\frac{3}{t + 1}$	2.0
28	$4\cos^2\frac{\pi}{3}t + 3$	$9\sin^2\frac{\pi}{3}t$	1.0
29	$-2t - 2$	$-\frac{4}{t + 1}$	1.0
30	$9\cos\frac{\pi}{4}t^2$	$9\sin\frac{\pi}{4}t^2$	1.0

Пример 1

По заданным уравнениям движения точки M определить ее кинематические характеристики для момента времени $t = t_1$. Построить траекторию движения точки, векторы скорости и ускорения.

Дано:

$$x = 4t+4 \text{ м}$$

$$y = -\frac{4}{t+1} \text{ м}$$

$$t = t_1 = 2 \text{ с}$$

Найти:

уравнение траектории

$$\vec{V}, \vec{a}, \vec{a}_\tau, \vec{a}_n, \rho - ?$$

x	-1	1
y	16	-16

Решение:

Выразим время t из первого уравнения:

$$t = \frac{4-x}{4}$$

Полученное выражение t подстав-
ляем во второе:

$$y = -\frac{16}{x} - \text{уравнение гиперболы.}$$

Задавая параметр x , определя-
ем y для построения траектории
точки.

Найдем положение $(\cdot) M_0$ в начальный момент времени $t = t_0 = 0$
 $x = 4; y = -4$.

Найдем положение $(\cdot) M$ для заданного момента времени $t = t_1 = 2\text{с}$
 $x = 12; y = -\frac{4}{3}$.

Определим скорость $(\cdot) M$ для заданного момента времени $t = t_1 = 2\text{с}$, предварительно находя проекции вектора скорости на оси координат:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 4 \text{ м/с}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{4}{(t+1)^2} \text{ м/с}$$

$$V_y = \frac{4}{9} = 0,4 \text{ м/с}$$

$$V = \sqrt{4^2 + (0,4)^2} = 4,02 \text{ м/с.}$$

Определим ускорение $(\cdot) M$ для заданного момента времени $t = t_1 = 2\text{с}$ через проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0 \text{ м/с}^2$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{-8t-8}{(t+1)^4} = -0,9 \text{ м/с}^2$$

$$\bar{a} = \bar{a}_y$$

Найдем касательную и нормальную составляющие вектора ускорения

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Определим касательное ускорение $(\cdot) M$ для заданного момента времени $t = t_1 = 2 \text{ с}$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V}$$

$$a_\tau = \frac{-0,36}{4,02} = -0,08 \text{ м/с}^2$$

Нормальное ускорение равно

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{0,8} = 0,89 \text{ м/с}^2$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}$$

Найдем радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}$$

$$\rho = \frac{(4,02)^2}{0,89} = 18,15 \text{ м}$$

Ответ: $V = 4,02 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $a = -0,9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_n = 0,89 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_\tau = -0,08 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $\rho = 18,15 \text{ м}$

По результатам расчетов строим вектор скорости $\bar{V}$. При правильном решении задачи вектор $\bar{V}$ должен лежать на касательной к траектории и быть направлен по ходу движения точки, так точка совершает криволинейное движение.

При криволинейном движении вектор ускорения $\bar{a}$ должен быть направлен внутрь вогнутости траектории, что и получили на рис. 1.

Соотнеся положение вектора $\bar{V}$ и вектора $\bar{a}$, учитывая зависимость $a = f(t)$, делаем вывод: точка совершает криволинейное замедленное движение.

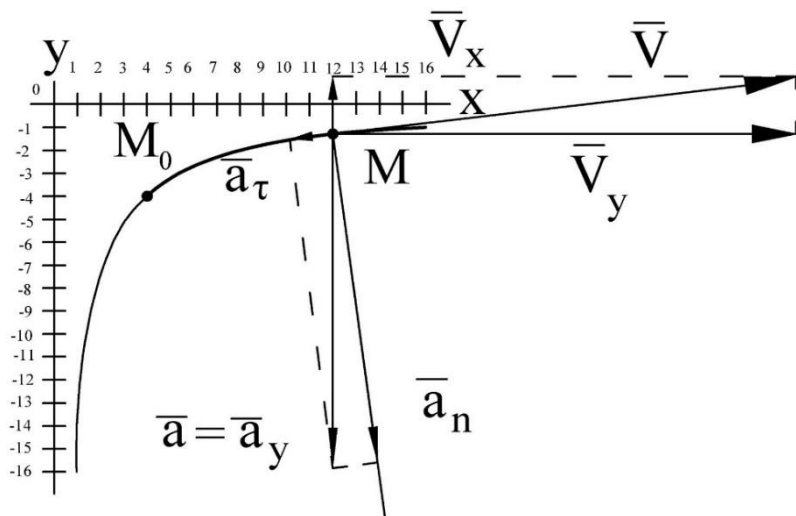


Рис. 12. Построение кинематических характеристик точки.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задачи кинематики твердого тела делят на две части:

- 1) задание движения и изучение кинематических характеристик движения тела в целом;
- 2) изучение кинематических характеристик движения каждой из точек тела в отдельности.

Начнем с рассмотрения простейших движений твердого тела.

Простейшие движения твердого тела. Основные понятия

К простейшим видам движения твердого тела относятся поступательное и вращательное. Рассмотрим некоторые особенности этих видов движения.

Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

Поступательное движение совершают спарник параллелограммного механизма; образующие цилиндра катящегося прямолинейно по горизонтальной плоскости; поршень двигателя внутреннего сгорания; кузов автомобиля на прямолинейном горизонтальном участке дороги и т.д.

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: *при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.*

Из теоремы следует, что для изучения поступательного движения тела необходимо и достаточно описать кинематическими характеристиками движением какой-либо одной его точки.

Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки, рассмотренной выше.

Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси z называется такое движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные) остаются во все время движения неподвижными (рис. 13). Все остальные точки тела описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а их плоскости перпендикулярны к этой оси.

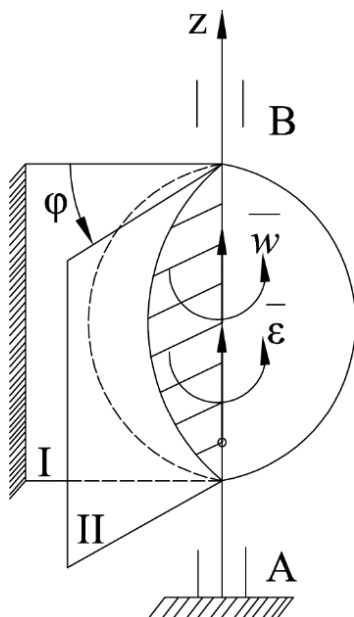


Рис. 13. Кинематические характеристики вращательного движения твердого тела.

Основными характеристиками вращательного движения тела в целом являются:

φ - угол поворота тела (rad),

ω - угловая скорость тела (rad/c)

ε - угловое ускорение тела (rad/c^2).

Закон вращательного движения тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$\varphi = f(t). \quad (21)$$

Угловая скорость тела ω равна

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (22)$$

Равенство (22) может быть записано в виде $\omega = \dot{\varphi}$.

Числовое значение угловой скорости тела ω в данный момент времени равно первой производной от угла поворота φ по времени.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен ω и направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

ки (рис. 13). Этот вектор определяет и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

Угловое ускорение ε характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела ω и определяется равенством

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (23)$$

В литературе равенство (23) может иметь вид $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$.

Числовое значение углового ускорения тела ε в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости ω или второй производной от угла поворота тела φ по времени.

Угловое ускорение тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения, руководствуясь теми же правилами, что и для изображения вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ (рис. 13).

Если модуль угловой скорости ω с течением времени возрастает, вращение тела называется ускоренным, при этом направления векторов угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ совпадают (рис. 13).

Если модуль угловой скорости ω с течением времени убывает, вращение тела называется замедленным, при этом направления векторов угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ противоположны.

Частные случаи вращательного движения твердого тела

1. *Равномерное вращение твердого тела.*

В этом случае угловая скорость с течением времени не изменяется $\omega = \text{const}$. Тогда закон движения твердого тела будет иметь вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (24)$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину n ,

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}.$$

Единицей измерения n является об/мин.

2. *Равнопеременное вращение твердого тела.*

Для данного вида движения во все время движения угловое ускорение остается постоянным $\varepsilon = \text{const}$. В этом случае изменение угловой скорости вращения будет определяться формулой

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (25)$$

а закон вращательного движения будет иметь вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (26)$$

Основными характеристиками движения отдельных точек тела при вращательном движении являются (рис. 14):

V_M - линейная скорость точки M (м/с),

a_M^τ – тангенциальное (касательное) ускорение точки M (м/с^2),
 a_M^n – нормальное (центростремительное) ускорение точки M (м/с^2),
 a – полное ускорение точки M (м/с^2).

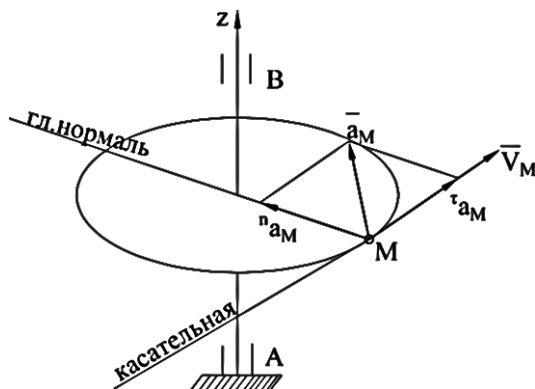


Рис. 14. Скорость и ускорения точки, принадлежащей вращающемуся твердому телу.

Скорость точки M

$$V_M = \omega \cdot h, \quad (27)$$

где $h = OM$ — расстояние от точки M до оси вращения (м).

Нормальное (центростремительное) ускорение точки M

$$a_M^n = \omega^2 \cdot h. \quad (28)$$

Тангенциальное (касательное) ускорение точки M

$$a_M^\tau = \varepsilon \cdot h. \quad (29)$$

Полное ускорение точки M

$$\begin{cases} \bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau \\ a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{cases} \quad (30)$$

Передаточные механизмы

Передаточные механизмы предназначены для передачи вращения от одного вала, называемого ведущим, к другому валу, называемому ведомым. При больших расстояниях между осями применяют передачи с гибкой связью (ременные, фрикционные).

Фрикционная передача движения

В данном случае (рис. 15) передача движения от шкива A к шкиву B осуществляется в точке их соприкосновения. Для фрикционной передачи характерно равенство скоростей точки, являющейся общей для двух шкивов $\bar{V}_A = \bar{V}_B$, т.к. не может точка иметь две разных скорости.

Угловые скорости шкивов обратно пропорциональны радиусам их взаимодействия

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A}.$$

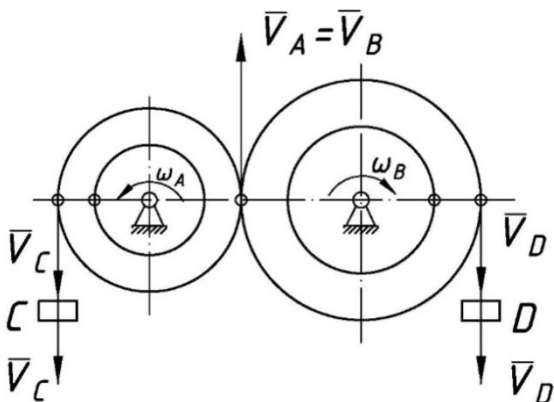


Рис. 15. Схема фрикционной передачи

Ременная передача движения

Движение от шкива A к шкиву B передается за счет поступательного движения точек ремня (рис. 16). Согласно теореме о поступательном движении скорости точек тела равны по модулю и направлению в данный момент времени $\bar{V}_A = \bar{V}_B$.

Соотношение угловых скоростей шкивов и радиусов их взаимодействия определяется обратно пропорциональной зависимостью

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{r_B}{r_A}.$$

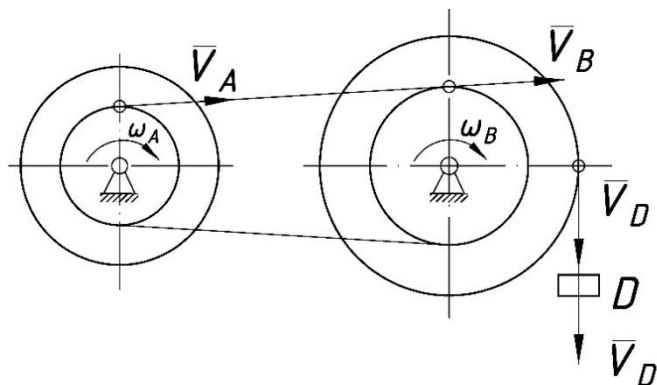


Рис. 16. Схема ременной передачи

Задача К-2

Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движении тела

Исходные данные

Для приведенных ниже схем механизмов (табл. 3) по известным характеристикам движения груза 1 – скорости v_{1x} и ускорению a_{1x} , или по заданному уравнению движения тела 1 – $x(t)$ определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки M , а так же скорость и ускорение груза 1 в данный момент времени $t = t_1$. Определить скорости тел механической системы. Заданные величины, включая радиусы шестерен, шкивов, барабанов, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Варианты заданий

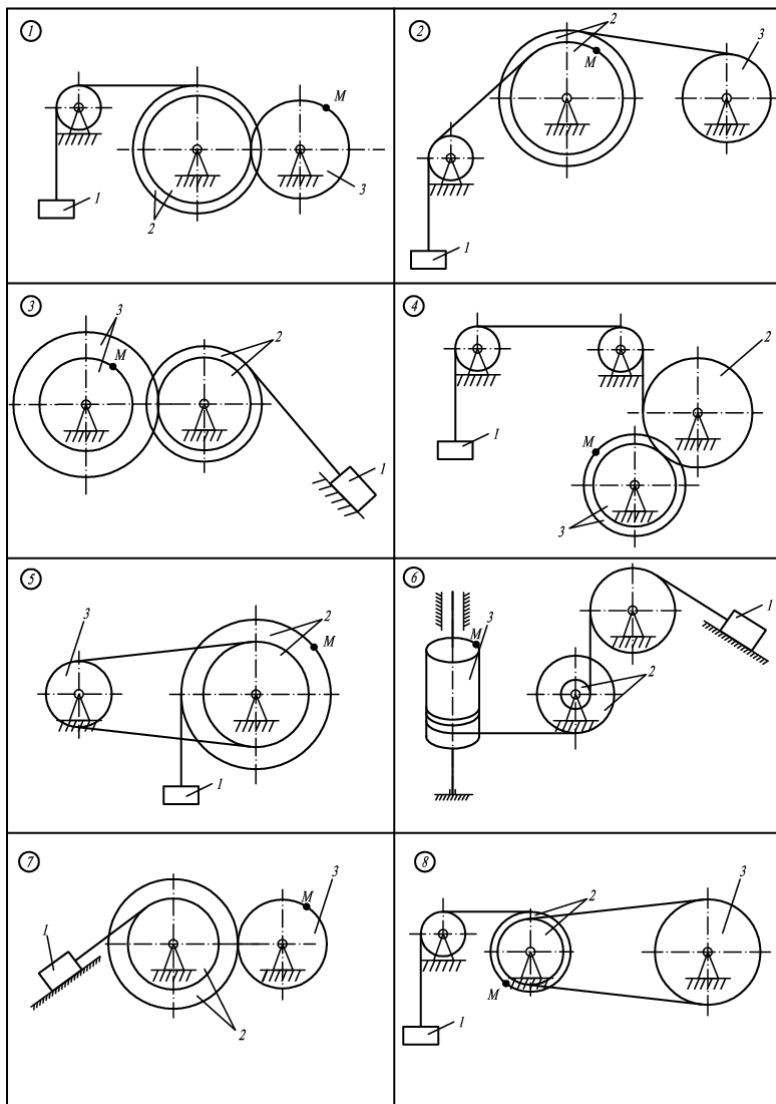
№ вар.	Характеристики или уравнения движения	Радиусы, см				t_1, c
		R_2	r_2	R_3	r_3	
1	2	3	4	5	6	7
1	$v_1 = \frac{0,5M}{c}; a_1 = -\frac{0,7M}{c^2}$	60	45	36	-	-
2	$x_1 = 50t^2 + 75M$	40	25	20	-	1
3	$x = 5t^2M$	20	10	30	10	0,5
4	$v_1 = \frac{0,25M}{c}; a_1 = \frac{0,6M}{c^2}$	80	-	60	45	-
5	$v_1 = 6t^2 + \frac{12M}{c}$	20	15	10	-	2
6	$x_1 = 12,8t^3M$	40	20	100	-	0,25
7	$v_1 = -\frac{0,5M}{c}; a_1 = \frac{1,0M}{c^2}$	100	60	75	-	-
8	$x_1 = 144t^2 + 2t - 12 M$	30	20	40	-	1
9	$x_1 = 42t - 0,6t^3M$	40	30	30	15	5
10	$v_1 = \frac{1,0M}{c}; a_1 = \frac{2,0M}{c^2}$	60	45	60	-	-
11	$v_1 = 8t^2 - 4t + 2\frac{M}{c}$	15	10	15	-	2
12	$x_1 = 42t - 5t^2M$	30	15	40	20	4
13	$v_1 = \frac{0,6M}{c}; a_1 = -\frac{0,9M}{c^2}$	80	-	45	30	-
14	$x_1 = 8t^3 - 4t + 2 M$	15	10	15	-	1
15	$x_1 = 4(1 + e^{-0,8t}) M$	50	20	60	-	1
16	$v_1 = \frac{1,5M}{c}; a_1 = \frac{4,5M}{c^2}$	100	60	30	-	-

