

Министерство образования и науки Российской Федерации
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г.Шухова

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
С ОСНОВАМИ СТАТИКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ
И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

*Утверждено ученым советом университета в качестве
учебного пособия для студентов очной формы
обучения направлений: 23.03.01 – Технология транспортных
процессов, 07.03.03 – Дизайн архитектурной среды,
07.03.01 – Архитектура*

Белгород
2016

УДК531.11.12 + 620.1(07)

ББК 38.112+30.121е7

С64

Авторы:

А.Н. Дегтярь, к.т.н., доц., А.Г. Юрьев, д.т.н., проф., Н.А. Смоляго, к.т.н., доц.,
И.Р. Серых, к.т.н., доц., О.А. Яковлев, доц.

Р е ц е н з е н т ы:

Ведущий инженер-конструктор ООО «ПСК»БелЭнергоСтрой», кандидат технических наук, доцент *А.С. Горшков*

Доктор технических наук, профессор Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова *Г.А.Смоляго*

С64 **Сопротивление** материалов с элементами статики абсолютно твердых и деформируемых тел: учеб.пособие / А.Н. Дегтярь, А.Г. Юрьев, Н.А. Смоляго и др. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2016. – 96 с.

В учебном пособии изложены основные принципы и методы сопротивления материалов с основами статики абсолютно твердых и деформируемых тел применительно к анализу инженерных конструкций. Проведено согласование соответствующих курсов теоретической механики и сопротивления материалов. Книга содержит примеры решения типовых задач, вопросы для самостоятельной работы студентов и справочный материал.

Учебное пособие предназначено для студентов направлений 23.03.01 – Технология транспортных, 07.03.03 – Дизайн архитектурной среды, 07.03.01 – Архитектура.

Данное издание публикуется в авторской редакции

УДК 531.11.12 + 620.1(07)
ББК 38.112+30.121е7

- © Дегтярь А.Н., Юрьев А.Г., Смоляго Н.А., Серых И.Р., Яковлев О.А., 2016
- © Белгородский государственный технологический университет (БГТУ) им. В.Г. Шухова, 2016

Оглавление

Введение.....	5
1. Статика абсолютно твердого тела	6
1.1 Основные понятия и аксиомы статики.....	6
1.2 Система сходящихся сил	11
1.2.1 Задачи сложения системы сходящихся сил	11
Пример 1.1.....	12
1.2.2 Проекция силы на ось	13
1.2.3 Определение условий равновесия системы сходящихся сил.....	15
1.3 Момент силы относительно точки. Теорема Вариньона. Сложение параллельных сил.....	16
1.4 Теория пар сил, расположенных в одной плоскости	19
1.4.1 Момент пары сил.....	19
1.5 Произвольная плоская система сил	20
1.5.1 Теорема Пуансо	20
1.5.2 Условие равновесия плоской системы сил	21
1.5.3 Равновесие плоской системы параллельных сил	22
1.5.4 Распределенные силы	22
1.5.5 Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела. Способы определения координат центров тяжести однородных тел	23
Примеры решения задач.....	26
Пример 1.2	26
Пример 1.3	27
Пример 1.4	30
Пример 1.5	30
Пример 1.6	32
Пример 1.7	32
Пример 1.8	34
Пример 1.9	36
Вопросы для самоконтроля	38
2. Статика деформируемого тела	39
2.1 Основные понятия.....	39
2.2 Внутренние силы. Метод сечений	40
2.2.1 Внутренние силовые факторы в сечениях балки	42
Пример 2.1.....	43
Пример 2.2.....	45
2.2.2 Внутренние силовые факторы в сечениях рамы	48
Пример 2.3.....	48
Пример 2.4.....	50

2.2.3 Кручение бруса.....	54
Пример 2.5.....	54
2.3 Напряжения	55
2.4 Деформации и перемещения	57
2.5 Изгиб прямых стержней	58
2.5.1 Нормальные напряжения.....	58
2.5.2 Касательные напряжения	61
2.5.3 Главные напряжения.....	62
2.5.4 Дифференциальное уравнение упругой линии и его интегрирование	63
2.5.5. Метод начальных параметров.....	64
Пример 2.6.....	66
2.6 Геометрические характеристики плоских сечений.....	71
Пример 2.7	73
2.7 Шарнирные фермы.....	74
2.7.1 Понятие о фермах.....	74
2.7.2 Расчет по методу вырезания узлов	78
2.7.3 Расчет по методу сечений.....	78
2.7.4 Матричная форма определения усилий	80
Пример 2.8.....	80
Вопросы для самоконтроля	82
Приложения	84

Введение

Статика (учение о равновесии) – раздел механики, посвященный изучению условий равновесия материальных тел под действием сил. Статику разделяют на геометрическую и аналитическую.

В основе аналитической статики лежит принцип возможных перемещений, дающий общее условие равновесия любой механической системы. Этот принцип гласит: в случаях равновесия системы с двусторонними связями суммы работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равны нулю.

Внутренние силы возникают в деформированном теле и отсутствуют в абсолютно твердом теле. Сплошное твердое деформируемое тело состоит из материальных точек (бесконечно малых элементов), сплошь распределенных по объему тела и соединенных между собой податливыми связями.

Равновесие системы тел изучают, составляя уравнения равновесия для каждого тела или его части в отдельности и учитывая закон равенства действия и противодействия.

Если общее число реакций связей окажется больше числа уравнений, содержащих эти реакции, то соответствующая система является статически неопределимой; для изучения ее равновесия надо учесть закон совместности деформаций.

Необходимо помнить, что из определенных таким образом состояний равновесия практически реализуются те, которые являются устойчивыми. Под устойчивостью понимается способность сохранять определенную начальную форму равновесия.

Учебное пособие содержит необходимое количество примеров, способствующих лучшему восприятию теоретического материала, и могут быть использованы при самостоятельном изучении курса.

1. Статика абсолютно твердого тела

1.1 Основные понятия и аксиомы статики

Статика – это раздел механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы сил и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Круг проблем, рассматриваемых в механике, очень велик и с развитием этой науки в ней появился целый ряд областей. К этим областям относятся: теория упругости, теория пластичности, гидро- и аэромеханика и ряд других областей. Во всех этих областях методы исследования опираются на ряд основных законов или принципов и используют многие понятия и методы, общие для всех областей механики.

Рассмотрение этих общих понятий, законов и методов и составляет предмет так называемой теоретической механики.

Материальное тело, размеры которого в рассматриваемых конкретных условиях можно не учитывать, называется **материальной точкой**.

Материальная точка обладает массой и способностью взаимодействовать с другими телами.

Системой материальных точек, или механической системой, называется такая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения других точек этой системы.

Абсолютно твердым, называется тело, у которого расстояние между любыми двумя точками остается неизменным.

Твердое тело может находиться в состоянии покоя или движения определенного характера. Каждое из этих состояний условимся называть **кинематическим состоянием тела**.

Сила – это мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

Сила характеризуется: модулем, направлением, точкой приложения и линией действия (рис. 1.1). Прямая, вдоль которой направлена сила, называется **линией действия силы** (рис. 1.2).

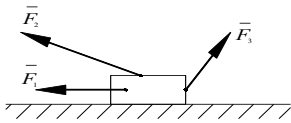


Рис. 1.1. Определение силы

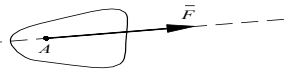


Рис. 1.2. Линия действия силы

Совокупность нескольких сил, действующих на тело, называется **системой сил**.

Системы сил, под действием каждой из которых твердое тело находится в одинаковом кинематическом состоянии, называются **эквивалентными**.

Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется **равнодействующей** (рис. 1.3).

Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону, называется **уравновешивающей силой** (рис. 1.4):

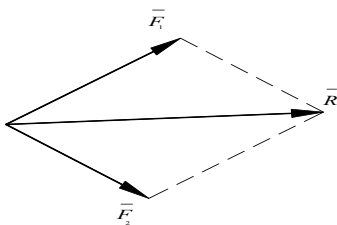


Рис. 1.3. равнодействующая

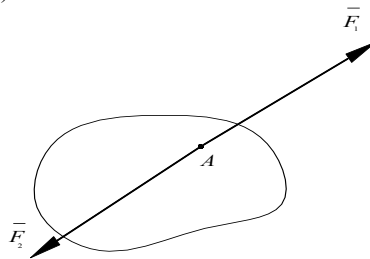


Рис. 1.4. уравновешивающая

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 .$$

Система сил, которая, будучи приложенной к твердому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния, называется **системой взаимно уравновешивающихся сил**.

Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то система сил называется **плоской**.

Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются **сходящимися**.

Силы, линии действия которых параллельны, называются **параллельными**.

Сила, приложенная к твердому телу в какой-нибудь одной его точке, называется **сосредоточенной**.

Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности твердого тела, называются **распределенными**.

Задачи статики

1. Преобразование систем сил, действующих на твердое тело, в системы им эквивалентные.
2. Определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

Аксиомы статики

1. АКСИОМА ИНЕРЦИИ

Под действием системы взаимно уравновешивающихся сил твердое тело находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

2. АКСИОМА РАВНОВЕСИЯ ДВУХ СИЛ

Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны и они направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны,

3. АКСИОМА ПРИСОЕДИНЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ УРАВНОВЕШИВАЮЩИХ СИЛ

Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

СЛЕДСТВИЕ: Не изменяя кинематического состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль линии ее действия, сохраняя неизменным ее модуль и направление.

В статике твердого тела сила рассматривается как **скользящий вектор**.

4. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА СИЛ

Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.5):

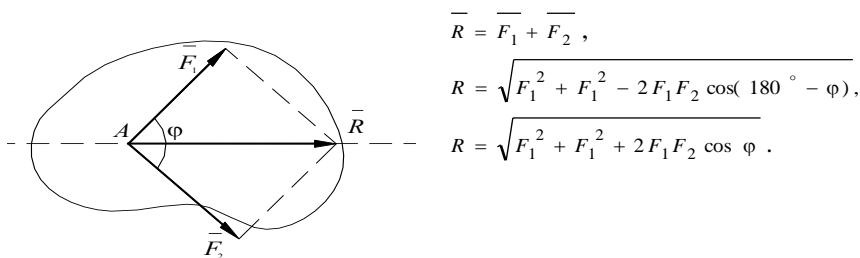


Рис. 1.5. Аксиома параллелограмма сил

5. АКСИОМА РАВЕНСТВА ДЕЙСТВИЯ И ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

6. АКСИОМА СВЯЗИ

Несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых сил, действуют реакции связи.

Связи и их реакции

Твердое тело называется **свободным**, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Твердое тело, свобода движения которого ограничена наложенными на него связями, называется **несвободным**.

Тело, ограничивающее свободу движения данного тела, является по отношению к нему **связью**.

Все силы, действующие на несвободное твердое тело можно разделить на задаваемые (активные) силы и реакции связей.

Активные силы выражают действие на твердое тело других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его кинематического состояния.

Реакцией связи называется сила или система сил, выражающая механическое действие связей на тело.

Типы связей и их реакции

1. Гладкая плоскость

Реакция гладкой плоскости направлена перпендикулярно к плоскости (рис. 1.6).

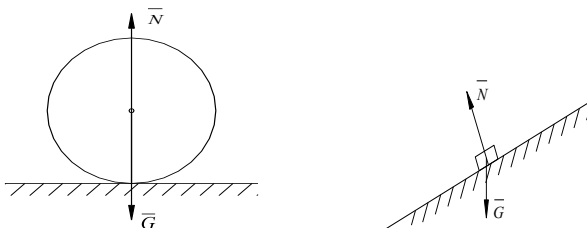


Рис. 1.6. Гладкая плоскость

Для определения каждой реакции нужно знать три ее элемента: модуль, направление и точку приложения.

Точка приложения, как правило, известна. Направление же реакций известно лишь для некоторых типов связей.

Если существует два взаимно перпендикулярных направления на плоскости, в одном из которых связь препятствует перемещению тела, а в другом нет, то направление ее реакции противоположно первому направлению.

2. Шарнирно-неподвижная опора

Препятствует любому поступательному движению тела, но дает ей возможность поворачиваться вокруг оси шарнира (рис. 1.7).

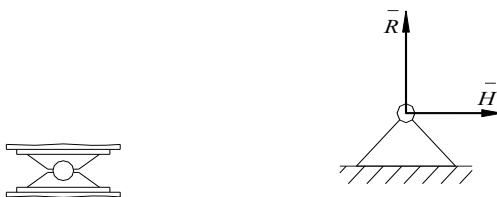


Рис. 1.7. Шарнирно-неподвижная опора

Известна точка приложения реакции, неизвестны модуль и направление.

3. Шарнирно-подвижная опора (рис. 1.8)



Рис. 1.8. Шарнирно-подвижная опора

Известна точка приложения реакции и ее направление, неизвестен модуль этой реакции.

4. Невесомый стержень



Реакция невесомого стержня направлена вдоль стержня. Неизвестен модуль этой реакции.

1.2 Система сходящихся сил

1.2.1 Задачи сложения системы сходящихся сил

Сложение сил. Геометрический способ сложения сил.

Величина, равная геометрической сумме сил какой-нибудь системы, называется **главным вектором** этой системы сил.

А. Сложение двух сил (рис.1.9):

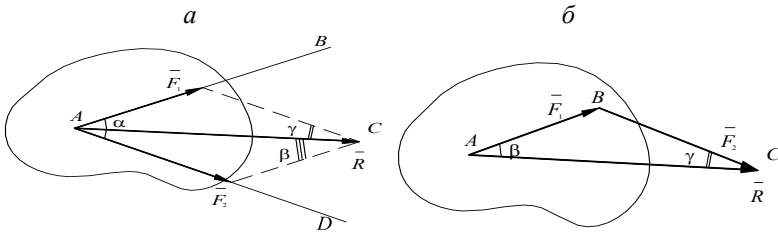


Рис. 1.9. Сложение двух сил: а – правило параллелограмма; б – правило треугольника

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}, \quad \frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Б. Сложение системы сил (рис. 1.10)

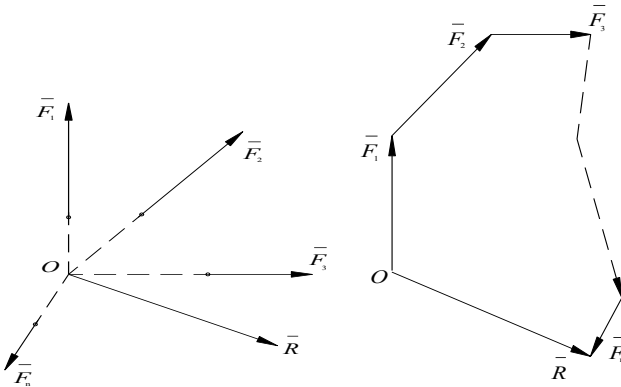


Рис. 1.10. Сложение системы сил

При сложении системы сил построение силового многоугольника более удобно:

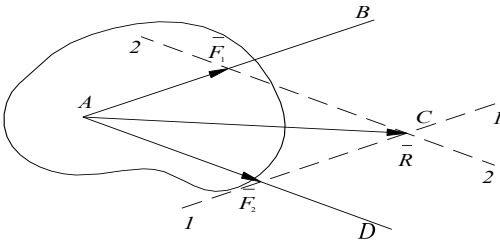
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Разложение сил

Разложить данную силу на несколько составляющих – это значит найти такую систему нескольких сил, для которых данная сила является равнодействующей.

Эта задача является неопределенной и имеет однозначное решение при задании дополнительных условий:

а) Разложение по двум заданным направлениям (рис. 1.11) – построение параллелограмма.



1-1 параллельна АВ
2-2 параллельна AD

Рис. 1.11. Разложение по двум заданным направлениям

На рис. 1.12 показано: как следует раскладывать силу \vec{R} в декартовой системе координат и как этого выполнять нельзя.