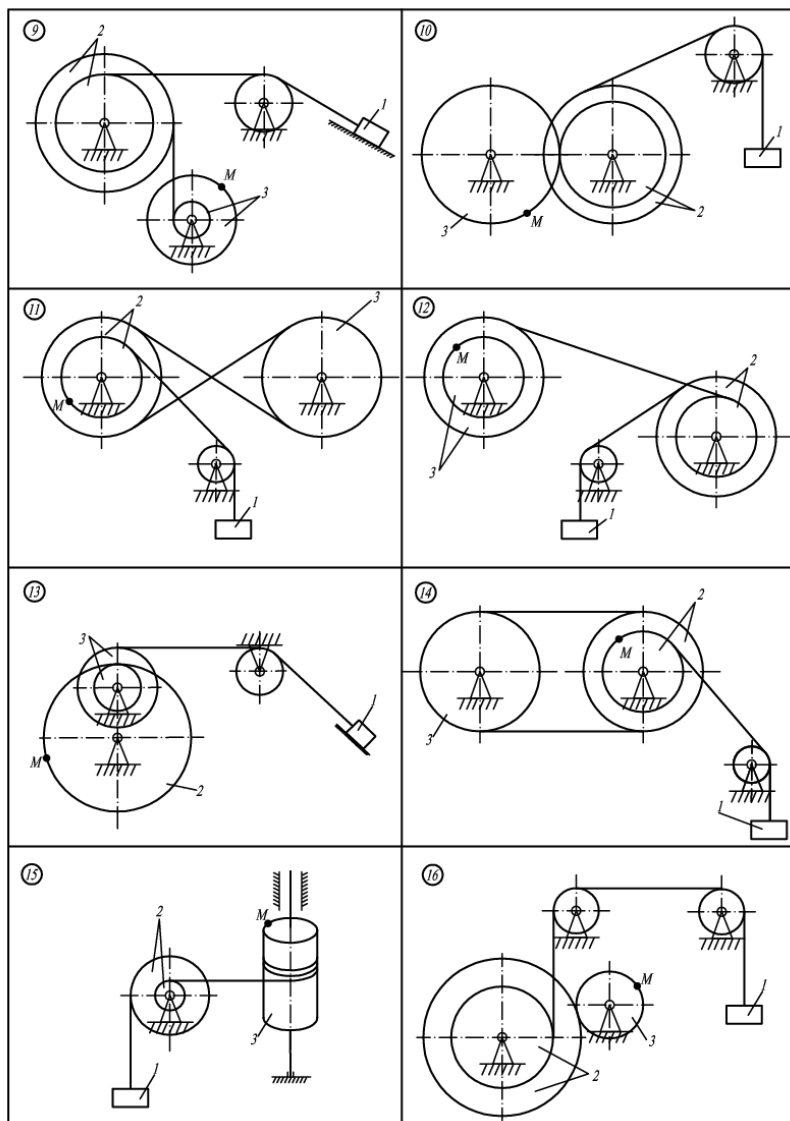
Окончание табл. 2

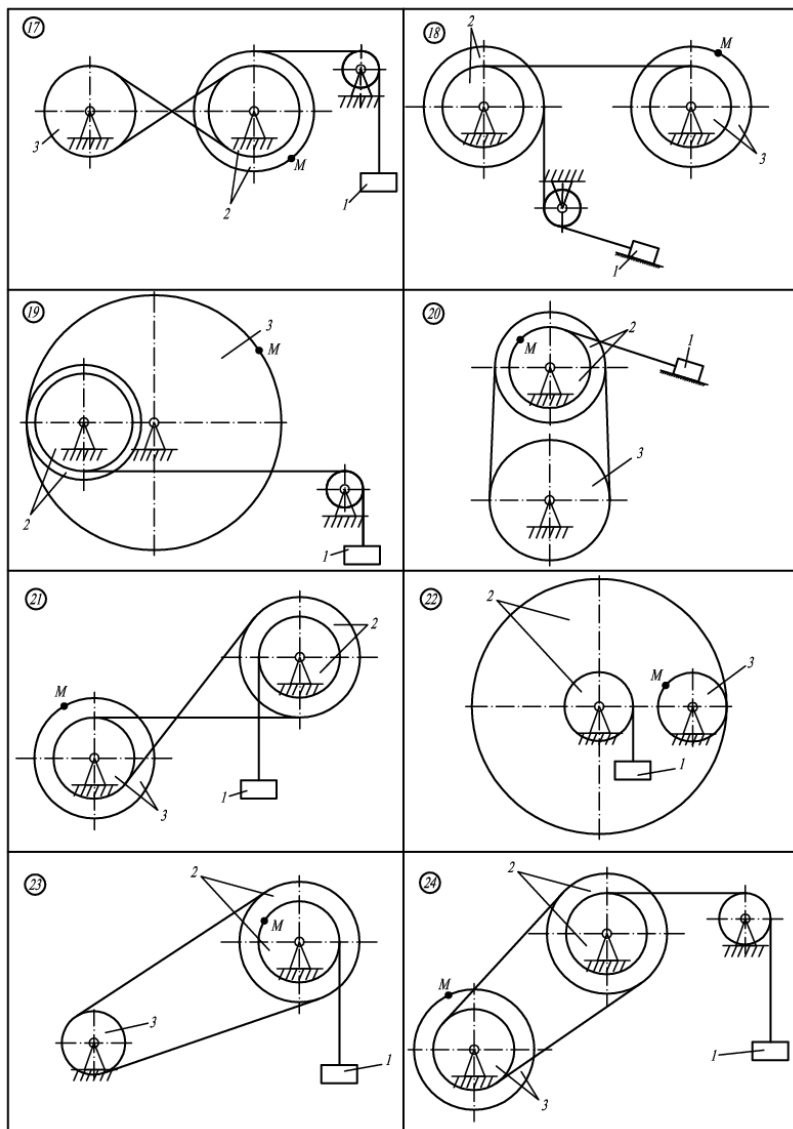
1	2	3	4	5	6	7
17	$v_1 = 60t^4 \frac{\text{М}}{\text{с}}$	20	15	15	-	1
18	$x_1 = 5t - 0,5t^3 \text{ М}$	32	16	32	16	2
19	$v_{1x} = \frac{0,4\text{М}}{\text{с}}; a_1 = \frac{0,4\text{М}}{\text{с}^2}$	45	35	105	-	-
20	$x_1 = 16t^2 - 3t + 1 \text{ м}$	15	10	20	-	2
21	$x_1 = 5t - 15 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \text{ М}$	40	18	40	18	2
22	$v_1 = \frac{0,8\text{М}}{\text{с}}; a_1 = \frac{12,8\text{М}}{\text{с}^2}$	35	10	10	-	-
23	$v_{1x} = 8t^3 - 2 \frac{\text{М}}{\text{с}}$	20	15	10	-	1
24	$x_1 = 0,5[1 - \cos(\pi t)] \text{ М}$	40	20	40	15	1/6
25	$v_{1x} = \frac{0,8\text{М}}{\text{с}}; a_{1x} = \frac{4,8\text{М}}{\text{с}^2}$	40	30	15	-	-
26	$v_{1x} = 10t^2 + 6 \frac{\text{М}}{\text{с}}$	15	10	20	-	1
27	$x_1 = 22t - 5t^2 \text{ М}$	25	20	50	25	2
28	$v_{1x} = \frac{0,7\text{М}}{\text{с}}; a_{1x} = -\frac{4,9\text{М}}{\text{с}^2}$	15	-	40	35	-
29	$x_1 = 2t + 5 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) t \text{ м}$	25	15	10	-	1
30	$x_1 = 4t - 0,6e^{5t} \text{ М}$	30	15	20	-	0,1

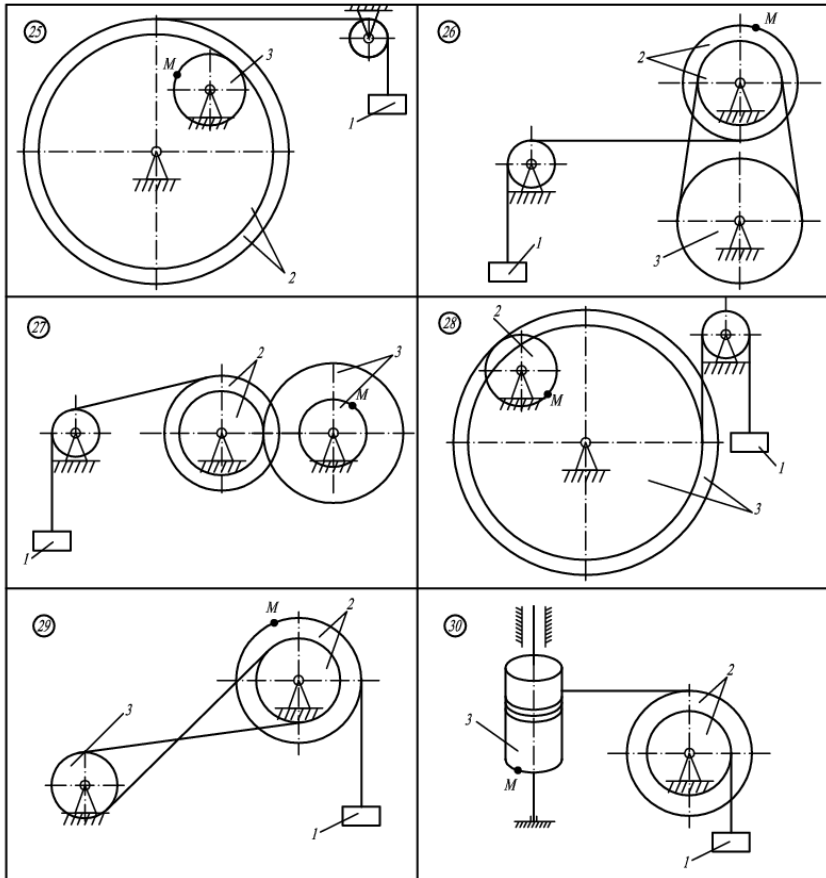
Таблица 3

Варианты заданий









Пример 2

По заданному уравнению движения вала 3 – $\varphi_3(t)$ определить и показать на рисунке (рис. 17) скорость и ускорение точки M, а также скорость и ускорение груза 1 в заданный момент времени t_1 .

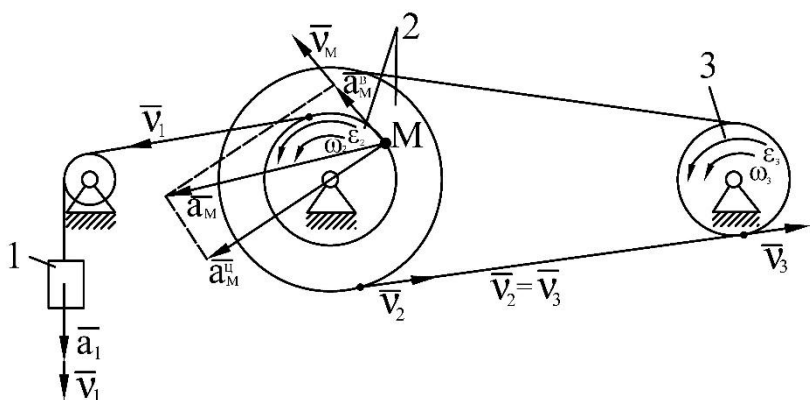


Рис. 17. Ременная передача

Дано:

$$t = t_1 = 1 \text{ с}$$

$$\varphi_3 = 3 \cdot t^2 + 5 \text{ рад}$$

$$R_2 = 40 \text{ см}$$

$$r_2 = 25 \text{ см}$$

$$R_3 = 20 \text{ см}$$

Найти: $\vec{V}_M, \vec{V}_1, \vec{a}_M, \vec{a}_1$ —?

Решение:

1) Определяем угловую скорость вала 3

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d}{dt} (3 \cdot t^2 + 5) = 6t \text{ рад/с}$$

2) Скорости точек ремня, одновременно принадлежащих валу 3 и 2, равны

$$V_3 = \omega_3 \cdot R_3$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2$$

$$V_3 = V_2$$

$$\omega_3 \cdot R_3 = \omega_2 \cdot R_2$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_3 \cdot R_3}{R_2}$$

$$3) \quad V_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

$$V_1 = \frac{\omega_3 \cdot R_3}{R_2} \cdot r_2$$

$$4) \quad V_1 = \frac{6t \cdot 20}{40} \cdot 25 = 75 \text{ см/с}$$

$$V_1 = V_M$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (3 \cdot t^2 + 5) = 6 \text{ рад/с}^2$$

Ускорение точек ремня, одновременно принадлежащих валу 3 и 2, равны

$$1) \quad a_3 = \varepsilon_3 \cdot R_3$$

$$2) \quad \overline{a}_3 = \overline{a}_2$$

$$a_3 = a_2$$

$$\varepsilon_3 \cdot R_3 = \varepsilon_2 \cdot R_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_3 \cdot R_3}{R_2}$$

$$3) \quad a_1 = \varepsilon_2 \cdot r_2$$

$$a_1 = \frac{\varepsilon_3 \cdot R_3}{R_2} \cdot r_2$$

$$a_1 = \frac{6 \cdot 20}{40} \cdot 25 = 75 \text{ см/с}^2$$

Находим ускорение точки M :

$$\overline{a}_M = \overline{a}_M^u + \overline{a}_M^B$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^B)^2 + (a_M^u)^2}$$

$$a_M^B = \varepsilon_2 \cdot r_2$$

$$a_M^u = \omega_2^2 \cdot r_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{6t \cdot 20}{40} \right) = \frac{6 \cdot 20}{40} = 3 \text{ рад/с}^2$$

$$a_M^B = 3 \cdot 25 = 75 \text{ см/с}^2$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_3 \cdot R_3}{R_2}$$

$$\omega_2 = \frac{6t \cdot 20}{40} = 3 \text{ рад/с}$$

$$a_M^u = 3^2 \cdot 25 = 225 \text{ см/с}^2$$

$$a_M = \sqrt{(75)^2 + (225)^2} = 237,17 \text{ см/с}^2$$

$$\text{Ответ: } V_M = 75 \text{ см/с}; V_1 = 75 \text{ см/с}; a_M = 237,17 \text{ см/с}^2; a_1 = 75 \text{ см/с}^2$$

Пример 3

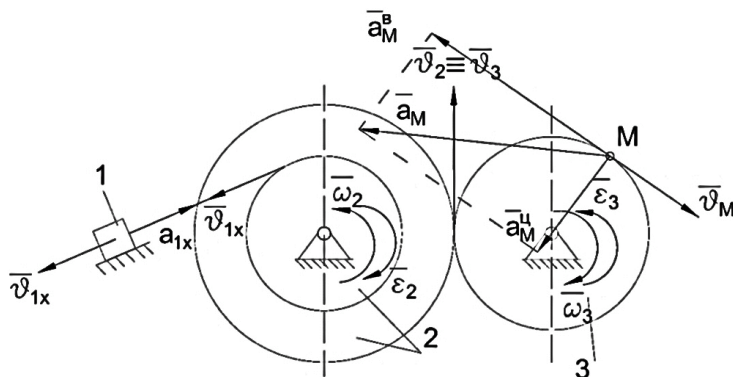


Рис. 18. Фрикционная передача

Зная скорость и ускорение тела 1 механической системы, определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки M , а также угловые скорости и ускорения тел системы (рис. 18).