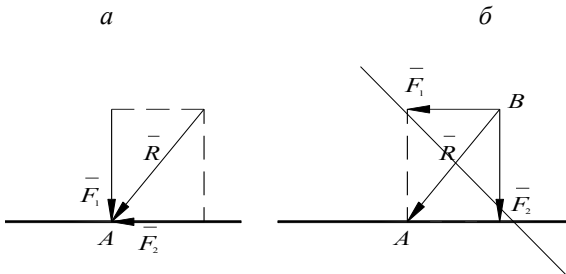
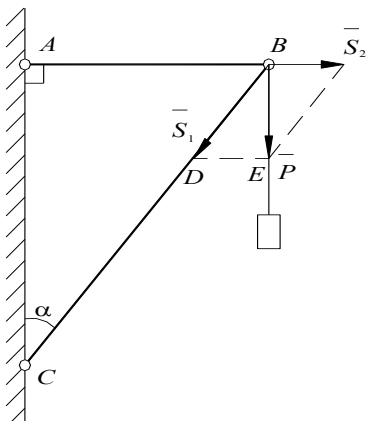


Рис. 1.12. Разложение силы: а – правильное; б – неправильное

Пример 1.1. Кронштейн прикреплен к стене в точках А и С (рис. 1.13). Так как система является уравновешенной, то усилия,



возникающие в стержнях, в сумме должны быть равны внешней силе \overline{P} . Разложим силу \overline{P} по двум направлениям AB и BC .

$\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ – усилия в стержнях.

$$S_1 = \frac{P}{\cos \alpha}; \quad S_2 = P \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Рис. 1.13. Кронштейн

1.2.2. Проекция силы на ось

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

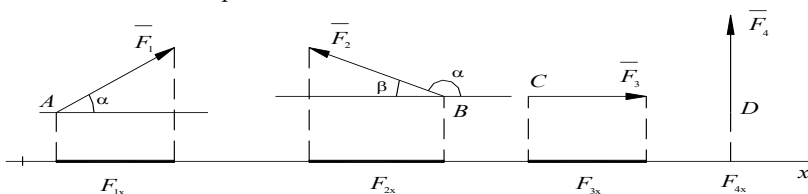


Рис. 1.14. Проекция силы на ось

Определим проекции нескольких сил в соответствии с определением (рис. 1.14)

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha; \quad F_{2x} = F_2 \cos \alpha, \quad \text{или} \quad F_{2x} = F_2 \cos(180^\circ - \beta), \quad \text{или} \\ F_{2x} = -F_2 \cos \beta; \quad F_{3x} = F_3; \quad F_{4x} = 0.$$

Аналитический способ сложения сил

Теорема:

Проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось (рис. 1.15).

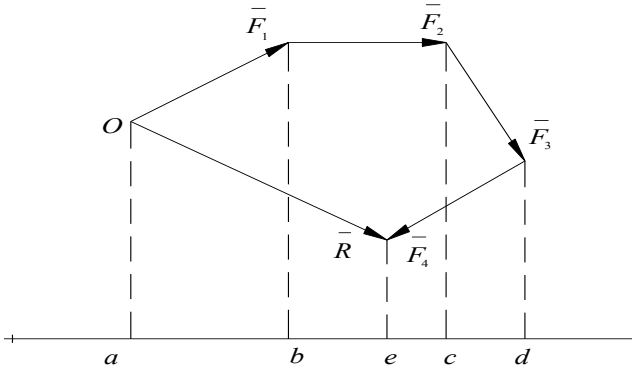


Рис. 1.15. К теореме о проекции вектора суммы

Доказательство.

Проекции можно определить как сумму длин отрезков:

$$\overline{ae} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} - \overline{de},$$

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4},$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}.$$

Для произвольной системы сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}, \dots, \overline{F_n}$ имеем:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^n \overline{F_k}.$$

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^n F_{kx}, & R_y &= \sum_{k=1}^n F_{ky}, & R_z &= \sum_{k=1}^n F_{kz} \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \\ \cos \alpha &= \frac{R_x}{R}, & \cos \beta &= \frac{R_y}{R}, & \cos \gamma &= \frac{R_z}{R}. \end{aligned} \right\} (1.1)$$

Формулы (1.1) позволяют решить задачу о сложении сил аналитически.

Аналитический способ задания сил

Правой системой координат называется такая система, в которой кратчайшее совмещение оси Ox с осью Oy происходит, если смотреть с положительного конца оси Oz , против хода часовой стрелки (рис. 1.16).

Задают силу проекциями на координатные оси.

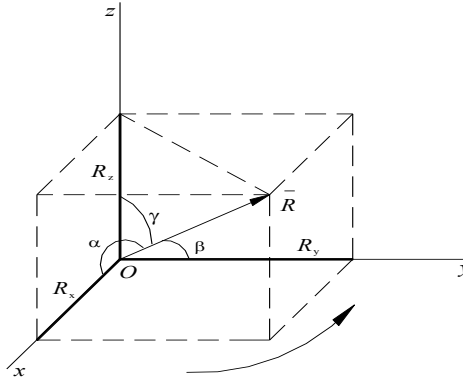


Рис. 1.16. Правая система координат

Модуль силы и направляющие косинусы определяют по формулам (1.1).

1.2.3. Определение условий равновесия системы сходящихся сил

Равнодействующая системы сходящихся сил

Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную **геометрической сумме** (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия.

Равновесие системы сходящихся сил

Равнодействующая, а, следовательно, и главный вектор системы сходящихся сил равны **нулю** $\vec{R} = 0$. Это условие является необходимым и достаточным.

1. Геометрическое условие равновесия

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был **замкнут**.

2. Аналитическое условие равновесия

Условие $\bar{R} = 0$, выполняется тогда когда

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (1.2)$$

Уравнения (1.2) выражают аналитическую форму условий равновесия.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

1.3. Момент силы относительно точки. Теорема Вариньона. Сложение параллельных сил

Точка, относительно которой берется момент, называется **центром момента**.

Момент силы относительно этой точки называется **моментом относительно центра**.

Если тело под действием некоторой силы может совершать вращение вокруг некоторой точки, то момент характеризует вращательный эффект силы.

Перпендикуляр, опущенный из центра на линию действия силы \bar{F} , называется **плечом силы** \bar{F} (т.е. это есть кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы – h) (рис. 1.17).

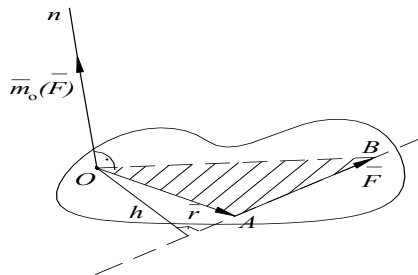


Рис. 1.17. Момент силы

Момент силы относительно центра O определяется:

- 1) модулем момента, $(F \cdot h)$;

- 2) положением в пространстве плоскости \overline{OAB} (плоскости поворота), проходящей через центр O и силу \overline{F} ;
- 3) направлением поворота в этой плоскости.

Моментом силы \overline{F} относительно центра O называется приложенный в центре O вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы \overline{F} на ее плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку O (центр) и силу, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки.

Размерность момента силы $[m_O(\overline{F})] = [\text{Н} \cdot \text{м}]$.

Модуль момента определяется по формуле

$$|\overline{m}_O(\overline{F})| = \pm F \cdot h. \quad (1.3)$$

Свойства момента силы

- 1) Момент силы не изменится при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия;
- 2) Момент силы равен нулю, когда сила равна нулю;
- 3) Момент силы равен нулю, когда линия действия силы проходит через точку O (центр), т.е. плечо равно нулю.

Теорема о моменте равнодействующей (Теорема Вариньона)

Теорема:

Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов сил системы относительно того же центра

$$\overline{m}_O(\overline{R}) = \overline{m}_O(\overline{F}_1) + \overline{m}_O(\overline{F}_2) + \overline{m}_O(\overline{F}_3) + \dots + \overline{m}_O(\overline{F}_n).$$

Доказательство

Пусть система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \dots, \overline{F}_n$ имеет равнодействующую \overline{R} , проходящую через некоторую точку C (рис. 1.18).

Приложим в точке C силу $\overline{R}' = -\overline{R}$. Тогда система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \dots, \overline{F}_n, \overline{R}'$ будет находиться в равновесии, т.е. выполняется условие $\overline{M}_O = 0$:

$$\sum_{k=1}^n \overline{m}_O(\overline{F}_k) + \overline{m}_O(\overline{R}') = 0.$$

Так как $\overline{R'} = -\overline{R}$, то $\overline{m}_O(\overline{R'}) = -\overline{m}_O(\overline{R})$ и следовательно

$$\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum_{k=1}^n \overline{m}_O(\overline{F}_k). \quad (1.4)$$

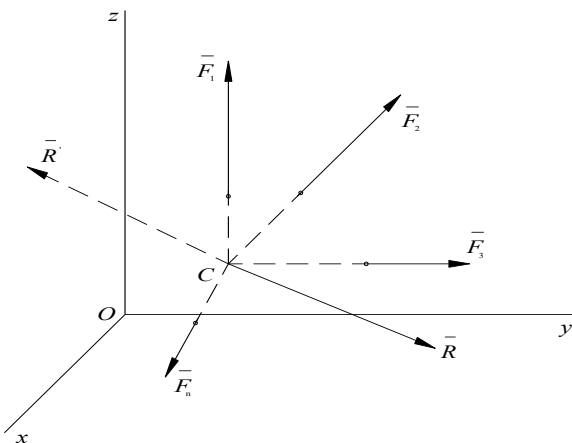


Рис. 1.18. К теореме Вариньона

Сложение параллельных сил

Равнодействующая \overline{R} двух параллельных сил \overline{F}_1 и \overline{F}_2 одного направления (рис. 1.19), имеет такое же направление, а ее модуль равен сумме модулей слагаемых сил.

Точка C приложения равнодействующей делит отрезок между точками A и B приложения сил на части, обратно пропорциональные модулям сил:

$$R = F_1 + F_2, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}, \quad \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AC + BC}{F_2 + F_1} = \frac{AB}{R}.$$

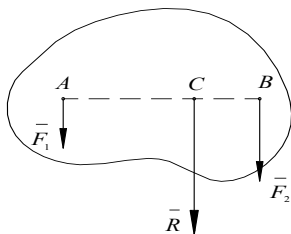


Рис. 1.19. Сложение параллельных сил одинакового направления

Равнодействующая \vec{R} двух параллельных сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 противоположного направления (рис. 1.20) имеет направление силы, большей по модулю, и модуль, равный разности модулей этих сил.

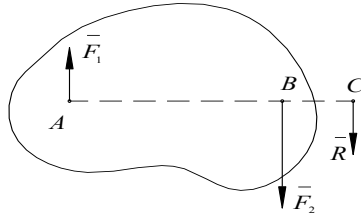


Рис. 1.20. Сложение параллельных сил противоположного направления

Точка C , приложения равнодействующей, лежит на продолжении отрезка AB за точкой приложения большей силы, на расстояниях от точек A и B , обратно пропорциональных модулям приложенных к ним сил:

$$R = F_2 - F_1, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}, \quad \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}.$$

1.4. Теория пар сил, расположенных в одной плоскости

1.4.1. Момент пары сил

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 1.21).

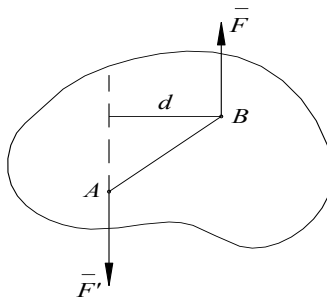


Рис. 1.21. Пара сил

Система сил \overline{F} и \overline{F}' не находится в равновесии, т.к. F и F' не лежат на одной прямой.

Следовательно, пара сил не имеет равнодействующей.

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется **плоскостью действия пары**.

Расстояние d называется **плечом пары**. (длина перпендикуляра между линиями действия сил пары).

Действие пары сводится к некоторому вращательному движению, которое характеризуется величиной, называемой моментом пары.

Этот момент определяется:

- 1) модулем, равным $F \cdot d$;
- 2) положением в пространстве плоскости действия сил пары;
- 3) направлением поворота пары в этой плоскости.

Таким образом, момент пары величина **векторная**.

Моментом пары сил называется вектор \overline{m} , модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия сил пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки.

Размерность момента $[\overline{m}] = [\text{Н} \cdot \text{м}]$.

Если на тело действует несколько пар с моментами $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3, \dots, \overline{m}_n$, то сумма моментов всех сил, образующих эти пары, относительно любого центра равна $\overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3 + \dots + \overline{m}_n$, то есть вся совокупность этих пар эквивалентна одной паре с моментом

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^n \overline{m}_k .$$

Этот результат выражает теорему о сложении пар.

1.5. Произвольная плоская система сил

1.5.1. Теорема Пуансо

Плоской системой сил называется система сил, как угодно расположенных в одной плоскости.

Теорема Пуансо

Теорема:

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится (рис. 1.22).

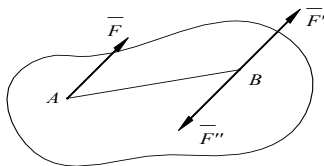


Рис. 1.22. К теореме Пуансо

Доказательство

\vec{F}' и \vec{F}'' - уравновешивающие.

$\vec{F}' = \vec{F}$, а $\vec{F}'' = -\vec{F}$.

\vec{F} и \vec{F}'' представляют пару с моментом $\vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F})$ и силу \vec{F}' .

Пример – рука человека, удерживающего стержень посередине и за конец стержня.

1.5.2. Условие равновесия плоской системы сил

Если для данной системы сил $\vec{R} = 0$ и $\vec{M} = 0$, то данная система сил находится в равновесии.

Основная форма условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (1.5)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

Вторая форма условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0. \quad (1.6)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на ось Ox , не перпендикулярную прямой AB , были равны нулю.

Третья форма условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_c(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.7)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров, A , B и C , не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

1.5.3. Равновесие плоской системы параллельных сил

Направим ось Ox перпендикулярно линиям действия сил, а ось Oy параллельно линиям действия сил. Тогда проекции всех сил на ось Ox будут равны нулю и условие равновесия принимает вид

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.8)$$

Из второй формы условия равновесия следует

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.9)$$

При этом точки A и B не лежат на прямой, параллельной линиям действия сил.

1.5.4. Распределенные силы

Если действие от одного тела другому передается в одной точке, то имеем *сосредоточенную силу*. Если же действие передается вдоль какой-то поверхности, то имеем *распределенные силы*, которые характеризуются своей интенсивностью q . Наиболее часто встречаемся с плоской системой распределенных сил:

1) равномерно распределенные силы (рис. 1.23 a), которые заменяем одной сосредоточенной силой, равной $Q = ql$, где l – длина нагруженного участка;

2) нагрузка, распределяется по линейному закону (рис. 1.23 б) также может быть заменена сосредоточенной силой, равной $Q = 0,5ql$.

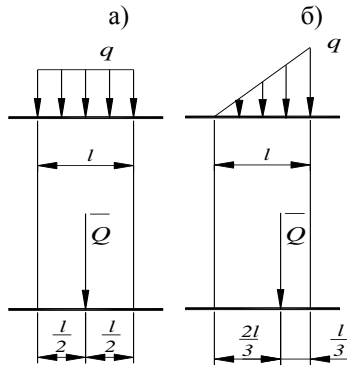


Рис. 1.23. Распределенные силы

Интенсивность q показывает значение силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка и измеряется в Н/м.

Силы Q проходят через центр тяжести нагрузки.

1.5.5. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела. Способы определения координат центров тяжести однородных тел

Рассмотрим параллельные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , приложенные в точках A_1 и A_2 (рис. 1.24).

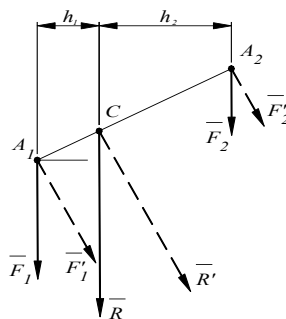


Рис. 1.24. Центр параллельных сил

$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$, причем линия действия главного вектора \overline{R} проходит через точку C , лежащую на отрезке A_1A_2 . Положение точки C найдем с помощью теоремы Вариньона:

$$m_C(\overline{R}) = m_C(\overline{F}_1) + m_C(\overline{F}_2).$$

$$0 = F_1 h_1 - F_2 h_2 = F_1 \cdot A_1 C \cos \alpha - F_2 \cdot A_2 C \cos \alpha,$$

$$F_1 \cdot A_1 C = F_2 \cdot A_2 C.$$

Если силы \overline{F}_1 и \overline{F}_2 повернуть на некоторый угол, то главный вектор все равно будет проходить через точку C .