Дано:

$$V_{1x} = -0,5 \text{ м/с}$$

$$a_{1x} = 1,0 \text{ м/с}^2$$

$$R_2 = 1 \text{ м}$$

$$r_2 = 0,6 \text{ м}$$

$$R_3 = 0,75 \text{ м}$$

Решение:

$$1) \quad V_{1x} = \omega_2 \cdot r_2$$

$$\omega_2 = \frac{V_{1x}}{r_2}$$

$$2) \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_3$$

$$V_2 = V_3$$

Найти: $\bar{V}_M, \bar{a}_M$ —?

$$\omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot R_3$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_3} = \frac{V_{1x} \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$$

$$3) \quad \begin{aligned} V_M &= \omega_3 \cdot R_3 \\ V_M &= -0,83 \text{ м/с} \end{aligned}$$

$$1) \quad a_{1x} = \varepsilon_2 \cdot r_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}$$

$$2) \quad \bar{a}_3 = \bar{a}_2$$

$$\varepsilon_3 \cdot R_3 = \varepsilon_2 \cdot R_2$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 \cdot R_2}{R_3} = \frac{a_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$$

$$3) \quad \bar{a}_M = \bar{a}_M^B + \bar{a}_M^U$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^B)^2 + (a_M^U)^2}$$

$$a_M^B = \varepsilon_3 \cdot R_3 = \frac{a_1 \cdot R_2}{r_2}$$

$$a_M^U = \omega_3^2 \cdot R_3$$

$$a_M^B = 1,67 \text{ м/с}^2$$

$$a_M^U = 0,93 \text{ м/с}^2$$

$$a_M = \sqrt{(1,67)^2 + (0,93)^2} = 1,91 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $V_M = -0,83 \text{ м/с}$; $a_M = 1,91 \text{ м/с}^2$

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Основные понятия

Плоскопараллельным (плоским) движением называется такое движение тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

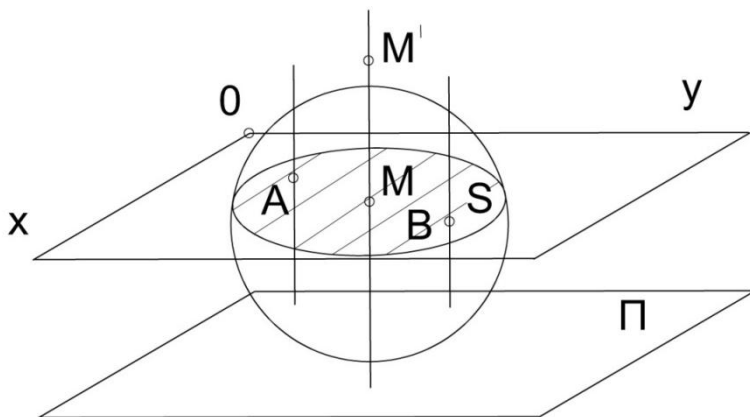


Рис. 19. Плоскопараллельное движение твердого тела.

Для изучения плоского движения тела достаточно изучить движение плоской фигуры (S) в ее плоскости (плоскости Oxy) (рис. 17). Положение плоской фигуры можно определить положением какого-либо отрезка AB , проведенного в этой фигуре, а положение отрезка - координатами x_A, y_A точки A (полюса) и углом φ между отрезком AB и осью Ox . Тогда уравнения плоского движения будут выражаться зависимостями:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (31)$$

Это и есть закон плоскопараллельного движения твердого тела.

Первые два уравнения (31) описывают движение точки A (полюса) в плоскости Oxy (поступательное движение), а последнее вращение тела вокруг оси, проходящей через полюс A .

Таким образом, плоское движение тела в каждый момент времени складывается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как полюс A , и из вращательного движения тела вокруг этого полюса.

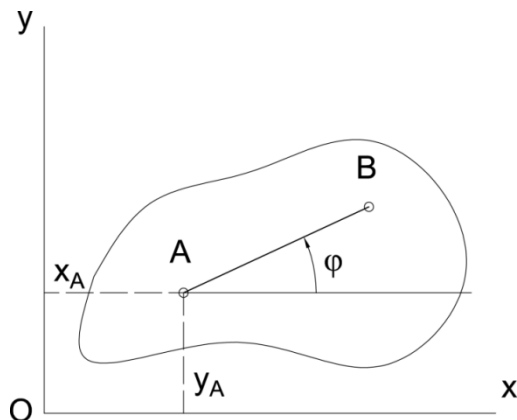


Рис. 20. Положение плоской фигуры S в плоскости Oxy .

Частные случаи плоскопараллельного движения.

1. *Поступательное движение твердого тела*, если $f_3(t) = \text{const}$, т.е. если исключено вращение отрезка AB в плоскости Oxy .
2. *Вращательное движение твердого тела*, если $f_1(t) = \text{const}$, $f_2(t) = \text{const}$, т.е. исключено поступательное движение полюса A в плоскости Oxy .

Определение скорости точки плоской фигуры

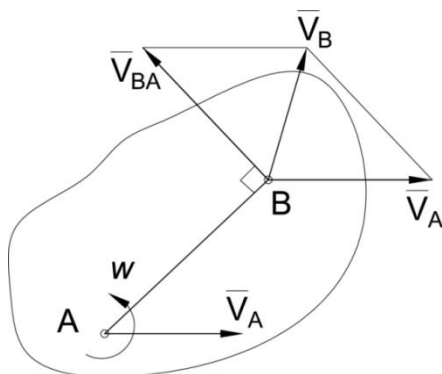


Рис. 21. Скорость точки B при плоскопараллельном движении твердого тела.

Скорость любой точки B тела по теореме сложения скоростей складывается геометрически из скорости $\bar{V}_A$ полюса A и скорости $\bar{V}_{BA}$, которую точка B получает при вращении тела вокруг этого полюса A (рис. 21)

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}. \quad (32)$$

Вращательная скорость точки B вокруг полюса A равна

$$V_{BA} = \omega \cdot BA. \quad (33)$$

Определять скорости точек плоской фигуры с помощью уравнения (33) можно, но не всегда удобно, поэтому на практике применяют другие более простые и удобные методы, вытекающие из этой теоремы.

Один из таких методов основан на понятии о мгновенном центре скоростей (МЦС).

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Такая точка (P) при непоступательном движении тела существует и лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей точек тела (рис. 22).

Если в уравнении (32) за полюс принять точку P ($V_P = 0$), то скорость любой точки будет равна

$$\begin{cases} V_A = V_{AP} = \omega \cdot AP, \\ V_B = V_{BP} = \omega \cdot BP, \\ V_C = V_{CP} = \omega \cdot CP. \end{cases} \quad (34)$$

Из равенств (34) следует

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \omega. \quad (35)$$

Из выражения (35) легко определить скорость любой точки тела по известной скорости другой точки и расстояниям от этих точек до МЦС, а угловую скорость тела — как отношение скорости любой точки к ее расстоянию до МЦС.

Из вышесказанного следует:

- векторы скоростей точек плоской фигуры перпендикулярны своим расстояниям до МЦС и пропорциональны им;
- угловая скорость плоской фигуры равна отношению линейной скорости какой-либо точки плоской фигуры к ее расстоянию до МЦС.

Для построения МЦС необходимо знать направления векторов скоростей двух любых точек плоской фигуры.

Для определения модуля скорости точки плоской фигуры необходимо знать направления векторов скоростей двух любых точек фигуры и модуля одной из них.

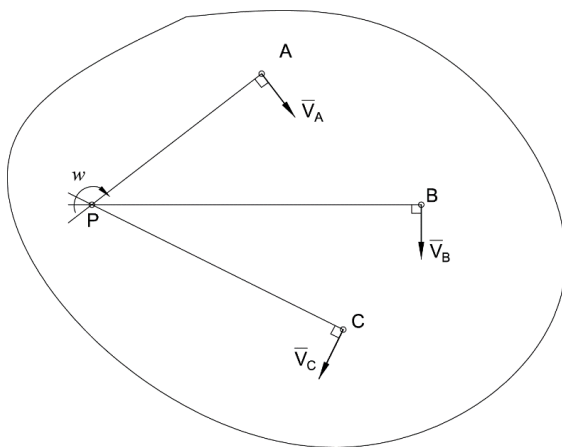


Рис. 22. Мгновенный центр скоростей точек плоской фигуры.

Способы определения (частные случаи) положения МЦС

1. МЦС лежит в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в двух точках тела к направлениям их скоростей (рис. 23).

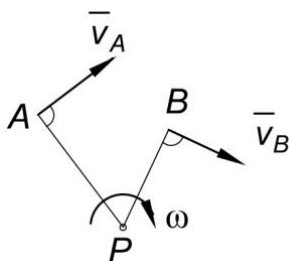


Рис. 23. Определение МЦС в общем случае.

2. Если вектор $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ и AB не перпендикулярна к $\vec{v}_A$ (рис. 24), то МЦС лежит в бесконечности, и угловая скорость тела $\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{\infty} = 0$. Скорости всех точек тела будут равны и параллельны, а движение тела в этот момент называют мгновенно поступательным.

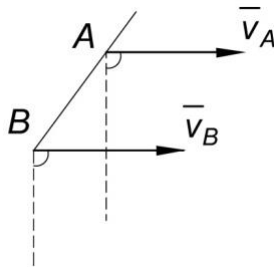


Рис. 24. МЦС при мгновенно поступательном движении.

3. Если $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ и $AB \perp \vec{v}_A$, то для определения МЦС нужно знать модули скоростей этих точек, тогда построение, показанное на рис. 25 однозначно определяет точку P .

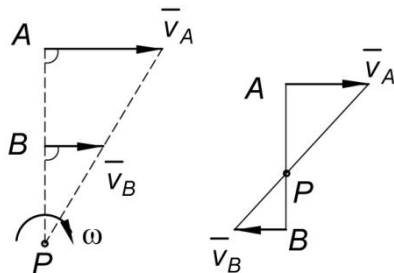


Рис. 25. МЦС для случая $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ и $AB \perp \vec{v}_A$

4. В случае, указанном на рис. 26, имеет мгновенно поступательное распределение скоростей точек тела.

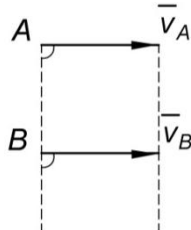


Рис. 26. Случай мгновенно поступательного движения при $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ и $AB \perp \vec{v}_A$

Если плоское движение происходит в результате качения без скольжения одного тела на поверхности другого неподвижного тела, то МЦС будет в точки касания. Точка P' неподвижной поверхности, совпадающая с точкой P , и есть мгновенный центр вращения. Особенно на этом примере видно как эти центры в каждый момент совпадают и непрерывно изменяют свое положение (рис. 27).

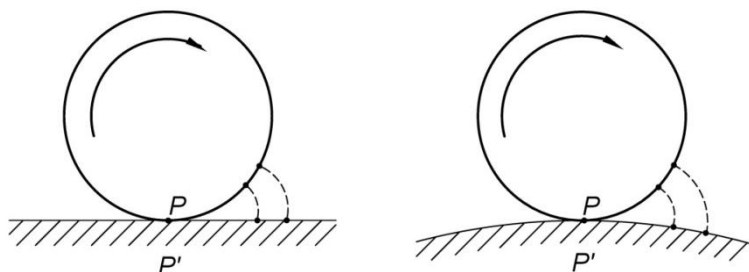


Рис. 27. МЦС при качении без скольжения одного тела по поверхности другого неподвижного тела.

Учитывая рассмотренный частный случай определения МЦС при качении без скольжения одного тела по поверхности другого неподвижного тела, покажем вектора скоростей точек твердого тела цилиндрической формы, которое катится (без проскальзывания) по недеформированной поверхности (рис. 28).

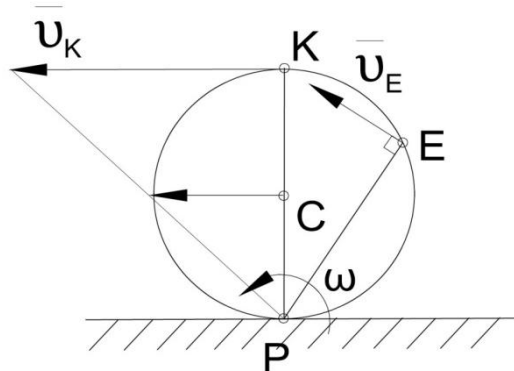


Рис. 28. Скорости точек твердого тела цилиндрической формы при качении.

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Проекции скоростей двух точек плоского тела (рис. 29) на прямую, соединяющую эти точки, в любой момент времени равны между собой

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha. \quad (36)$$

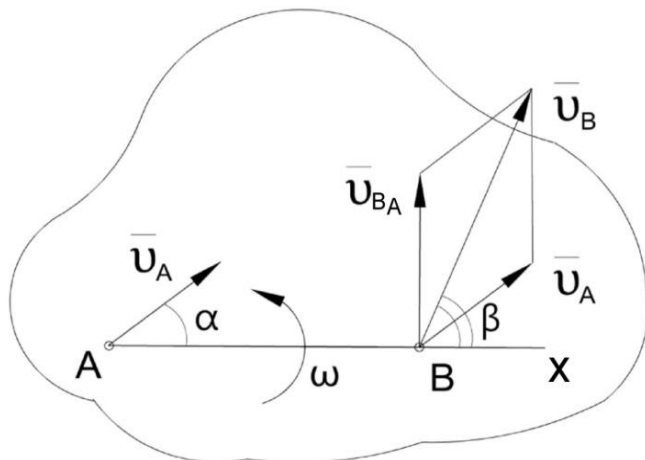


Рис. 29. Проекции скоростей двух точек твердого тела.

Существует еще один способ определения скоростей точек при плоскопараллельном движении через построения *плана скоростей*, что и будет в дальнейшем наглядно продемонстрировано в примерах решения задач по данной теме.

Определение ускорения точки плоской фигуры

Как было показано, плоское движение тела можно рассматривать как совокупность двух движений: поступательного движения вместе с полюсом и вращательного и вокруг этого полюса.

Скорость любой точки плоской фигуры можно найти по формуле (32): $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$. Продифференцируем это выражение и найдем ускорение в точке B:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{V}_{BA}}{dt},$$

где $\frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{a}_A$ — есть ускорение точки A (полюса), т.е. ускорение поступательной части плоского движения;

$\frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \vec{a}_{BA}$ — является ускорением точки B , которое она имеет в результате вращательного движения вокруг полюса A . Следовательно,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \quad (37)$$

Ускорение $\vec{a}_{BA}$ как ускорение точки вращающегося тела определяют по формулам:

$$\vec{a}_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (38)$$

где ω и ε — соответственно угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры; μ — угол между вектором $\vec{a}_{BA}$ и отрезком BA (рис. 30).

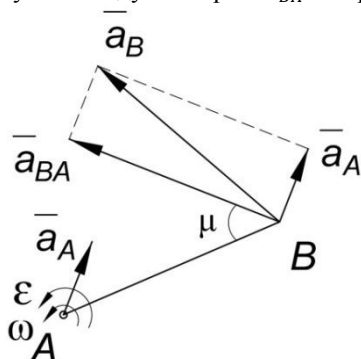


Рис. 30. Ускорение точки плоской фигуры

Таким образом, *ускорение любой точки B плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения какой-нибудь другой точки фигуры, принимаемой за полюс, и ускорения, которое точка получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.*

Выражение (37) — это теорема об ускорении точки плоской фигуры.

Так как точка B , вращаясь относительно полюса A , описывает криволинейную траекторию, то ускорение точки вращательной части плоского движения можно представить как сумму двух ускорений: тангенциального (касательного) и нормального (центростремительного), т.е.

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n.$$

Тогда равенство (37) примет следующий вид

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n. \quad (39)$$

Причем вектор $\vec{a}_{BA}^{\tau} \perp BA$ и направлен в сторону ε , а $\vec{a}_{BA}^n$ всегда направлен от точки B к полюсу A (рис. 31).

Числовые значения ускорений определяются по формулам, изученным ранее в разделе «Кинематика точки»

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB; a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB.$$

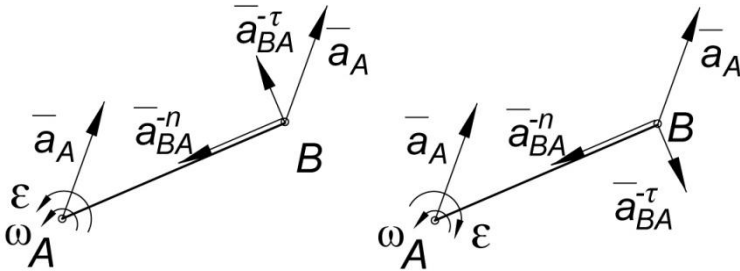


Рис. 31. Составляющие ускорения точки B.

Если точка A движется по криволинейной траектории, то равенство (40) будет иметь такой вид:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n. \quad (41)$$

Если заранее известна криволинейная траектория точки B, то равенство (41) принимает следующий вид:

$$\bar{a}_B^{\tau} + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n. \quad (42)$$

Значение $\bar{a}_B$ определяется или графическим методом или методом проекций на дополнительные оси.

Мгновенный центр ускорений

Докажем, что в плоскости движения фигуры существует такая точка Q, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Эту точку называют *мгновенным центром ускорений* (МЦУ).

По основной формуле определения ускорения точек (37) имеем

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA} = 0,$$

где $a_{QA} = AQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Значит, точку Q найдем на прямой, проходящей под углом μ к ускорению полюса A на расстоянии $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ (рис. 32).

Определяется положение центра Q, если известны ускорения $\bar{a}_A$ какой-либо точки A фигуры и величины ω и ε , следующим образом:

- находим значение угла μ из формулы $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$;

от точки A под углом μ к вектору $\bar{a}_A$ проводим прямую; при этом прямая должна быть отклонена от $\bar{a}_A$ в сторону вращения фигуры, если вращение является ускоренным, и против вращения, если вращение

является замедленным, т.е. в сторону направления углового ускорения ε ;

- откладываем вдоль линии отрезок AQ , равный $\frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

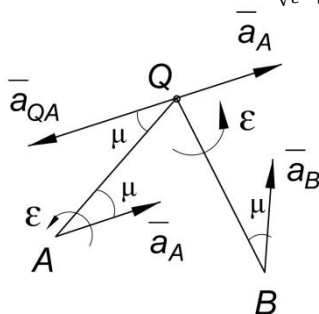


Рис. 32. Мгновенный центр ускорений точки плоской фигуры.

Построенная таким путем точка Q и будет являться мгновенным центром ускорений.

Если теперь при определении ускорений точек плоской фигуры выбрать за полюс МЦУ, то получим

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BQ}^r + \vec{a}_{BQ}^n. \quad (43)$$

Точки P и Q, МЦС и МЦУ не обязательно совпадут.

Задача К - 3

Кинематический анализ плоского многозвенного механизма

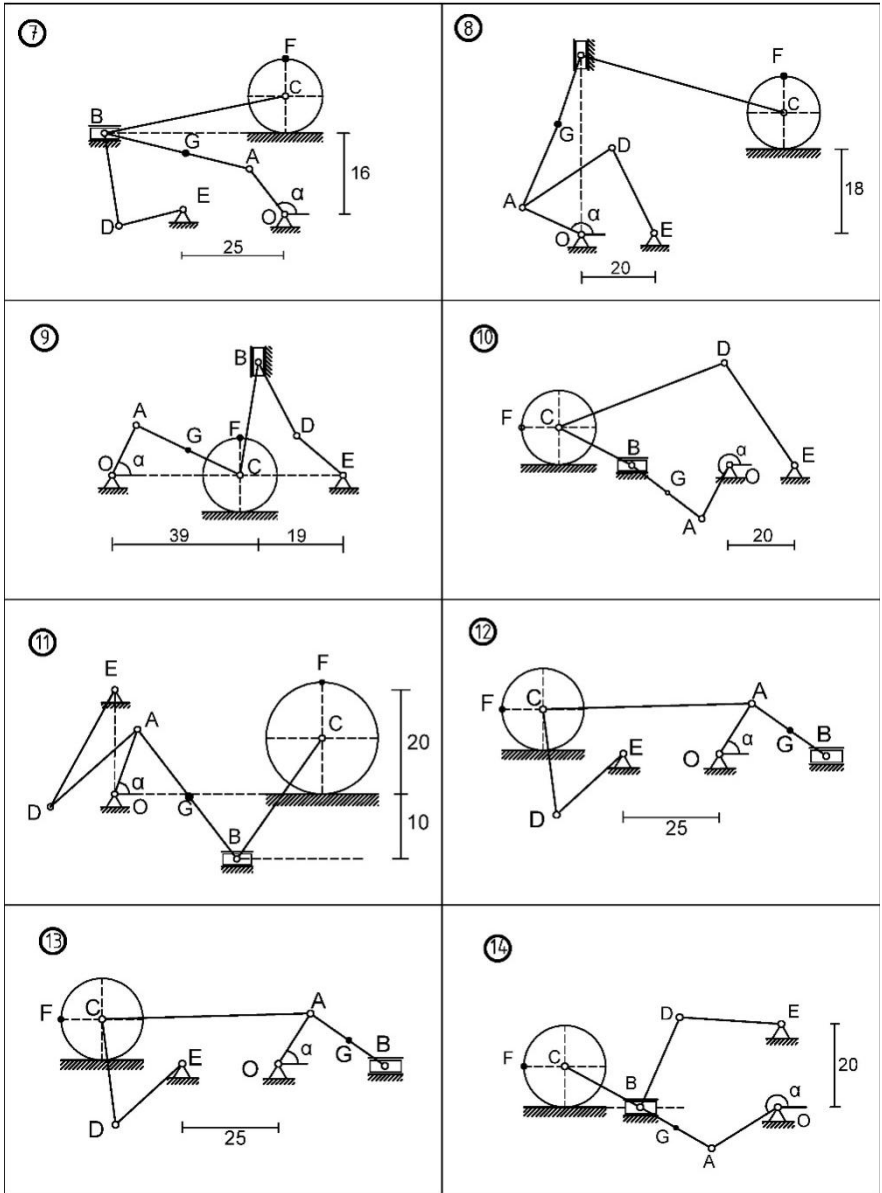
Исходные данные

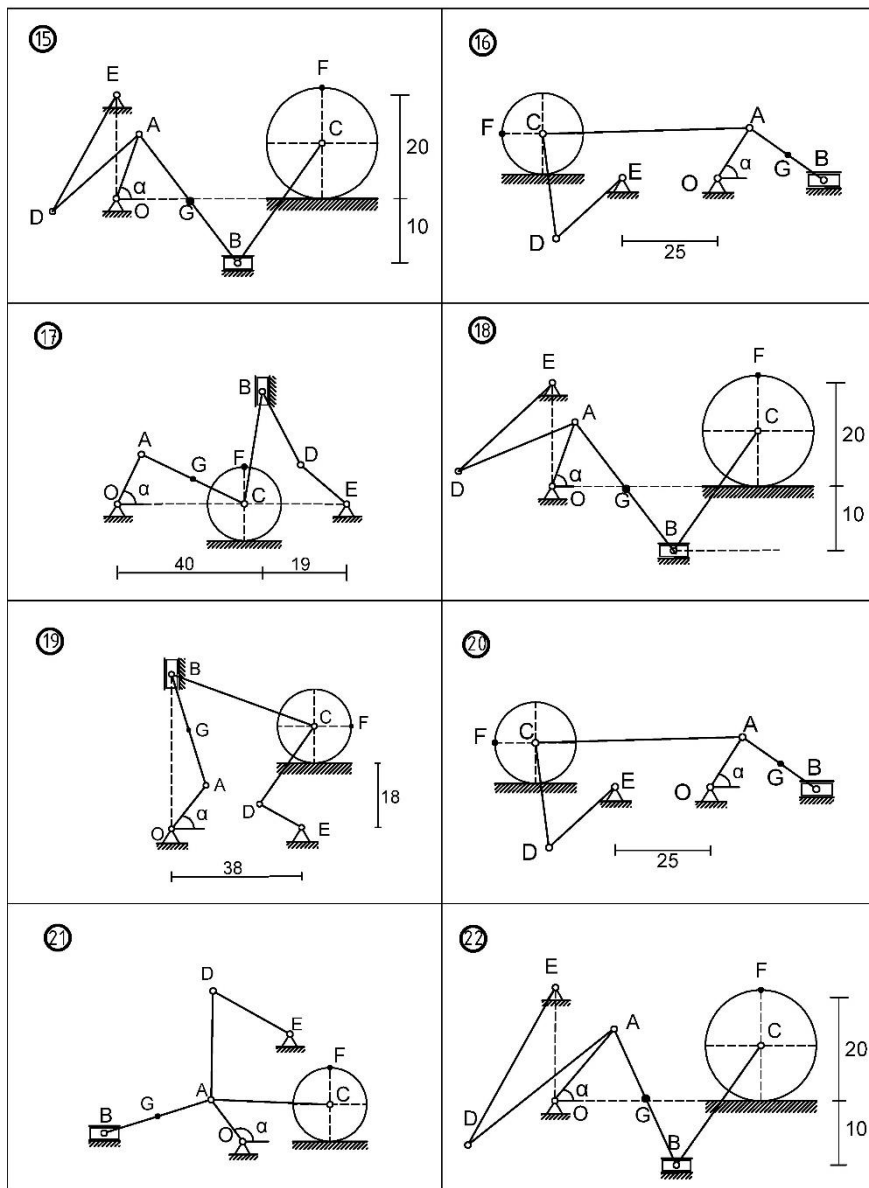
Для приведенных на рисунках схем (табл. 12) найти скорости точек A, B, C, D, F, G и ускорения точек B и G для всех вариантов или C и G – для вариантов 6, 9, 17, 23. Точка G является серединой звена AB для всех вариантов или звена AC – для вариантов 6, 9, 17, 23. Характеристики механизма указаны в табл. 13.

Таблица 4

Варианты заданий

①	②
③	④
⑤	⑥





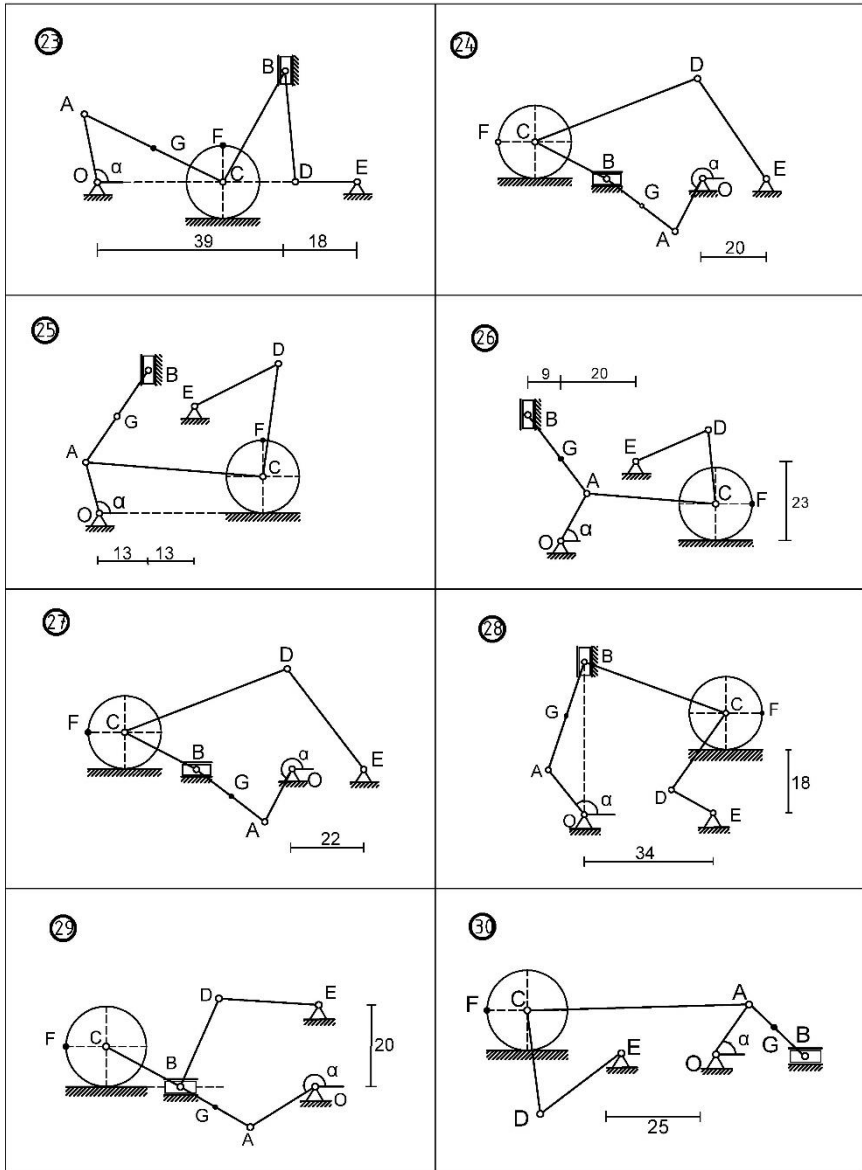


Таблица 5

Варианты заданий

№ вар	$\omega_{OA},$ $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$\alpha, ^\circ$	Длина звена, см									R, см
			AG	OA	AB	BC	BD	DE	AC	CD	AD	
1	3	135	AB/2	14	40	50	21	21				10
2	3	60	AB/2	14	30			21	35	21		10
3	2	60	AB/2	15	31	25		26			26	10
4	3	135	AB/2	14	40	50	22	22				10
5	1	60	AB/2	14	40	50		24			24	10
6	2	105	AC/2	15	30	33	14	12				10
7	2	135	AB/2	14	40	50	21	21				10
8	1	165	AB/2	16	40	51		26			26	10
9	2	75	AC/2	15		30	21	15	31			10
10	1	240	AB/2	16	24	22		34		48		10
11	2	75	AB/2	14	32	25		22			22	10
12	2	60	AB/2	14	22			22	51	26		10
13	1	60	AB/2	14	22			22	51	26		10
14	2	210	AB/2	15	22	23	26	27				10
15	2	75	AB/2	14	31	25		22			22	10
16	2	75	AB/2	16	22			22	50	26		10
17	2	75	AC/2	15		30	23	15	32			10
18	2	75	AB/2	14	31	25		24			24	10
19	3	45	AB/2	14	30	40		13		26		10
20	3	60	AB/2	14	23			22	51	23		10
21	1	120	AB/2	14	30			24	32		29	10
22	2	45	AB/2	16	31	25		26			26	10
23	1	105	AC/2	16		30	25	15	31			10
24	3	240	AB/2	16	24	21		34		47		10
25	1	105	AB/2	16	30			25	48	31		10
26	1	45	AB/2	16	30			21	34	21		10
27	3	240	AB/2	16	26	21		35		50		10
28	2	12	AB/2	16	30	36		19		29		10
29	3	210	AB/2	15	22	23	24	28				10
30	1	75	AB/2	16	21			22	51	22		10

Пример 4

Дано: $\varphi = 60^\circ$, $\omega_0 = 2 \text{ рад/с} = \text{const}$, $a = 55 \text{ см}$, $b = 20 \text{ см}$, $OA = 12 \text{ см}$, $AB = 52 \text{ см}$, $BC = BD = 25 \text{ см}$.

Найти: скорости всех точек и угловые скорости всех звеньев механизма при помощи мгновенного центра скоростей (МЦС), а также ускорения всех точек и угловые ускорения всех звеньев аналитически (рис. 33).

Алгоритм решения

1. Построить схему механизма в заданном положении ($\varphi = \varphi_1$) в масштабе.
2. Определить скорость точки A .
3. Определить скорости V_B и V_D и угловые скорости ω_{AB} , ω_{BC} , ω_{BD} механизма при помощи МЦС. Изобразить на рисунке векторы $\vec{V}_B$, $\vec{V}_C$, $\vec{V}_D$ (без учета масштаба) и указать направления угловых скоростей.
4. Определить ускорения точек a_A , a_B , a_D и угловые ускорения звеньев ε_{AB} , ε_{BC} , ε_{BD} механизма аналитически путем составления и решения развернутых векторных уравнений. Векторы ускорений точек и угловые ускорения звеньев показать на рисунке (без учета масштаба).

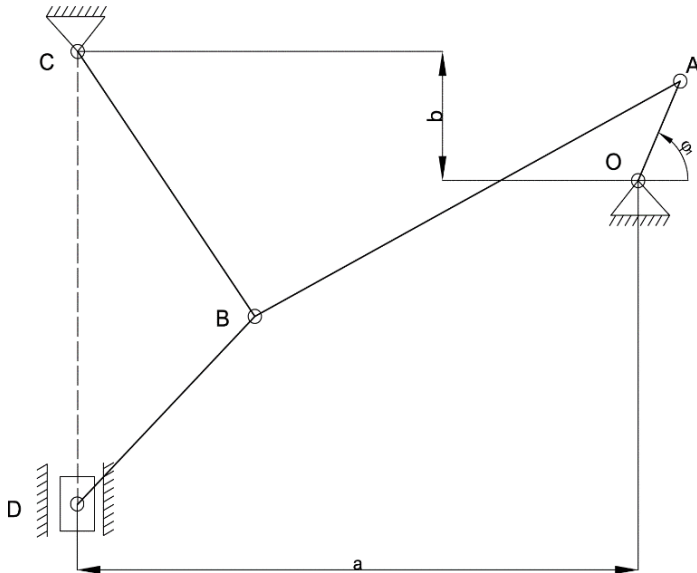


Рис. 33. Схема механизма

Решение:

1. Строим схему механизма в положении ($\varphi = \varphi_1$) в масштабе. Для чего выбираем масштаб длин M_L 1:10 и строим механизм.

- умножением истинных размеров механизма на масштаб M_L , получаем размеры механизма на рисунке: $a = 55$ мм, аналогично $b = 20$ мм, $AO = 12$ мм, $AB = 52$ мм, $BC = BD = 25$ мм.

- по координатам $x = a = 55$ мм и $y = b = 20$ мм строим положение неподвижных шарниров O , C , и линию направляющих ползуна D ;

- по углу $\varphi_1 = 60^\circ$ и длине $OA = 12$ мм строим положение кривошипа и его точки A ;

- засечками из точки A радиусом $AB = 52$ мм и из точки C радиусом $CB = 25$ мм находим на их пересечении положение точки B ;

- засечкой из точки B радиусом $BD = 25$ мм на ее пересечении с линией DC находим положение точки D .

2. Определяем скорость точки A .

Рассматриваем точку A , как точку кривошипа OA , который совершает вращательное движение с заданной угловой скоростью $\omega_0 = 2 \text{ рад/с} = \text{const}$.