Точка C называется центром параллельных сил \overline{F}_1 и \overline{F}_2 .

Для системы n сил поступают аналогично.

Точка C , через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил, при любых поворотах этих сил около их точек приложения, в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

Координаты центра параллельных сил.

Положение точки C по отношению к телу является неизменным и от выбора системы координат зависеть не будет.

Возьмем произвольную систему координат $Oxyz$ и обозначим в этих осях координаты точек:

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), C(x_c, y_c, z_c).$$

Найдем моменты относительно осей:

$$m_y(\overline{R}') = \sum m_y(\overline{F}_k') = Rx_c,$$

$$Rx_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n.$$

Аналогично для y_c и z_c .

Для координат центра параллельных сил получим:

$$x_c = \frac{1}{R} \sum F_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{R} \sum F_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{R} \sum F_k z_k, \quad (1.10)$$

где $R = \sum F_k$.

Эти формулы справедливы и для параллельных сил, направленных в противоположные стороны, если при этом $R \neq 0$.

Центр тяжести твердого тела.

Область, в каждой точке которой на помещенную туда материальную частицу действует сила, зависящая от положения (координат) этой точки, называется силовым полем.

На тело в поле земли действует сила тяжести.

Равнодействующую сил тяжести $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$, действующих на частицы данного тела, обозначим \bar{P} .

Модуль этой силы называется весом тела:

$$P = \sum_k p_k \quad (1.11)$$

\bar{P} будет проходить через точку C , являющуюся центром параллельных сил тяжести \bar{p}_k . Эта точка и называется центром тяжести тела.

Таким образом, центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, действующих на частицы данного тела, при любом положении тела в пространстве.

Координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{1}{P} \sum p_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{P} \sum p_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{P} \sum p_k z_k. \quad (1.12)$$

Центр тяжести – это точка геометрическая, она может лежать и вне пределов данного тела.

Для однородного тела вес p_k части пропорционален объему этой части V_k : $p_k = \gamma V_k$, где γ – вес единицы объема. Вес всего тела равен

$$P = \gamma V.$$

Для объемного тела имеем:

$$x_c = \frac{1}{V} \sum V_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{V} \sum V_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{V} \sum V_k z_k. \quad (1.13)$$

Таким образом, положение центра тяжести зависит только от его геометрической формы. Для плоских тел (в основном сечений элементов), имеем:

$$x_c = \frac{1}{S} \sum s_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{S} \sum s_k y_k, \quad (1.14)$$

где S – площадь всей плоской фигуры, s_k – площадь отдельной части.

Для линейных тел имеем:

$$x_c = \frac{1}{L} \sum l_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{L} \sum l_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{L} \sum l_k z_k, \quad (1.15)$$

где L – длина всего линейного элемента, l_k – длины его отдельных частей.

Способы определения координат центра тяжести

1. Симметрия

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси, или в центре симметрии.

2. Разбиение

Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно.

3. Дополнение

Частный случай способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

Примеры решения задач

При решении задач на равновесие тел следует придерживаться следующего плана:

Выделить тело (точку), равновесие которого необходимо рассмотреть.

Изобразить все действующие на тело (точку) активные силы.

Согласно аксиоме связей заменить действие связей их реакциями.

К полученной системе сил применить соответствующие условия равновесия.

Из полученной системы уравнений определить все искомые величины.

Пример 1.2. В центре правильного шестиугольника приложено 6 сил, направленных последовательно к его вершинам. Модули сил равны 1Н, 3Н, 5Н, 7Н, 9Н, 11Н. Найти равнодействующую системы сил.

Изобразим силы на рисунке (рис 1.25).

В данном случае $\vec{R} = \sum_1^6 \vec{F}_k$

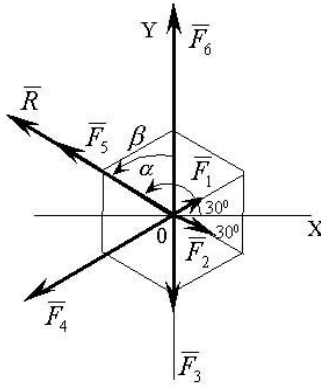


Рис. 1.25. К задаче 1.2

Выбираем оси координат и находим R по проекциям на оси:

$$R_x = \sum F_{kx} = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 30^\circ + 0 - F_4 \cos 30^\circ - F_5 \cos 30^\circ + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + 3 - 7 - 9) = 6\sqrt{3} \text{ Н};$$

$$R_y = \sum_1^6 F_{ky} = F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F_3 - F_4 \cos 60^\circ + F_5 \cos 60^\circ + F_6 = 1 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 5 - 7 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} + 11 = 6 \text{ Н};$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 6\sqrt{3+1} = 12 \text{ Н};$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-6\sqrt{3}}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ;$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}; \quad \beta = 60^\circ.$$

Значит:

$$R = 12; \quad \vec{R} \parallel \vec{F}_5$$

Пример 1.3. К вершинам прямоугольного параллелепипеда приложены четыре равные по модулю силы, направленные как указано на рисунке (рис. 1.26). Найти главный вектор и главный момент системы сил относительно одной из вершин, если $a = b = 30 \text{ см}$, $c = 40 \text{ см}$, а $P = 10 \text{ Н}$.

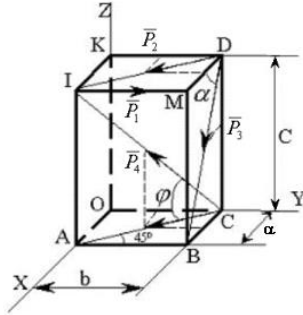


Рис. 1.26. К задаче 1.3

Выберем за центр приведения вершину O , проведем через нее оси координат и найдём искомые величины по их проекциям на эти оси. Согласно заданным размерам находим:

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{30}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 0,6;$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0,8;$$

$$\cos \varphi = \frac{AC}{AL} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{30^2 + 30^2 + 40^2}} = \frac{30\sqrt{2}}{10\sqrt{34}} = 0,728;$$

$$\sin \varphi = \frac{AL}{CL} = \frac{C}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{40}{10\sqrt{34}} = \frac{4}{\sqrt{34}} = \frac{4}{5,831} = 0,686;$$

$$R_x = \sum P_{kx} = P_2 \cos 45^\circ + P_3 \cos \alpha + P_4 \cos \varphi \cos 45^\circ =$$

$$= 10(1,41 + 0,6 + 0,728 \cdot 0,707) = 25,25 \text{ Н};$$

$$R_y = \sum P_{ky} = P_1 - P_2 \cos 45^\circ - P_4 \cos \varphi \cos 45^\circ =$$

$$= 10(1 - 0,707 - 0,728 \cdot 0,707) = -2,22 \text{ Н};$$

$$R_z = \sum P_{kz} = -P_3 \sin \alpha + P_4 \sin \varphi = 10(-0,8 + 0,686) = 1,14 \text{ Н}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 25,37 \text{ Н}.$$

Направление \vec{R} находим по направляющим косинусам.

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{25,25}{25,37} = 0,995; \quad \alpha = 5^\circ 30';$$

$$\cos \beta = \frac{R_z}{R} = -\frac{2,22}{25,37} = -0,0875 ; \quad \beta = 180^\circ - 85 = 95^\circ ;$$

$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = -\frac{1,14}{25,37} = -0,0449 ; \quad \gamma = 180^\circ - 87^\circ 30' = 92,5^\circ .$$

Определим главный момент $\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{P}_k)$.

$$M_x = \sum m_x(\bar{P}_k) = -P_1 \cdot c + P_2 \cos 45^\circ \cdot c - P_3 \sin \alpha \cdot b + \\ + P_4 \sin \varphi \cdot b = 10(-40 + 0,707 \cdot 40 - 0,8 \cdot 30 + 0,686 \cdot 30) = \\ 10(-40 + 28,28 - 24 + 20,58) = -151,4 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$M_y = \sum m_y(\bar{P}_k) = P_2 \cos 45^\circ \cdot c + P_3 \cos \alpha \cdot c = \\ 10 \cdot 40(0,707 + 0,6) = 522,8 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$M_z = \sum m_z(\bar{P}_k) = P_1 \cdot a - P_2 \cos 45^\circ \cdot b - P_3 \cos \alpha \cdot b - P_4 \cos \varphi \cdot \\ \cdot \cos 45^\circ \cdot b = 10 \cdot 30(1 - 0,707 - 0,6 - 0,728 \cdot 0,707) = -246,5 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 597,5 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{-151,4}{597,5} = -0,253 ; \quad \alpha_1 = 180^\circ - 75,3 = 104,7^\circ .$$

$$\cos \beta_1 = \frac{522,8}{597,5} = 0,875 ; \quad \beta_1 = 28,5^\circ$$

$$\cos \gamma_1 = -\frac{246,5}{597,5} = -0,413 ; \quad \gamma_1 = 180^\circ - 65,5^\circ = 114,5^\circ .$$

Изобразим найденные величины на рисунке (рис. 1.27).