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см/с}$$

Изображаем вектор $\vec{V}_A$, направляя его перпендикулярно звену OA в сторону вращения ω_0 (против хода часовой стрелки).

3. Определяем скорости точек B и D и угловые скорости звеньев AB , CB и BD .

Звенья AB и BD совершают плоское движение. Определяем скорости указанных выше точек и угловые скорости звеньев при помощи МЦС.

Находим положение МЦС звена AB . Направления скоростей точек A и B этого звена известны, (если эти точки считать принадлежащими звеньям OA и BC). Восстанавливая перпендикуляры к направлениям скоростей точек A и B (AP_{AB} и BP_{AB}) находим на их пересечении положении МЦС звена AB точка P_{AB} . По известному направлению вектора скорости точки A и положению точки P_{AB} определяем направление ω_{AB} (в сторону $\vec{V}_A$) и показываем его на рисунке.

Изображаем также вектор скорости $\vec{V}_B$, направляя его перпендикулярно отрезку BP_{AB} (или CB) в сторону ω_{AB} .

Для нахождения модуля скорости V_B необходимо определить сначала расстояния AP_{AB} и BP_{AB} . Чтобы не выполнять громоздкие геометрические вычисления, эти расстояния найдем путем измерения длин отрезков $l_{AP_{AB}}$ и $l_{BP_{AB}}$ и последующим делением этих длин на масштаб M_L :

$$AP_{AB} = \frac{l_{AP_{AB}}}{M_L} = 62,6 \text{ мм} \cdot 10 = 62,6 \text{ см, аналогично}$$

$$BP_{AB} = \frac{l_{BP_{AB}}}{M_L} = 45,9 \text{ мм} \cdot 10 = 45,9 \text{ см.}$$

Находим теперь скорость V_B и ω_{AB} из выражения

$$V_B = V_A \frac{BP_{AB}}{AP_{AB}} = 24 \frac{45,9}{62,6} = 17,6 \text{ см/с};$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{24}{62,6} = 0,4 \text{ рад/с.}$$

Рассматривая точку B как точку звена BC , находим его угловую скорость и показываем на рисунке ее направление

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = \frac{17,6}{25} = 0,7 \text{ рад/с.}$$

Находим положение $МЦС$ звена BD . Направления скоростей точек B и D известны. На пересечении перпендикуляров к скоростям точек B и D находим $МЦС$ этого звена (точка P_{BD}). По известному направлению скорости V_B и положению $МЦС$ находим направление ω_{BD} и показываем его. Вектор скорости $\vec{V}_D$ направлен в сторону ω_{BD} , а его модуль равен

$$V_D = V_B \frac{DP_{BD}}{BP_{BD}} = 17,6 \frac{21,5}{25,5} = 14,8 \text{ см/с,}$$

$$\text{где } BP_{BD} = \frac{l_{BP_{BD}}}{M_L} = 25,5 \text{ мм} \cdot 10 = 25,5 \text{ см,}$$

$$BD_{CE} = \frac{l_{BD_{BP}}}{M_L} = 21,5 \text{ мм} \cdot 10 = 21,5 \text{ см.}$$

Длины отрезков $l_{BP_{BD}}$ и $l_{DP_{BD}}$ найдены, как и в первом случае, путем измерения их на рисунке.

Угловая скорость звена BD равна

$$\omega_{BD} = \frac{V_B}{BP} = \frac{17,6}{25,5} = 0,7 \text{ рад/с.}$$



Находим ускорение точки A .

Ускорение точки A равно

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau, \text{ где}$$

$$a_A^n = \omega_0^2 \cdot AO = 2^2 \cdot 12 = 48 \text{ cm/c}^2,$$

$$a_A^r = \varepsilon_0 \cdot AO = 0, \text{ т. к., } \omega_0 = \text{const и } \varepsilon_0 = \frac{d\omega_0}{dt} = 0$$

следовательно, $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$

Направлен вектор $\vec{a}_A^n$ из точки A к оси вращения O , изображаем его на рисунке.

Определяем ускорение точки B . Точка B принадлежит трем звеньям AB , BC и BD . Для начала рассмотрим ее движение со звеньями AB и BC . Со звеном BC она участвует во вращательном движении, как точка кривошипа, и ее ускорение определяется выражением

$$\bar{a}_R = \bar{a}_R^n + \bar{a}_R^\tau.$$

Если же точку В считать точкой звена АВ, которое совершает

плоское движение, то ее ускорение определяется из выражения
 $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$.

Приравнявая правые части уравнений, получим развернутое векторное уравнение для определения ускорения точки B

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

Проводим анализ этого уравнения, для чего изображаем на рисунке входящие в уравнение векторы, и находим их модули. Модуль ускорения a_A^n уже найден, ускорение a_B^n определяем по известной угловой скорости ω_{BC}

$$a_B^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 0,7^2 \cdot 25 = 12,3 \text{ см/с}^2,$$

а модуль ускорение a_{BA}^n - по известной скорости ω_{AB}

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot BA = 0,4^2 \cdot 52 = 8,3 \text{ см/с}^2$$

Таким образом, в векторном уравнении неизвестны модули двух векторов a_B^τ и a_{BA}^τ . Найдем проекции этого уравнение на оси Bx и By , получим два алгебраических уравнения, из которых найдем неизвестные ускорения a_B^τ и a_{BA}^τ .

Для получения более простых уравнений ось B_x направляем по $\vec{a}_{BA}^n$, а ось B_y по $\vec{a}_{BA}^\tau$. В результате имеем:

$$B_x: -a_B^n \cdot \sin\beta - a_B^\tau \cdot \cos\beta = -a_A^n \cdot \cos\alpha + a_{BA}^n$$

$$B_y: a_B^n \cdot \cos\beta - a_B^\tau \cdot \sin\beta = -a_A^n \cdot \sin\alpha - a_{BA}^\tau.$$

Значения углов α и β определяем измерением их на рисунке ($\alpha = 46^\circ$, $\beta = 10,5^\circ$, $\gamma = 49,5^\circ$, $\delta = 24,5^\circ$).

Из первого уравнения находим:

$$a_B^\tau = \frac{-a_B^n \cdot \sin\beta + a_A^n \cdot \cos\beta - a_{BA}^n}{\cos\beta} = \frac{-12,3 \cdot 0,18 + 48 \cdot 0,69 - 8,3}{0,89} = 22,6 \text{ см/с}^2.$$

Из второго уравнения находим:

$$a_{BA}^\tau = -a_A^n \cdot \sin\alpha - a_B^n \cdot \cos\beta + a_B^\tau \cdot \sin\beta = -48 \cdot 0,72 - 12,3 \cdot 0,98 + 22,6 \cdot 0,18 = -42,5 \text{ см/с}^2$$

Значение ускорения a_B^τ получено положительное, следовательно, направление вектора $\vec{a}_B^\tau$ показанное на рисунке, выбрано правильно. Угловое ускорение ε_{BC} звена BC направляем в сторону вектора $\vec{a}_B^\tau$, т.е. по ходу часовой стрелки.

Величину ε_{BC} находим

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_B^\tau}{BC} = \frac{22,6}{25} = 0,9 \text{ рад/с}^2.$$

Значение ускорения a_{BA}^τ получено отрицательное, значит действительное направление вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ противоположно выбранному на рисунке. Тогда угловое ускорение ε_{BC} будет направлено по ходу часовой стрелки, а его величина будет равна

$$\varepsilon_{CA} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{42,5}{52} = 0,8 \text{ рад/с}^2.$$

Полное ускорение a_B равно

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^{\tau})^2} = \sqrt{12,3^2 + 22,6^2} = 25,7 \text{ см/с}^2.$$

Установим характер вращения звеньев AB и BC . Направления угловой скорости ω_{AB} и углового ускорения ε_{AB} звена AB противоположны, значит, вращение его из заданного положения замедленное. Направления ω_{BC} и ε_{BC} звена BC совпадают, значит, вращение этого звена из заданного положения ускоренное.

Определяем ускорение точки D .

Звено BD совершает плоское движение. Ускорение точки D находим из развернутого векторного уравнения

$$\vec{a}_D^{\tau} = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^{\tau} + \vec{a}_{DB}^n + \vec{a}_{DB}^{\tau}.$$

Точка D движется прямолинейно, поэтому $a_D^n = 0$ (т.к. $\rho = \infty$ и $a_D^n = \frac{v_D^2}{\rho} = 0$), тогда $\vec{a}_D = \vec{a}_D^{\tau}$.

Находим модули, входящих в уравнения ускорений, и изображаем их векторы на рисунке. Определяем ускорение a_{DB}^n
 $a_{DB}^n = \omega_{DB}^2 \cdot DB = 0,7^2 \cdot 25 = 12,25 \text{ см/с}^2$

Ускорения a_B^n и a_B^{τ} были найдены раньше, модули ускорений a_D^{τ} и a_{DB}^{τ} неизвестны (они в уравнении подчеркнуты), а их направления известны. Вектор $\vec{a}_D^{\tau}$ направлен вдоль прямой CD , а вектор $\vec{a}_{DB}^{\tau}$ вдоль DB .

Изображаем на рисунке все векторы, входящие в данное уравнение. Выбираем координатные оси $D\xi$ и $D\eta$. Для получения простых уравнений ось $D\eta$ совмещаем с вектором $\vec{a}_{DB}^n$. Углы δ и γ находим измерением их на рисунке ($\delta = 24,5^\circ$, $\gamma = 49,5^\circ$).

Найдем проекции уравнения, записанного изначально для ускорения $\vec{a}_D^{\tau}$ точки D на оси $D\xi$ и $D\eta$, получим:

$$D\eta: -a_D^{\tau} \cdot \cos\delta = a_B^n \cdot \cos\gamma - a_B^{\tau} \cdot \sin\gamma + a_{DB}^n$$

$$D\xi: -a_D^{\tau} \cdot \sin\delta = a_B^n \cdot \sin\gamma + a_B^{\tau} \cdot \cos\gamma + a_{DB}^{\tau}$$

Из первого уравнения находим

$$a_D^{\tau} = \frac{-a_B^n \cdot \cos\gamma + a_B^{\tau} \cdot \sin\gamma - a_{DB}^n}{\sin(\delta + \gamma)} = \frac{-12,3 \cdot 0,65 + 22,6 \cdot 0,76 - 12,25}{0,91} = 3,3 \text{ см/с}^2$$

Из второго уравнения находим

$$a_{DB}^{\tau} = a_D^{\tau} \cdot \sin\delta - a_B^n \cdot \sin\gamma - a_B^{\tau} \cdot \cos\gamma = 3,3 \cdot 0,42 - 12,3 \cdot 0,76 - 22,6 \cdot 0,65 = -22,6 \text{ см/с}^2$$

Значение ускорения a_{DB}^{τ} получено отрицательное, значит истинное направление вектора противоположно выбранному на рисунке. Угловое ускорение ε_{DB} будет направлено против хода часовой стрелки,

а его величина будет равна

$$\varepsilon_{DB} = \frac{a_{DB}^{\tau}}{DB} = \frac{22,6}{25} = 0,9 \text{ рад/с}^2.$$

Направление угловой скорости ω_{DB} и углового ускорения ε_{DB} звена совпадают, а значит, вращение этого звена из заданного положения ускоренное.

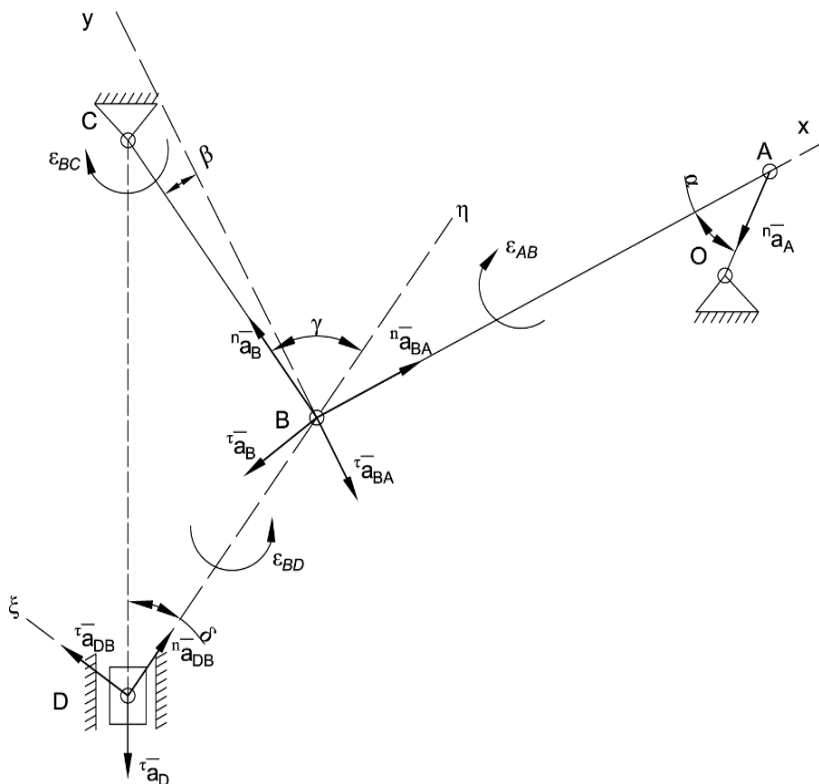


Рис. 35. Определение ускорений точек механизма

Пример 5

Для заданного на схеме механизма определить скорости точек A, B, C, D, G, F , угловые ускорения звеньев с помощью мгновенных центров скоростей, по теореме о проекциях скоростей точек на ось, по плану скоростей, а также рассчитать ускорение точек B и G , построить план ускорений.

Дано: $\omega_{OA} = 3$ рад/с, $\alpha = 60^\circ$, $AG = AB/2$, $OA = 15$ см, $AB = 30$ см, $AC = 35$ см, $CD = 21$ см, $DE = 21$ см, $R = 10$ см (рис.36)

Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_G, V_F, \omega_{AB}, \omega_{AC}, \omega_C, \omega_{CD}, \omega_{ED}, a_B, a_G$

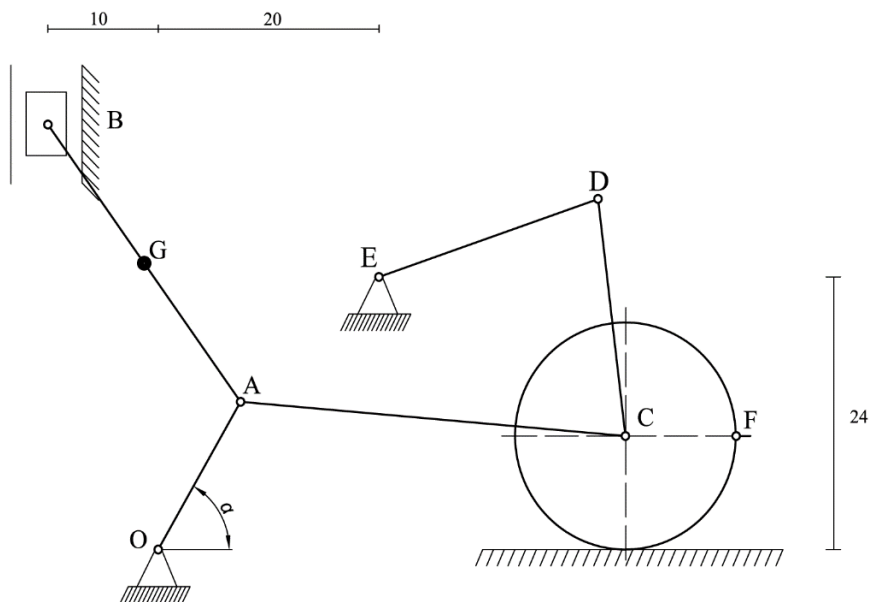


Рис. 36. Построение механизма в масштабе

Анализ звеньев механизма:

- кривошип: OA, DE ;
- ползун: B ;
- твердое тело: каток C ;
- шатун: AC, AB, CD .

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей (МЦС) звеньев.

Найдем скорость точки A , принадлежащей кривошипу OA .