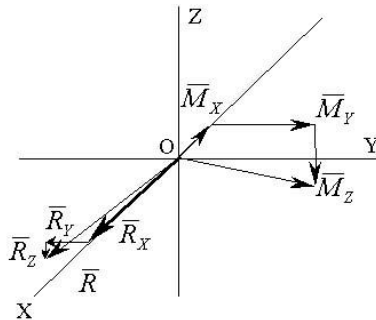


Рис. 1.27. Главный вектор и главный момент

$$\begin{aligned} \bar{R} \cdot \bar{M}_0 &= R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 25,25(-151,4) + (-2,22) \cdot 522,8 + \\ &+ (-1,14) \cdot (-246,5) = -3822,85 - 1160,62 + 281,01 \neq 0. \end{aligned}$$

Система сил приводится к динаме со смещённой относительно центра O осью.

Пример 1.4. Тяжелый диск весом P удерживается двумя канатами АВ и CD. Определить натяжение этих канатов.

Будем рассматривать равновесие диска. Активной силой является вес P . Уберём связи и изобразим их действие реакциями этих связей, силами T_A и T_C (рис. 1.28).

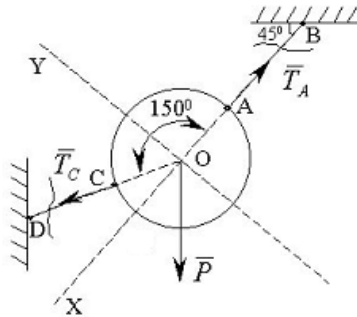


Рис. 1.28. К задаче 1.4

Выберем оси координат и составим уравнения равновесия полученной системы трех сходящихся сил.

$$\sum F_{KX} = 0; \quad T_A - T_C \cos 30^\circ - P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{KY} = 0; \quad T_C \cos 60^\circ - P \cos 45^\circ = 0.$$

Решаем систему уравнений:

$$T_C = \frac{P \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} = P \sqrt{2} = 1,4 P;$$

$$T_A = T_C \cos 30^\circ + P \cos 45^\circ = P \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + P \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} P (\sqrt{3} + 1) = 1,92 P.$$

Пример 1.5. Однородная балка (рис. 1.29,а), длина которой 4 м и вес 600Н, опирается на гладкий пол, а промежуточной точкой B на столб высотой 3 м, образуя с вертикалью угол 30° . Балка удерживается

веревкой, протянутой по полу. Определить натяжение веревки, реакцию столба и реакцию пола.

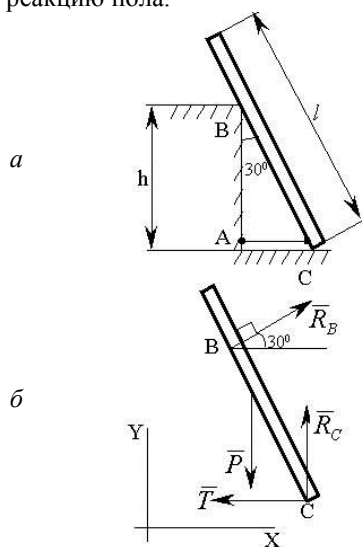


Рис. 1.29. К задаче 1.5

В соответствии с рисунком 1.29,б $P=600$ Н; $l=4$ м; $h=3$ м.

Необходимо определить T , R_B , R_C .

Рассмотрим равновесие балки. Активная сила – вес P . \vec{T} – вдоль верёвки, \vec{R}_B перпендикулярно балке, \vec{R}_C перпендикулярно полу.

Составим уравнения равновесия плоской системы сил.

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_B \cos 30^\circ - T = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_C - P + R_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = 0; \quad P \frac{l}{2} \cos 60^\circ - R_B \frac{h}{\cos 30^\circ} = 0.$$

Решаем систему уравнений и находим:

$$R_B = \frac{Pl \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ}{h} = \frac{600 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 173 \text{ Н};$$

$$T = R_B \cdot \cos 30^\circ = 173 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 150 \text{ Н};$$

$$R_C = P - R_B \cos 60^\circ = 600 - 173 \cdot \frac{1}{2} = 513,4 \text{ Н}.$$

Пример 1.6. Определить реакции опор балки (рис. 1.30) от заданных нагрузок.

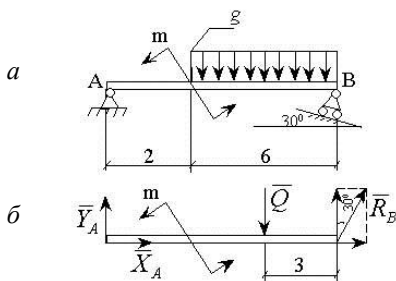


Рис. 1.30. К задаче 1.6

Исходные данные:

$$m = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad q = 50 \text{ Н/м}.$$

Определить R_A , R_B .

Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой.

$$Q = q \cdot l = 50 \cdot 6 = 300 \text{ Н}.$$

Реакция $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$, реакция R_B перпендикулярна опорной плоскости.

Составляем уравнения равновесия балки:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + R_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q + R_B \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad m - Q \cdot 5 + R_B \cos 30^\circ \cdot 8 = 0.$$

Находим:

$$R_B = \frac{-m + Q \cdot 5}{8 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{-100 + 300 \cdot 5}{8 \cdot 0,866} = 202,1 \text{ Н};$$

$$X_A = -R_B \cos 60^\circ = -101,05 \text{ Н};$$

$$Y_A = Q - R_B \cos 30^\circ = 300 - 202,1 \cdot 0,866 = 125 \text{ Н}.$$

Пример 1.7. Составить уравнения равновесия для определения реакций опор жёсткой рамы (рис. 1.31,а), расположенной в вертикальной плоскости, вызываемых заданными нагрузками.

Освобождаем раму от связей и заменяем их действия реакциями. А—неподвижный шарнир, $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$, В—стержень, поэтому реакция \bar{R}_B направлена вдоль стержня. Действие распределённой нагрузки заменяем сосредоточенной силой $Q = \frac{1}{2}ql = \frac{3}{2}qa$.

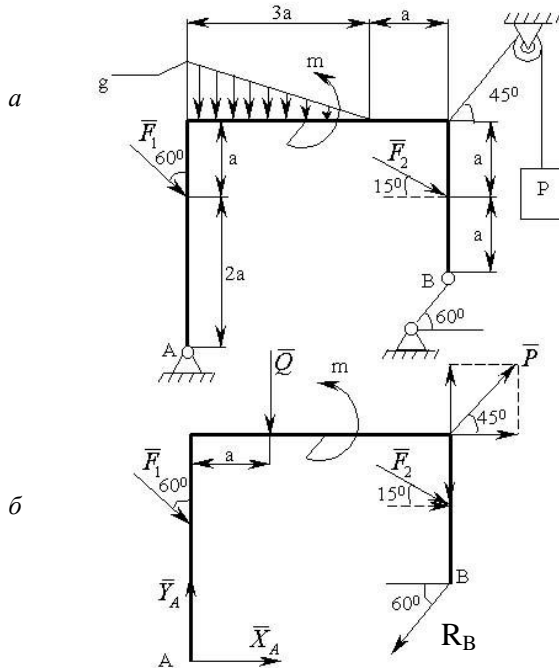


Рис. 1.31. К задаче 1.7

Действие груза P заменяем силой \bar{P} (рис. 1.30,б), направленной вдоль нити от точки подвеса. Составим уравнения равновесия плоской системы сил. (при составлении уравнения моментов удобно применить теорему Вариньона):

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + F_1 \sin 60^\circ + P \cos 45^\circ + F_2 \cos 15^\circ - R_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A - F_1 \cos 60^\circ - Q + P \sin 45^\circ - F_2 \sin 15^\circ - R_B \sin 60^\circ = 0;$$

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = 0; -F_1 \sin 60^0 \cdot 2a - Q \cdot a + m - P \cos 45^0 \cdot 3a + P \sin 45^0 \cdot 4a - F_2 \cos 15^0 \cdot 2a - F_2 \sin 15^0 \cdot 4a + R_B \cos 60^0 a - R_B \sin 60^0 \cdot 4a = 0.$$

Решая систему уравнений находим:

$$R_B = \frac{F_1 \sin 60^0 \cdot 2a + Qa - m + P \cos 45^0 \cdot 4a + F_2 \cos 15^0 \cdot 2a + F_2 \sin 15^0 \cdot 4a}{a \cos 60^0 - 4a \sin 60^0};$$

$$X_A = -F \sin 60^0 - P \cos 45^0 - F_2 \cos 15^0 + R_B \cos 60^0;$$

$$Y_A = F_1 \cos 60^0 + Q - P \sin 45^0 + F_2 \sin 15^0 + R_B \sin 60^0.$$

Для проверки можно составить уравнение моментов относительно другой какой-нибудь точки:

$$\Sigma m_B(\bar{F}_k) = 0; -F_2 \cos 15^0 \cdot a - P \cos 45^0 \cdot 2a + m + Q \cdot 3a - F_1 \cos 60^0 a + F_1 \sin 60^0 \cdot 4a - Y_A \cdot 4a + X_{Aq} = 0.$$

Пример 1.8. На гладкой горизонтальной плоскости стоит передвижная лестница (рис. 1.32,а) длиной 3 м, состоящая из двух одинаковых частей, весом 120 Н каждая, соединенных шарниром и веревкой. На лестнице стоит человек, весящий 720Н. Определить реакции пола, шарнира и верёвки.

Итак, $P_1 = P_2 = 120 \text{ Н}$, $Q = 720 \text{ Н}$. Необходимо определить: R_A , R_B , R_C и T .

Согласно принципу отвердевания, рассмотрим равновесие лестницы (рис. 1.32,б). На неё действует плоская система параллельных сил.

Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = 0; -P_1 \cdot \frac{3}{2} \cos 45^0 - Q \cdot 3,6 \cos 45^0 - P_2 \cdot 4,5 \cos 45^0 + R_B \cdot 6 \cos 45^0 = 0;$$

Откуда

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 1,5 + Q \cdot 3,6 + P_2 \cdot 4,5}{6} = \frac{120 \cdot 6 + 720 \cdot 3,6}{6} = 552 \text{ Н}$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; R_A - P_1 - Q - P_2 + R_B = 0;$$

$$R_A = P_1 + Q + P_2 - R_B = 240 + 720 - 552 = 408 \text{ Н}.$$

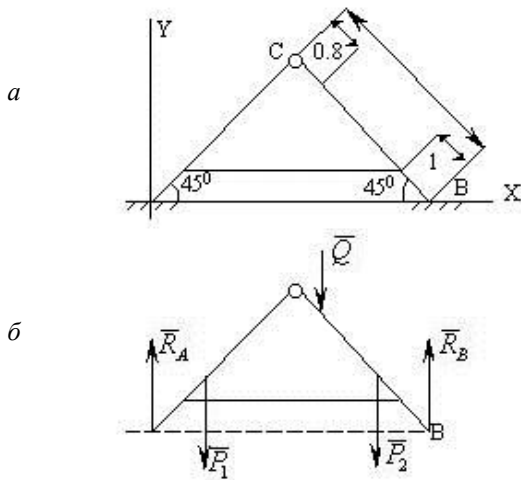


Рис. 1.32. К задаче 1.8

Для нахождения внутренних реакций расчленим лестницу на части и рассмотрим равновесие одной из них, например, левой (рис. 1.33).

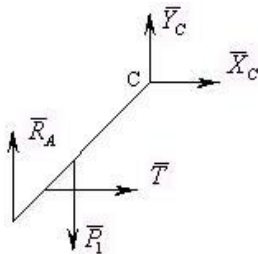


Рис. 1.33. К задаче 1.8

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; X_C + T = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0, R_A - P_1 + Y_C = 0;$$

$$\sum m_c(\bar{F}_k) = 0; -R_A \cdot 3 \cos 45^\circ + P_1 \cdot 1.5 \cos 45^\circ + T_2 \sin 45^\circ = 0.$$

Следовательно,

$$T = \frac{R_A \cdot 3 - P_1 \cdot 1.5}{2} = \frac{408 \cdot 3 - 120 \cdot 1.5}{2} = 522 \text{ Н}$$

В итоге получаем:

$$X_C = -T = -522 \text{ Н};$$

$$Y_C = -R_A + P_1 = -408 + 120 - 288 = -576 \text{ Н}.$$

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 596,2 \text{ Н}.$$

Пример 1.9. Составить уравнения равновесия составной балки (рис. 1.34) для определения внешних и внутренних реакций.

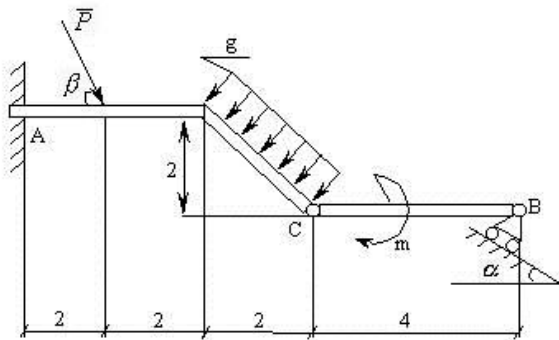


Рис. 1.34. К задаче 1.9

Внешними связями данной конструкции является заделка в точке A и подвижный шарнир в точке B . Шарнир C является внутренней связью. Для решения этой задачи удобнее расчленить конструкцию на части и рассмотреть их равновесие в отдельности, учитывая равенство действия и противодействия. Рассмотрим сначала равновесие правой части конструкции BC (рис. 1.35).

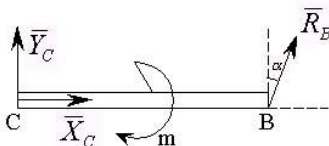


Рис. 1.35. К задаче 1.9

$$\sum F_{kx} = 0; X_C + R_B \sin \alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_C + R_B \cos \alpha = 0;$$

$$\sum m_C(\bar{F}_k) = 0; -m + R_B \cos \alpha \cdot 4 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$R_B = \frac{m}{4 \cos \alpha}; \quad X_C = -R_B \sin \alpha = -\frac{m \sin \alpha}{4 \cos \alpha} = -\frac{1}{4} m \operatorname{tg} \alpha;$$

$$Y_C = R_B \cos \alpha = -\frac{m \cos \alpha}{4 \cos \alpha} = -\frac{1}{4} m.$$

Теперь рассмотрим равновесие левой части конструкции AC (рис. 1.36).