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 45 \text{ см/с}$$

Через построение МЦС, учитывая соотношение линейных скоростей точек твердого тела и их расстояний до МЦС, определим скорости точек B, C, D, G, F и угловые скорости звеньев AB, AC, CD, ED и твердого тела C

$$\frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{V_B}{BP_{AB}}$$

$$vV_B = \frac{Vv_A}{AP_{AB}} BP_{AB} = 50,33 \text{ см/с}$$

$$\omega_{AB} = \frac{vV_A}{AP_{AB}} = 1,6 \text{ рад/с}$$

$$V_G = \omega_{AB} \cdot GP_{AB} = 41,26 \text{ см/с}$$

$$\frac{V_A}{AP_{AC}} = \frac{V_C}{CP_{AC}}$$

$$V_C = \frac{V_A}{AP_{AC}} \cdot CP_{AC} = 40,95 \text{ см/с}$$

$$\omega_{AC} = \frac{V_A}{AP_{AC}} = 0,64 \text{ рад/с}$$

$$\omega_C = \frac{V_C}{CP_C} = 4,1 \text{ рад/с}$$

$$V_F = \omega_C \cdot FP_C = 58,08 \text{ см/с}$$

$$\frac{V_C}{CP_{CD}} = \frac{V_D}{DP_{CD}}$$

$$V_D = \frac{V_C}{CP_{CD}} \cdot DP_{CD} = 5,11 \text{ см/с}$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_{CD}} = 1,89 \text{ рад/с}$$

$$\omega_{ED} = \frac{V_D}{ED} = 0,24 \text{ рад/с}$$

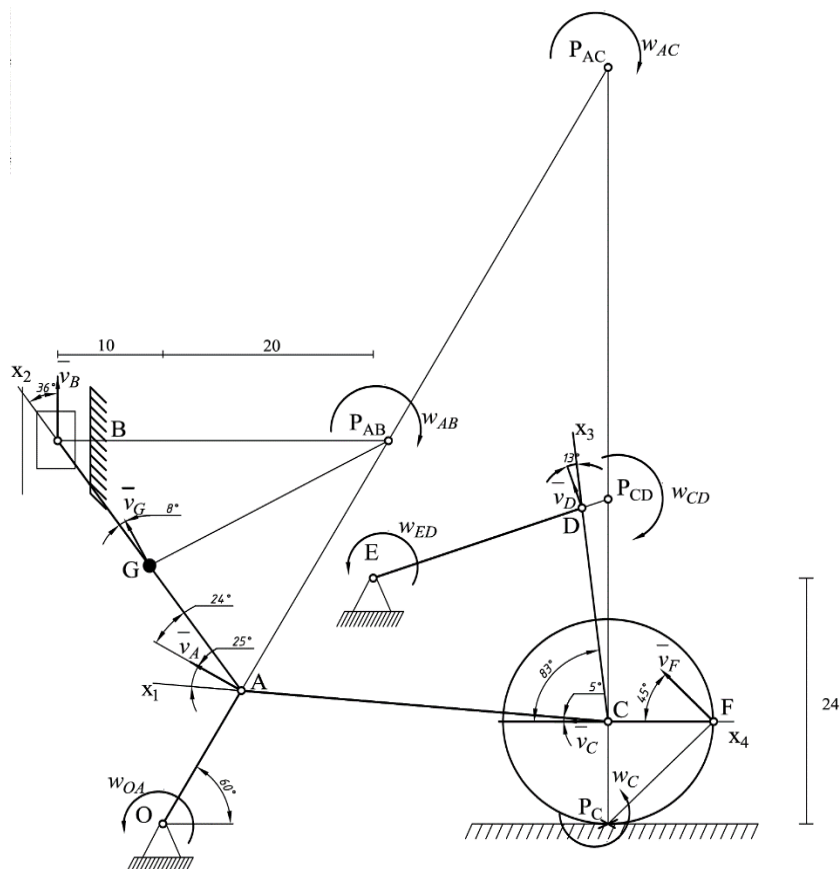


Рис. 37. Определение скоростей через построение МЦС и по теореме о проекциях скоростей точек на ось

Введем оси, направленные по звеньям механизма. Воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек твердого тела на ось, измеряя углы, составляемые векторами скоростей с осью, на схеме. Из уравнений проекций находим соответствующие значения скоростей.

$$Bx_1: V_A \cdot \cos 25^\circ = V_C \cdot \cos 5^\circ,$$

$$\text{где } V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 45 \text{ см/с}$$

$$V_C = \frac{V_A}{\cos 5^\circ} \cdot \cos 25^\circ = 40,93 \text{ см/с}$$

$$Bx_2: V_A \cdot \cos 24^\circ = V_G \cdot \cos 8^\circ$$

$$V_A \cdot \cos 24^\circ = V_G \cdot \cos 8^\circ$$

$$V_G = \frac{V_A}{\cos 8^\circ} \cdot \cos 24^\circ = 41,33 \text{ см/с}$$

$$\text{Вх}_2: V_A \cdot \cos 24^\circ = V_B \cdot \cos 36^\circ$$

$$V_B = \frac{V_A}{\cos 36^\circ} \cdot \cos 24^\circ = 50,38 \text{ см/с}$$

$$\text{Вх}_3: V_C \cdot \cos 83^\circ = V_D \cdot \cos 13^\circ$$

$$V_D = \frac{V_C}{\cos 13^\circ} \cdot \cos 83^\circ = 5,13 \text{ см/с}$$

$$\text{Вх}_4: V_F \cdot \cos 45^\circ = V_C \cdot \cos 0^\circ$$

$$V_F = \frac{V_C}{\cos 45^\circ} \cdot \cos 0^\circ = 57,98 \text{ см/с}$$

В качестве полюса выберем точку O , относительно которой построим план скоростей согласно масштабу, произведем расчет необходимых величин, используя чертеж плана скоростей.

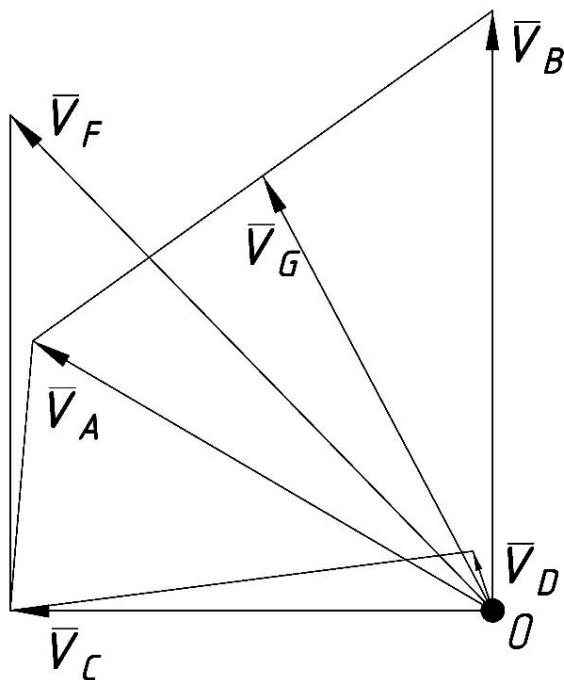


Рис. 38. План скоростей

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма по плану скоростей:

$$\begin{aligned}
V_A &= \omega_{OA} \cdot OA = 45 \text{ см/с} \\
\bar{V}_B &= \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}; V_B = 50,41 \text{ см/с} \\
\omega_{AB} &= \frac{ab}{AB} = 1,6 \text{ рад/с} \\
\bar{V}_G &= \bar{V}_A + \frac{1}{2} \bar{V}_{BA}; V_G = 41,36 \text{ см/с} \\
\bar{V}_C &= \bar{V}_A + \bar{V}_{CA}; V_C = 40,84 \text{ см/с} \\
\omega_{AC} &= \frac{ac}{AC} = 0,65 \text{ рад/с} \\
\bar{V}_F &= \bar{V}_C + \bar{V}_{FC}; V_F = 58,13 \text{ см/с} \\
\omega_C &= \frac{fc}{FC} = 4,1 \text{ рад/с} \\
\bar{V}_D &= \bar{V}_C + \bar{V}_{DC}; V_D = 5,11 \text{ см/с} \\
\omega_{CD} &= \frac{dc}{DC} = 1,88 \text{ рад/с} \\
\omega_{ED} &= \frac{V_D}{DE} = 0,24 \text{ рад/с}
\end{aligned}$$

Результаты расчетов скоростей точек механизма, найденные тремя способами, занесем в сравнительную таблицу (табл. 6).

Скорости точек механизма (см/с):

Таблица 6

Методы расчета	Точка					
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
МЦС	45	50,33	40,95	5,11	58,08	41,26
теорема о проекциях	45	50,38	40,93	5,13	57,98	41,33
план скоро- стей	45	50,41	40,84	5,11	58,13	41,36

Определим ускорение точки *B*. По теореме об ускорениях для точки *B* запишем выражение согласно рис. 10:

$$\bar{\alpha}_B = \bar{\alpha}_A^n + \bar{\alpha}_{BA}^n + \bar{\alpha}_{BA}^\tau$$

$$\bar{\alpha}_B = \bar{\alpha}_A + \bar{\alpha}_{BA}$$

$$\bar{\alpha}_A = \bar{\alpha}_A^n + \bar{\alpha}_A^\tau$$

$$\alpha_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0, \text{ т.к. } \varepsilon_{OA} = \frac{d\omega_{OA}}{dt} = 0$$

$$\alpha_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 135 \text{ см/с}^2$$

$$\alpha_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 76,8 \text{ см/с}^2$$

Возьмем проекции выражения $\bar{a}_B$ для на введенные оси Bx и By .

$$Bx: -\alpha_B \cdot \cos 36^\circ = -\alpha_{BA}^n - \alpha_A^n \cdot \sin 25^\circ$$

$$By: -\alpha_B \cdot \sin 36^\circ = -\alpha_A^n \cdot \cos 25^\circ - \alpha_{BA}^\tau$$

$$-\alpha_B = \frac{-\alpha_{BA}^n - \alpha_A^n \cdot \sin 25^\circ}{\cos 36^\circ}$$

$$\alpha_B = 165,45 \text{ см/с}^2$$

$$\alpha_{BA}^\tau = \alpha_B \cdot \sin 36^\circ - \alpha_A^n \cdot \cos 25^\circ$$

$$\alpha_{BA}^\tau = -25,1 \text{ см/с}^2 - \text{направлен в противоположную сторону}$$

$$\alpha_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB; \quad \varepsilon_{AB} = \frac{\alpha_{BA}^\tau}{AB} = \frac{25,1}{30} = 0,836 \text{ рад/с}^2$$

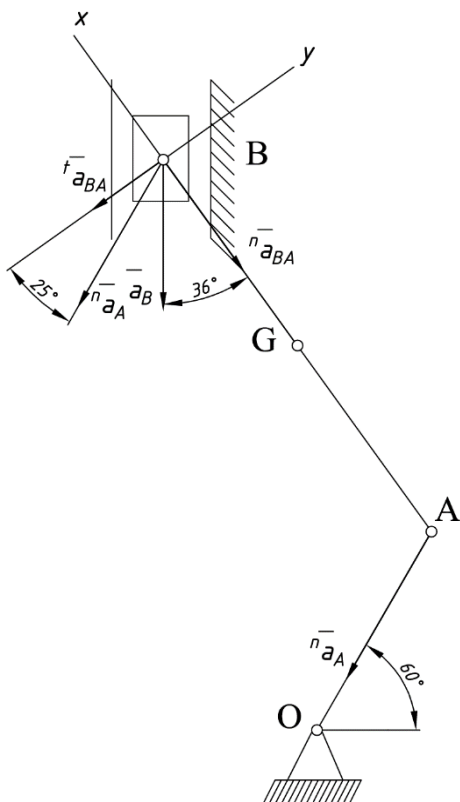


Рис. 39. Теорема об ускорениях для точки B

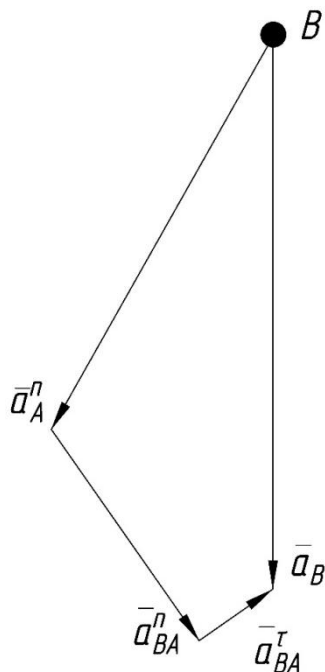


Рис. 40. План ускорений для точки B

Определим ускорение точки G , воспользовавшись теоремой об ускорениях, составим уравнение:

$$\bar{a}_G = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{GA}^n + \bar{a}_{GA}^\tau$$

$$\alpha_A^n = 135 \text{ см/с}^2$$

$$a_{GA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot GA = 38,4 \text{ см/с}^2$$

$$a_{GA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot GA = 12,54 \text{ см/с}^2$$

Запишем уравнение для $\bar{a}_G$ в проекциях на оси координат Gx и Gy .

$$Gx: \alpha_{Gx} = \alpha_{GA}^n \cdot \cos 54^\circ + \alpha_{GA}^\tau \cdot \cos 35^\circ - \alpha_A^n \cdot \cos 60^\circ$$

$$Gy: \alpha_{Gy} = -\alpha_{GA}^n \cdot \sin 54^\circ + \alpha_{GA}^\tau \cdot \sin 35^\circ - \alpha_A^n \cdot \sin 60^\circ$$

$$a_{Gx} = -34,66 \text{ см/с}^2 - \text{направлен в противоположную сторону}$$

$$a_{Gy} = -140,79 \text{ см/с}^2 - \text{направлен в противоположную сторону}$$

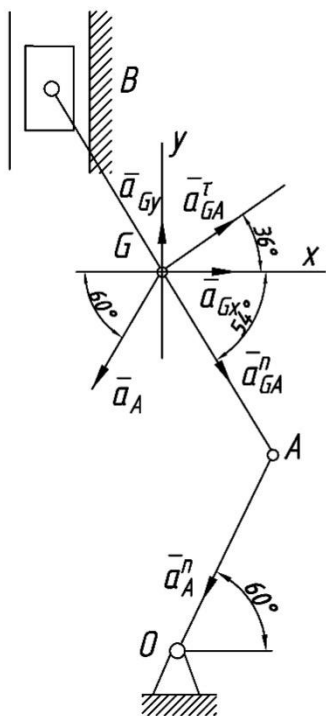


Рис. 41. Теорема об ускорениях для точки G

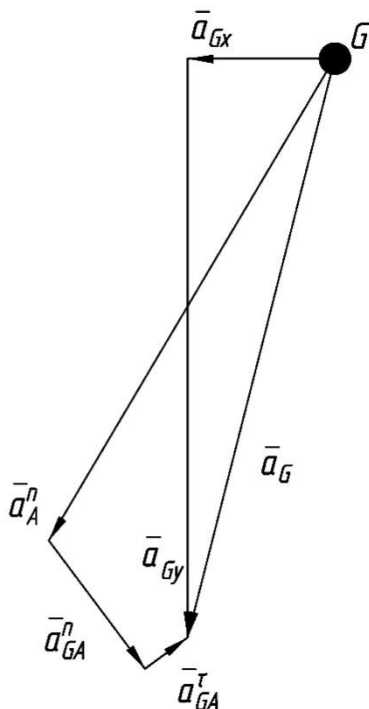


Рис. 42. План ускорений для точки G

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Основные понятия

Раньше движение точки рассматривалось в неподвижной системе координат. Теперь же система координат является подвижной, то есть система координат сама движется относительно неподвижной системы (например, пароход на реке, человек на эскалаторе) (рис. 43).

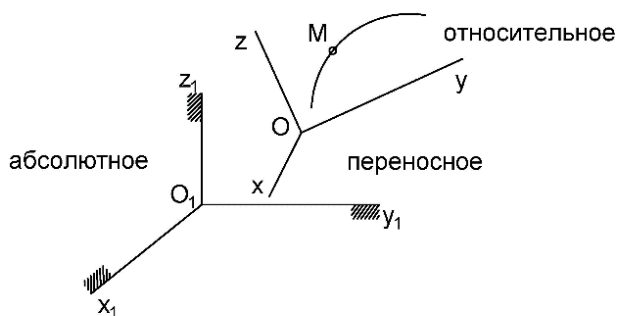


Рис. 43. Сложное движение точки.

Движение точки M относительно подвижной системы отсчета $Oxyz$ называют *относительным*.

Движение подвижной системы $Oxyz$ относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называют *переносным*.

Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется сложным, результирующим или абсолютным.

Задача кинематики в этом случае состоит в том, чтобы, зная законы относительного движения точки и переносного (движение подвижной системы) движения, найти характеристики абсолютного движения точки. И обратная задача – часто для изучения заданного движения точки его удобнее разложить на относительное и переносное движение.

На рис. 44 показано движение точки M в системе $Oxyz$ – относительное движение. Линия AB , которую точка M описывает в этой системе, называется *относительной траекторией*. Скорость и ускорение точки M в этом движении называются относительными скоростью и ускорением и обозначаются $\vec{V}_{отн}$, $\vec{a}_{отн}$ или $\vec{V}_r$, $\vec{a}_r$ соответственно.

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ относительно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$, является для точки M переносным движением (линия mE).

Траектория, скорость и ускорение той точки m подвижной системы, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M , называются переносными траекторией, скоростью и ускорением. Обозначаются $\vec{V}_{\text{пер}}$, $\vec{a}_{\text{пер}}$ или $\vec{V}_e$, $\vec{a}_e$ соответственно.

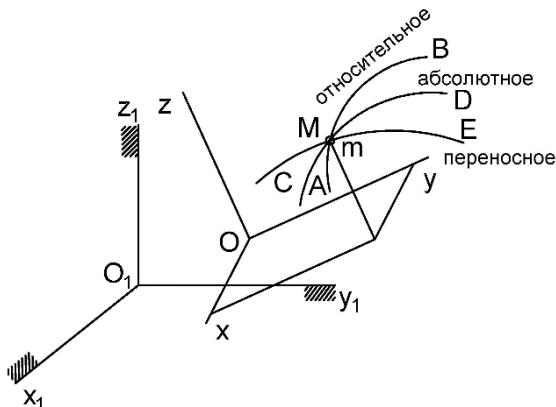


Рис. 44. Относительное, переносное, абсолютное движения.

Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, называют сложным или абсолютным. Обозначают абсолютную скорость и ускорение $\vec{V}_{\text{абс}}$, $\vec{a}_{\text{абс}}$ или $\vec{V}_a$, $\vec{a}_a$ соответственно.

Линия CD , описываемая точкой M в этой системе, называется абсолютной траекторией. Скорость и ускорение есть абсолютные скорость и ускорение точки M .

Теорема о сложении скоростей

Положение точки M в подвижной системе отсчета $Oxyz$ определяется радиус-вектор $\vec{r}$, а в неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$ – радиус-вектор $\vec{r}_1$ (рис. 45).

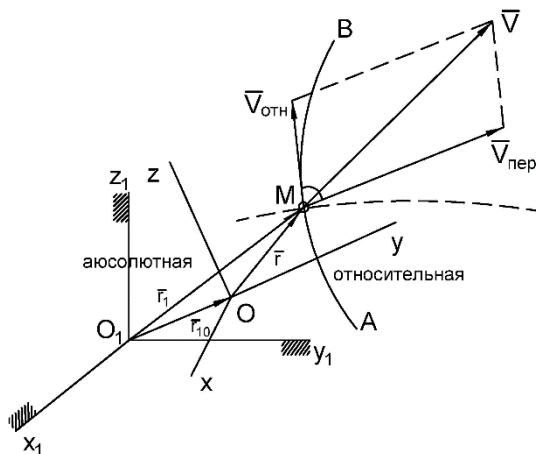


Рис. 45. Скорость точки M .

Доказательство. Обозначим радиус-вектор точки O , начала координат подвижной системы относительно неподвижной системы отсчета, $\bar{r}_{10}$, тогда получим

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{10} + \bar{r}. \quad (44)$$

Выражение (44) есть уравнение движения точки M в векторной форме. Если продифференцируем его, то найдем скорость:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{d\bar{r}_{10}}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_{10}}{dt} + \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_{r=const} + \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_{i,j,k=const}. \quad (45)$$

Первые два слагаемых характеризуют движение точки m подвижной системы отсчета, с которой совпадает точка M , а третье слагаемое – движение точки M в подвижной системе. Следовательно,

$$\frac{d\bar{r}_{10}}{dt} + \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_{r=const} = \bar{V}_{пер}, \quad \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_{i,j,k=const} = \bar{V}_{отн}. \quad (46)$$

И окончательно получаем

$$\bar{V} = \bar{V}_{отн} + \bar{V}_{пер}. \quad (47)$$

Выражение (47) есть *теорема о сложении скоростей*: абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей этой точки.

Направлены векторы скоростей по касательной к соответствующим траекториям. Модуль абсолютной скорости можно определить по теореме косинусов или методом проекций на дополнительные

оси с началом в точке M :

$$V = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_{\text{пер}}^2 + 2 \cdot V_{\text{отн}} \cdot V_{\text{пер}} \cdot \cos(\bar{V}_{\text{отн}}, \bar{V}_{\text{пер}})}. \quad (48)$$

Сложение ускорений. Теорема Кориолиса

Ускорение показывает изменение скорости точки с течением времени:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d\bar{V}_{\text{отн}}}{dt} + \frac{d\bar{V}_{\text{пер}}}{dt}. \quad (49)$$

Слагаемые в (49) показывают изменения скоростей в абсолютном движении, когда два движения совершаются одновременно, а значит можно записать так:

$$\bar{a} = \left(\frac{d\bar{V}_{\text{отн}}}{dt} \right)_{\text{отн}} + \left(\frac{d\bar{V}_{\text{отн}}}{dt} \right)_{\text{пер}} + \left(\frac{d\bar{V}_{\text{пер}}}{dt} \right)_{\text{пер}} + \left(\frac{d\bar{V}_{\text{пер}}}{dt} \right)_{\text{отн}}. \quad (50)$$

Согласно определению относительного и переносного движений

$$\left(\frac{d\bar{V}_{\text{отн}}}{dt} \right)_{\text{отн}} = \bar{a}_{\text{отн}}, \left(\frac{d\bar{V}_{\text{пер}}}{dt} \right)_{\text{пер}} = \bar{a}_{\text{пер}}. \quad (51)$$

Введем обозначение

$$\left(\frac{d\bar{V}_{\text{отн}}}{dt} \right)_{\text{пер}} + \left(\frac{d\bar{V}_{\text{пер}}}{dt} \right)_{\text{отн}} = \bar{a}_{\text{пов}} = \bar{a}_{\text{кор}}. \quad (52)$$

Формула (50) с учетом (51) и (52) принимает следующий вид:

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{отн}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}. \quad (53)$$

Уравнение (53) есть *теорема Кориолиса*: при сложном движении точки ее абсолютное ускорение равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова. В общем случае формулу (53) можно записать так:

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{отн}}^r + \bar{a}_{\text{отн}}^n + \bar{a}_{\text{пер}}^r + \bar{a}_{\text{пер}}^n + \bar{a}_{\text{кор}}. \quad (54)$$

Модуль абсолютного ускорения находят методом проекций равенства (54) на дополнительные оси координат с началом в самой точке.

Ускорение Кориолиса

Величина $\bar{a}_{\text{кор}}$, показывающая изменение относительной скорости в переносном движении и переносной скорости в относительном движении, называется поворотным или *кориолисовым ускорением* (по имени французского ученого Г. Кориолиса).

Ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости переносного движения на вектор относительной скорости точки:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2 \cdot \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{V}_{\text{отн}}. \quad (55)$$

Направлен вектор $\vec{a}_{\text{кор}}$ перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\vec{\omega}_{\text{пер}}$, $\vec{V}_{\text{отн}}$, в ту сторону, откуда виден поворот $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ и $\vec{V}_{\text{отн}}$ против хода часовой стрелки (рис. 46).

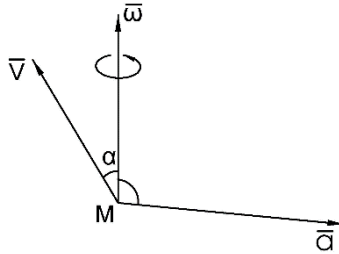


Рис. 46. Кориолисово ускорение.

Направление *кориолисова ускорения* можно найти, повернув проекцию относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости, на 90° в сторону переносного вращения (*правило Жуковского*) (рис.47).

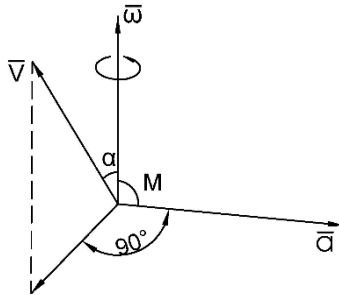


Рис. 47. Правило Жуковского.

Для определения численного значения ускорения Кориолиса используют выражение

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2 |\vec{\omega}_{\text{пер}}| \cdot |\vec{V}_{\text{отн}}| \cdot \sin(\widehat{\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{V}_{\text{отн}}}). \quad (56)$$

Ускорение Кориолиса может быть равным нулю в следующих случаях:

1. если $\vec{\omega}_{\text{пер}} = \mathbf{0}$, т.е. в случаях поступательного переносного

движения или в те моменты времени, когда $\omega_{\text{пер}} = 0$;

2. если $V_{\text{отн}} = 0$, т.е. если в данный момент времени относительная скорость обращается в нуль;

3. если $\sin(\widehat{\bar{\omega}_{\text{пер}}, \bar{V}_{\text{отн}}}) = 0$, т.е. когда $\bar{\omega}_{\text{пер}} \parallel \bar{V}_{\text{отн}}$.

Для примера изобразим слагаемые абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M , движущейся по хорде ускоренно вращающейся платформы вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости платформы (рис. 48).

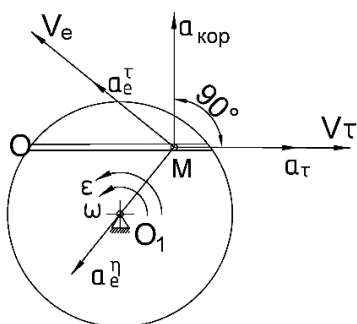


Рис. 48. Движение точки M по хорде.

Укажем слагаемые абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M , движущейся по образующей конуса вокруг оси конуса (рис. 49).

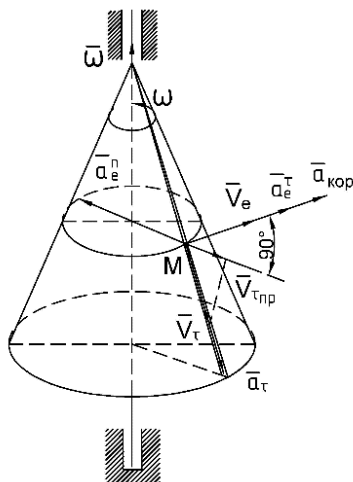


Рис. 48. Движение точки M по образующей конуса.

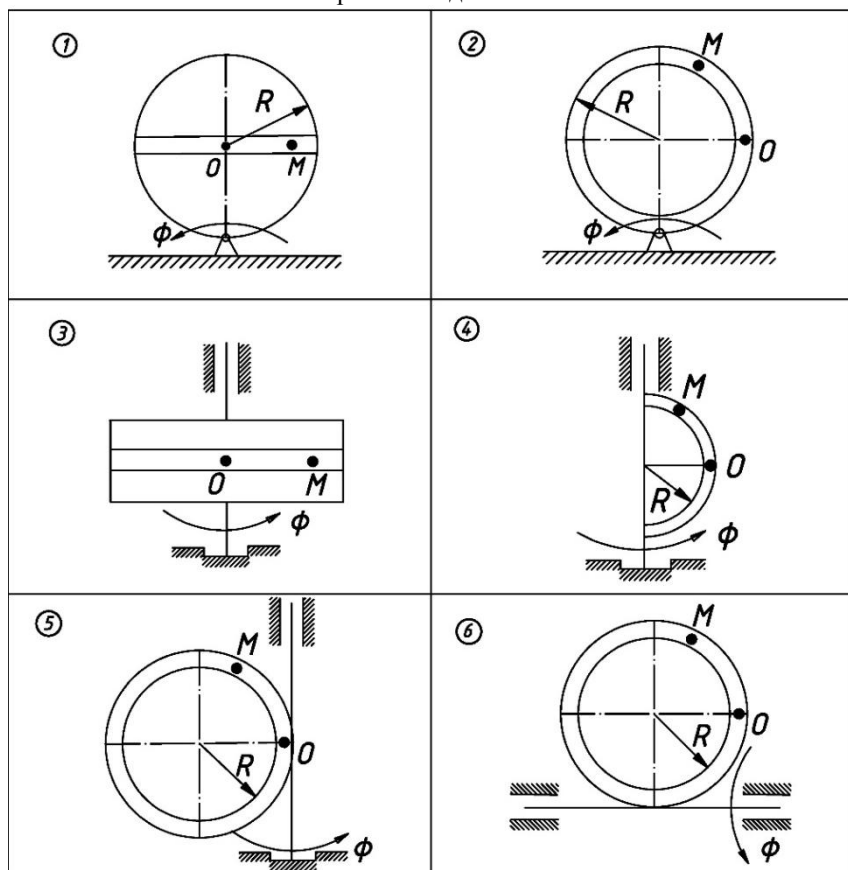
Задача К-4 **Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки**

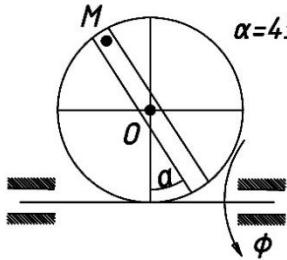
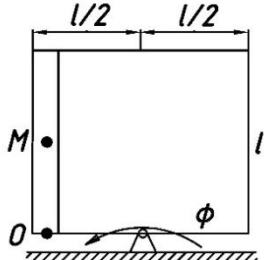
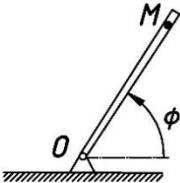
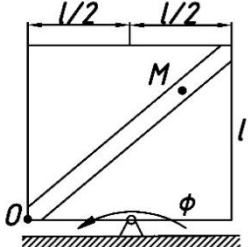
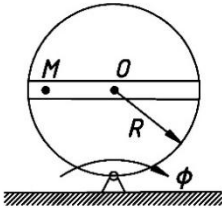
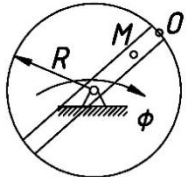
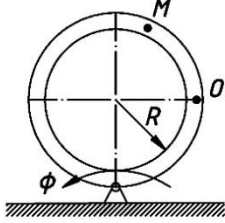
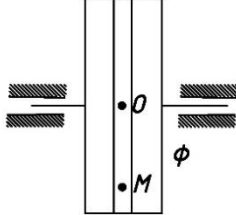
Исходные данные

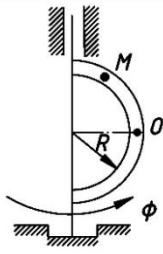
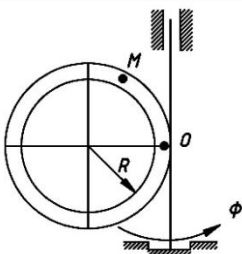
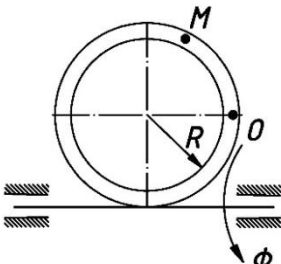
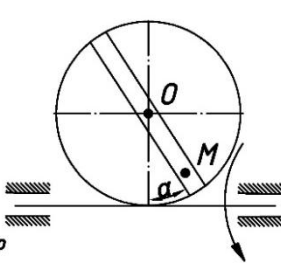
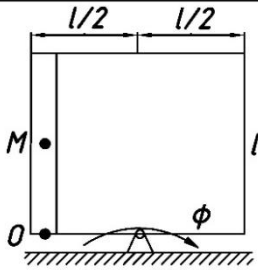
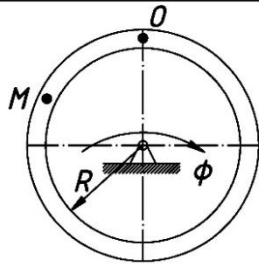
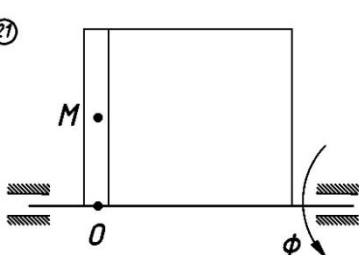
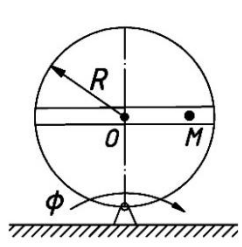
В приведенных схемах (табл. 6) показано движение точки M в желобе вращающегося тела. По заданным в табл. 7 уравнениям относительного движения $OM(t)$, переносного движения $\phi(t)$ и геометрическим размерам определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в указанный момент времени $t = t_1$.

Таблица 7

Варианты заданий



7 	8 
9 	10 
11 	12 
13 	14 

15 	16 
17 	18  $\alpha = 45^\circ$
19 	20 
21 	22 

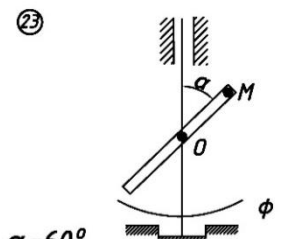
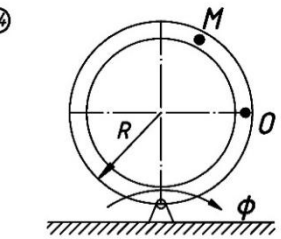
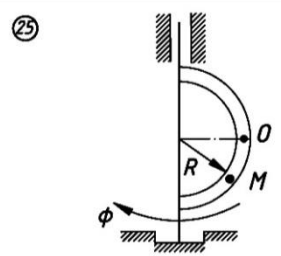
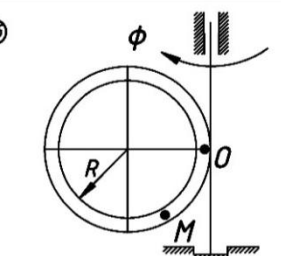
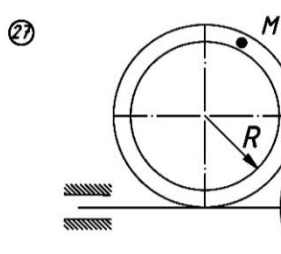
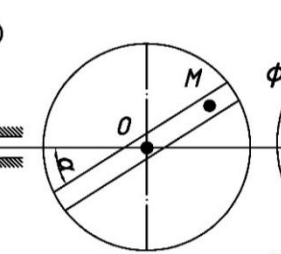
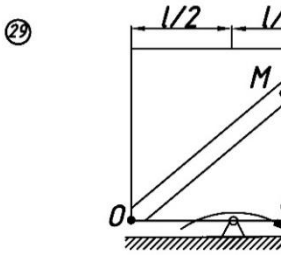
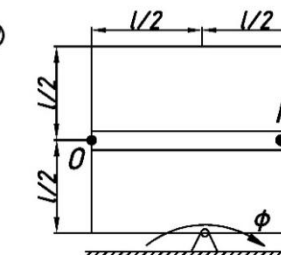
23  $\alpha = 60^\circ$	24 
25 	26 
27 	28  $\alpha = 60^\circ$
29 	30 

Таблица 8

Варианты заданий

№ вар.	$OM(t)$, м	$\varphi(t)$, рад	R или l , м	t_1 , с
1	$t^2 - t$	$0,5t^2 + t$	20	1
2	$5\pi(2t^2 + t)$	$2t^2$	15	1
3	$5(t^2 - t)$	$0,5t^2 + t$		2
4	$5\pi(t^2 - 3)$	$3t^2 - 8t$	20	2
5	$10\pi t^2$	$2t^2 - t$	20	1
6	$15\pi(t^2 - 2t)$	$6t - 4t^2$	30	2
7	$t^2 + 3t - 1$	$2t^2 - 3t$		1
8	$t^3 - 4t$	$0,5t^2$	6	2
9	$2t^3 - t$	$4t - t^2$		1
10	$t^3 - t$	$4t - t^2$	4	1
11	$2t^2 + 2t$	$0,5t^2$	4	1
12	$4t^2 + 6t$	$2t^2 - 6t$	40	2
13	$5\pi(2t^2 - t)$	$t^2 + t$	10	1
14	$t^2 - 2t + 1$	$0,5t^2 + 2t$		2
15	$5\pi(t^2 - 2)$	$2(t^2 - t)$	20	1
16	$15\pi t^2$	$t^2 + t$	10	1
17	$5\pi(2t^2 - t)$	$t^2 + t$	20	1
18	$t^3 - 2t^2 + 8$	$3t^2 - 8t$		2
19	$8t^2 - 2t$	$4t^2$	2	0,5
20	$10\pi t^2$	$4t^2 - 2t$	20	1
21	$t^4 - 4t$	$3t^2 - 8t$		2
22	$3t^2 - t$	$t^2 + 3t$	2	1
23	$10\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	t^2		1
24	$10\pi(t^2 - t)$	$4t^2 - 2t$	10	1
25	$10\pi t^2$	$2t^2 - t$	30	1
26	$5\pi t^2$	$t^2 + t$	20	1
27	$20\pi t^2$	$t^2 + t$	20	1
28	$-3t^2$	$4(t^2 - 3t)$		2
29	$3\sqrt{2}(t^2 + t - 1)$	$t^2 - t$	6	1
30	$4t^2$	$2t - 0,5t^2$	4	1

Пример 6

Точка M движется относительно тела E . По заданным уравнениям относительного движения и точки M и движения тела E определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M .

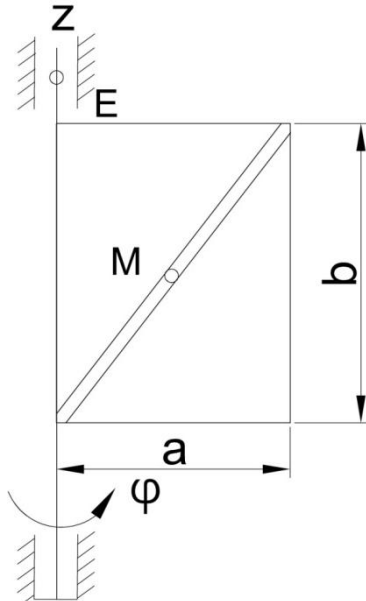


Рис. 49. Расчетная схема механизма.

Дано:

$$OM = S = 2t^2 - 3t + 4 \text{ м}$$

$$\varphi = 2 \sin \frac{\pi t}{3} \text{ рад}$$

$$t = t_1 = 1 \text{ с}$$

$$a = 3 \text{ м}$$

$$b = 4 \text{ м}$$

Найти:

$$\vec{V}_{абс}, \vec{a}_{абс} - ?$$

Решение:

Рассмотрим движение точки M

- движение точки M относительно трубки в плоскости пластины – относительное;
- вращение точки вместе с пластиной относительно оси z – переносное;
- движение точки относительно оси z – абсолютное.

Найдем положение точки M на прямой AB , вдоль которой происходит движение для заданного момента времени t_1 . По известным a и b найдем $AB = 5\text{ м}$. Для $t = t_1 = 1\text{ с}$ определим $AM = S = 3\text{ м}$.

Определим скорость шарика согласно теореме о сложении скоростей

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_{\text{пер}},$$

изображая соответствующие векторы $\vec{V}_{\text{отн}}$; $\vec{V}_{\text{пер}}$; $\vec{V}_{\text{абс}}$ на рис. 50.

Найдем относительную скорость точки M

$$V_{\text{отн}} = \frac{dS}{dt} = 4t - 3.$$

Для заданного момента времени $t = t_1 = 1\text{ с}$ относительная скорость будет иметь значение $V_{\text{отн}} = 1\text{ м/с}$.

Т.к. движение точки в плоскости пластины прямолинейное, то $\vec{V}_{\text{отн}}$ направлена вдоль траектории AB по направлению движения.

Найдем переносную скорость точки M

$$V_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} \cdot R,$$

где R – расстояние от точки M до оси вращения z .

Определим R . Из подобия треугольников $\triangle OAM$ и $\triangle O_1AB$ составим выражение:

$$\frac{R}{a} = \frac{AM}{AB};$$

$$R = \frac{a \cdot AM}{AB} = \frac{3 \cdot 3}{5} = 1,8\text{ м}.$$

Найдем $V_{\text{пер}}$, предварительно рассчитав угловую скорость вращения пластины относительно оси z

$$\omega_{\text{пер}} = \frac{d\varphi}{dt}; \omega_{\text{пер}} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ рад/с}.$$

$$V_{\text{пер}} = \frac{\pi}{3} \cdot 1,8 = 1,9\text{ м/с}$$

$\omega_{\text{пер}}$ – вектор, направленный по касательной к окружности по направлению угловой скорости $\omega_{\text{пер}}$, т.е. $\vec{V}_{\text{пер}}$ направлен параллельно оси D_x , противоположно ее положительному направлению.

Так как векторы $\vec{V}_{\text{отн}}$ и $\vec{V}_{\text{пер}}$ расположены перпендикулярно друг другу, то для расчета модуля $\vec{V}_{\text{абс}}$ достаточно воспользоваться теоремой Пифагора

$$V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{пер}}^2 + V_{\text{отн}}^2}; V_{\text{абс}} = \sqrt{1,9^2 + 1^2} = 2,2\text{ м/с}.$$

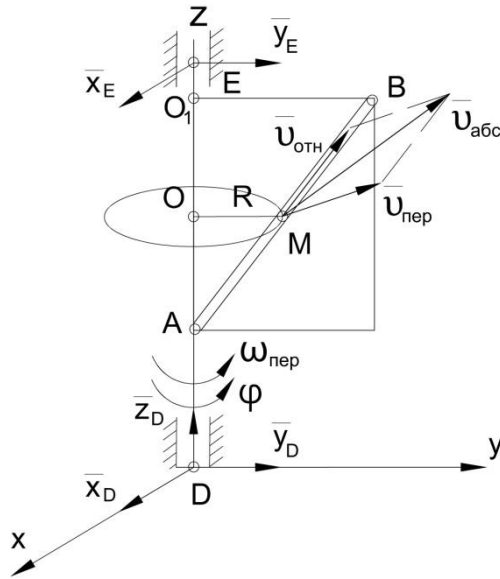


Рис. 50. Относительная, переносная, абсолютная скорости точки M .

Найдем абсолютное ускорение точки M , пользуясь теоремой об ускорениях:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{abc} &= \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \\ \bar{a}_{abc} &= \bar{a}_{отн}^{\tau} + \bar{a}_{отн}^n + \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n + \bar{a}_{кор}.\end{aligned}$$

По мере определения ускорений соответствующие величины будем отображать на рис. 51.

$$a_{отн}^{\tau} = \frac{d^2 s}{dt^2}; a_{отн}^{\tau} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Вектор тангенциального ускорения относительного движения $\bar{a}_{отн}^{\tau}$ направлен также как вектор относительной скорости $\bar{V}_{отн}$.

Т.к. точка M совершает относительное движение вдоль прямой AB , то $\bar{a}_{отн}^n = 0$.

$$a_{пер}^{\tau} = \varepsilon_{пер} \cdot R.$$

Найдем угловое ускорение пластины $\varepsilon_{пер}$

$$\varepsilon_{пер} = \frac{d\omega_{пер}}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2};$$

$$\varepsilon_{\text{пер}} = -2 \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \sin \frac{\pi t}{3} = -1,9 \text{ рад}/c^2.$$

Вращение замедленное, на это указывает знак «-» углового ускорения $\varepsilon_{\text{пер}}$.

$$a_{\text{пер}}^{\tau} = -3,4 \text{ м}/c^2.$$

$\vec{a}_{\text{пер}}^{\tau}$ – вектор, направленный по касательной к траектории вращения по направлению углового ускорения $\varepsilon_{\text{пер}}$.

$$a_{\text{пер}}^n = \omega_{\text{пер}}^2 R; a_{\text{пер}}^n = 2 \text{ м}/c^2.$$

$\vec{a}_{\text{пер}}^n$ – вектор, направленный по главной нормали n , внутрь вогнутости траектории, к оси вращения z .

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega}_{\text{пер}}; \vec{V}_{\text{отн}}];$$

$$a_{\text{кор}} = 2|\vec{\omega}_{\text{пер}}| \cdot |\vec{V}_{\text{отн}}| \cdot \sin(\vec{\omega}_{\text{пер}} \wedge \vec{V}_{\text{отн}});$$

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 1 \cdot \sin \alpha$$

Определим $\sin \alpha$, где α – угол между $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ и $\vec{V}_{\text{отн}}$

$$\sin \alpha = \frac{a}{AB} = \frac{3}{5} = 0.$$

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 1 \cdot 0,6 = 1,3 \text{ м}/c^2.$$

Пользуясь изображением векторов скоростей на рис. 50, построим $\vec{a}_{\text{кор}}$ согласно правилу Жуковского.

$\vec{a}_{\text{кор}}$ – вектор направленный параллельно оси Dx противоположно ее положительному направлению.

Для определения значения $a_{\text{абс}}$ воспользуемся методом проекций на оси координат. Возьмем проекцию равенства

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}}^{\tau} + \vec{a}_{\text{отн}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{кор}}$$

на каждую из на каждую из осей координат:

$$x: a_{\text{абс } x} = a_{\text{пер}}^{\tau} - a_{\text{кор}};$$

$$y: a_{\text{абс } y} = -a_{\text{пер}}^n + a_{\text{отн}}^{\tau} \cdot \sin \alpha;$$

$$z: a_{\text{абс } z} = a_{\text{отн}}^{\tau} \cdot \cos \alpha.$$

В полученные выражения проекций подставим ранее найденные значения величин ускорений:

$$a_{\text{абс } x} = -3,4 - 1,3 = -4,7 \text{ м}/c^2;$$

$$a_{\text{абс } y} = -2 + 4 \cdot \frac{3}{5} = 0,4 \text{ м}/c^2;$$

$$a_{\text{абс } z} = 4 \cdot \frac{4}{5} = 3,2 \text{ м}/c^2.$$

Подставим значения проекций в равенство

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс } x}^2 + a_{\text{абс } y}^2 + a_{\text{абс } z}^2}; a_{\text{абс}} = 5,7 \text{ м}/c^2$$

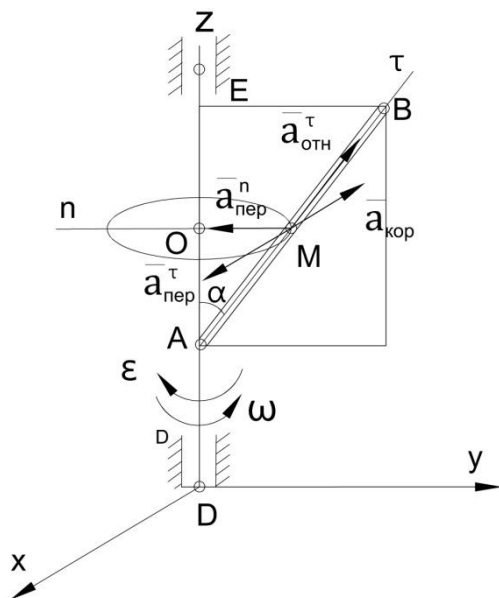


Рис. 51. Ускорения точки М.

Ответ: $V_{abc} = 2,2 \text{ м/с}$; $a_{abc} = 5,7 \text{ м/с}^2$.

Приложения

Приложение 1

Требования к оформлению расчетно-графических заданий (РГЗ)

Расчетно–графическое задание включает в себя несколько задач. По мере изучения материала студенты получают индивидуальные задания в виде задач по соответствующей теме.

К каждой задаче дается несколько рисунков и таблица с вариантами исходных данных. Студент по номеру своего варианта выбирает номер рисунка и исходные данные задачи. Задачи выполняют на листах формата А4. Титульный лист оформляют, в соответствии с прил. 2. На второй странице приводит условие задачи, рисунок к ней, расчетную схему, а затем решение. Решение задачи сопровождают краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяет, откуда получает те или иные результаты и т.п.). Все решение выполняют в общем виде, а числовые значения величин подставляют только в конечную формулу, производят расчет и получают результат, определяющий искомую величину.

Текстовую часть и рисунки предпочтительно выполнять на компьютере: текст - в текстовом редакторе шрифтом Times New Roman 14пт, межстрочный интервал – одинарный, формулы и вычисления - в редакторе формул, а рисунки - в любом графическом редакторе (AutoCAD, Компас-3D и т.д.). Рисунки должны соответствовать требованиям ЕСКД. Образцы оформления задач можно взять из соответствующих примеров в тексте пособия.

Титульный лист расчетно-графического задания

Министерство науки и высшего образования РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

Расчетно-графическое задание – 1

Задача К – 1

«Определение кинематических характеристик точки»

выполнил:
студент гр. С -11
Семенов С.С.
проверил:
доцент
Сергеев И.П.

Белгород – 2019

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мещерский, И.В.* Задачи по теоретической механике: учеб. пособие. / И.В. Мещерский. – изд. 48-е, стер. – СПб.: изд-во "Лань", 2008. – 448 с.
2. *Яблонский, А.А.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др.; под ред. А.А. Яблонского. – 13-е изд., стер. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 384 с.
3. *Воробьев, Н.Д.* Сборник расчетно-графических заданий по теоретической механике с примерами выполнения: учеб. пособие для студентов всех направлений бакалавриата/ Н.Д. Воробьев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2009. – 274 с.
4. *Бать, М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика: учеб. пособие/ М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. - СПб.: "Лань", 2013. – 672 с.
5. *Диевский, В.А.* Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие.- С-П.: Изд-во «Лань», 2009 – 192 с.
6. *Кирсанов, М.Н.* Решебник. Теоретическая механика. под ред. А.И. Кириллова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.
7. *Дегтярь, А.Н.* Кинематический анализ движения плоского многозвенного механизма: методические указания к выполнению расчетно-графического задания по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов всех специальностей / А.Н. Дегтярь, И.В. Колмыкова. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2010. – 46 с.
8. *Воробьев, Н.Д.* Кинематика: конспект лекций для студентов всех специальностей / Н.Д. Воробьев, Л. Н. Спиридонова, А.Н. Дегтярь,. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2003. – 61 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Кинематика точки.....	4
Задача К– 1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения.....	15
Пример 1.....	17
Кинематика твердого тела.....	21
Задача К - 2. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движении тела.....	26
Пример 2.....	32
Пример 3.....	35
Плоскопараллельное движение твердого тела.....	37
Задача К – 3. Кинематический анализ плоского многозвенного механизма.....	47
Пример 4.....	52
Пример 5.....	59
Сложное движение точки.....	66
Задача К – 4. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки.....	72
Пример 6.....	77
Приложения.....	82
Приложение 1. Требования к оформлению расчетно-графических заданий.....	82
Приложение 2. Титульный лист расчетно-графического задания.....	83
Библиографический список.....	84

Учебное издание

Теоретическая механика

Кинематика

Сборник заданий

Колмыкова Ирина Владимировна

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16. Усл. печ. л. . Уч. - изд. л. .

Тираж 200 экз. Заказ Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46