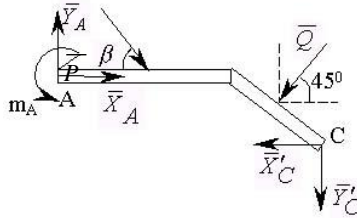


Рис. 1.36. К задаче 1.9

Распределенную нагрузку заменим одной силой:

$$Q = q \cdot l = q \cdot 2\sqrt{2} = 2,82 q.$$

Реакция заделки складывается из силы и пары сил. В точке C

$$\bar{X}'_C = -\bar{X}_C, \quad \bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C.$$

В то же время

$$X'_C = X_C; \quad Y'_C = Y_C.$$

Таким образом,

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + P \cos \beta - Q \cos 45^0 - X'_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - P \sin \beta - Q \cos 45^0 - Y'_C = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad m_A - P \sin \beta \cdot 2 - Q \cos 45^0 \cdot 1 - Q \sin 45^0 \cdot 5 - X'_C \cdot 2 - Y'_C \cdot 6 = 0.$$

Решая систему уравнений и находим

$$X_A = -P \cos \beta + Q \cos 45^0 + X'_C = -P \cos \beta + \cos 45^0 - \frac{1}{4} m \operatorname{tg} \alpha.$$

$$Y_A = -P \sin \beta + Q \sin 45^0 + Y'_C = -P \sin \beta + Q \cos 45^0 - \frac{1}{4} m.$$

$$\begin{aligned} m_A &= P \sin \beta \cdot 2 + Q \cos 45^0 \cdot 1 + Q \sin 45^0 \cdot 5 + X'_C \cdot 2 + Y'_C \cdot 6 = \\ &= 2P \sin \beta + 6Q \cos 45^0 - \frac{1}{2} m \operatorname{tg} \alpha - \frac{3}{2} m. \end{aligned}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Тема: Основные понятия и аксиомы статики

1. Какие тела называются абсолютно твердыми?
2. Дайте понятия силы, системы сил, равнодействующей.
3. Сформулируйте основные аксиомы статики.
4. Что называется связью?
5. Перечислите основные типы связей и укажите направление их реакций.

Тема: Система сходящихся сил

1. Каковы условия равновесия системы сходящихся сил, расположенных в пространстве и на плоскости?

Тема: Теория пар сил

1. Какая система сил называется парой сил?
2. Чем характеризуется действие пары сил на тело?
3. Каковы условия равновесия системы пар сил?

Тема: Система сил, расположенных произвольно на плоскости и в пространстве

1. Что называется моментом силы относительно точки, относительно оси?
2. Чему равны главный вектор и главный момент системы сил?
3. В чем состоит приведение произвольной системы сил к заданному центру (метод Пуансо)?
4. Укажите частные случаи приведения.
5. Приведите условия равновесия плоской, пространственной системы сил.

Тема: Центр тяжести

1. Как вычисляются координаты центра тяжести однородных тел, плоских фигур и линий.
2. Как определить положение центра тяжести сложной фигуры, если известны положения центров тяжести отдельных ее частей?

2. Статика деформируемого тела

2.1. Основные понятия

Различные сооружения и машины, проектированием которых занимается инженер, должны обладать прочностью, то есть способностью сопротивляться разрушению под действием приложенных внешних сил.

Жесткость – способность сопротивляться изменению объема и формы. **Устойчивость** – способность сохранять первоначальную форму равновесия.

Изменение формы и размеров тела под действием внешней нагрузки называется **деформацией**. Деформации называются **упругими**, если они полностью исчезают после снятия нагрузки, и **пластическими**, если они частично остаются. Соответственно этому, свойство материала после снятия нагрузки полностью восстанавливать свою форму называется **упругостью**, свойство накапливать остаточные деформации – **пластичностью**.

Если внешние силы, действующие на брус, направлены по его оси, имеет место растяжение или сжатие. Если внешние силы приводятся к паре сил, действующей в продольной плоскости бруса, возникает **изгиб**. Если внешние силы приводятся к паре сил, действующей в плоскости, перпендикулярной оси стержня, имеет место **кручение**.

Основными моделями формы тела являются: брус, стержень, оболочка, пластина, массив.

Брус – тело образованное плоской фигурой, движущейся по некоторой кривой таким образом, что центр тяжести фигуры совпадает с кривой, а плоскость фигуры остается перпендикулярной к касательной, проведенной в соответствующей точке к данной кривой. Кривая является осью, а плоская фигура – **поперечным сечением** бруса.

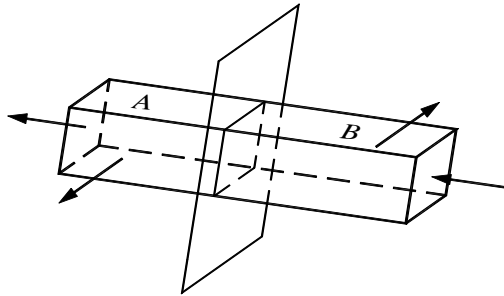
Стержень – брус, у которого поперечные размеры малы по сравнению с продольными.

2.2. Внутренние силы. Метод сечений

Внутренние силы возникают между отдельными элементами сооружения и между отдельными частями элемента под действием внешних сил.

Сущность метода сечений заключается в том, что тело, находящееся в равновесии, разрезают мысленно на две части (рис. 2.1, а). Взаимодействие между левой и правой частями представляется силой \bar{R} (главный вектор), приложенной в произвольно выбранной точке O сечения, и моментом M (главный момент) относительно некоторой оси, проходящей через эту точку (рис. 2.1, б).

а



б

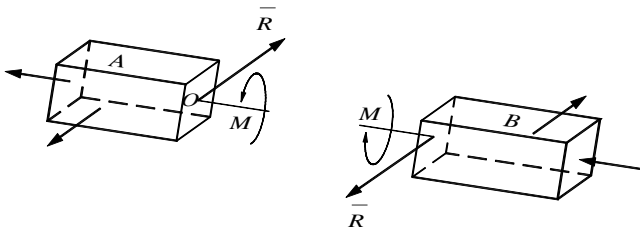


Рис. 2.1. Иллюстрация метода сечений

В качестве центра приведения принимается центр тяжести поперечного сечения.

При разложении главного вектора и главного момента относительно координатных осей получим 6 внутренних силовых факторов: три силы (\bar{N} , \bar{Q}_y , \bar{Q}_z) и три момента (T , M_y , M_z). Эти

величины называются внутренними усилиями в сечении бруса (рис. 2.2).

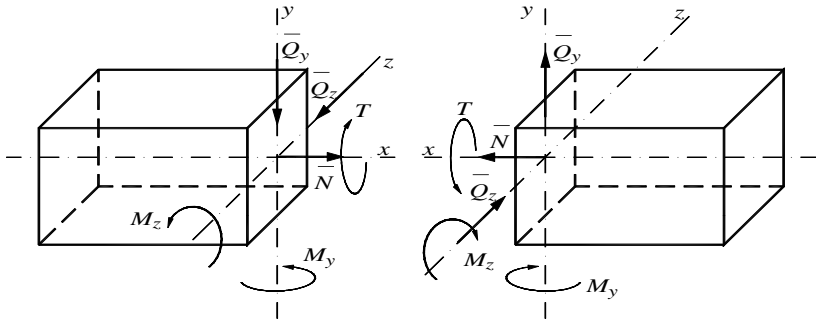


Рис. 2.2. Внутренние усилия в сечении бруса

Усилие \bar{N} вызывает продольную деформацию стержня; \bar{Q}_y , \bar{Q}_z – сдвиг сторон сечения в направлении осей y и z соответственно; T – кручение стержня; M_z , M_y – изгиб стержня в главных плоскостях yx , zx .

Для них приняты следующие названия: \bar{N} – продольная сила, \bar{Q}_y , \bar{Q}_z – поперечные силы, T – крутящий момент, M_z , M_y – изгибающие моменты.

Для практического вычисления усилий и моментов в сечении необходимо составить 6 уравнений для одной из частей бруса:

- 1) $\sum X = 0 \rightarrow \bar{N}$; 2) $\sum Y = 0 \rightarrow \bar{Q}_y$; 3) $\sum Z = 0 \rightarrow \bar{Q}_z$;
- 4) $\sum M_x = 0 \rightarrow T$; 5) $\sum M_y = 0 \rightarrow M_y$; 6) $\sum M_z = 0 \rightarrow M_z$.

Каждое из шести уравнений статики содержит один внутренний силовой фактор (ВСФ) и внешние нагрузки. К внешним нагрузкам относятся также реакции опор.

Правило знаков для усилий:

продольная сила \bar{N} в сечении положительна при растяжении;

поперечные силы \bar{Q}_y и \bar{Q}_z положительны, если они стремятся вращать отсеченную часть бруса по часовой стрелке относительно любой точки на внутренней нормали к сечению (рис. 2.4);

крутящий момент T положителен, если при взгляде в торец отсеченной части бруса он представляется направленным по ходу часовой стрелки;

изгибающие моменты M_z и M_y откладываются со стороны растянутых волокон, независимо от знака.

Усилия и моменты в разных сечениях стержня различны. График, изображающий закон изменения какого-либо внутреннего усилия по длине бруса, называется *эпюрой*.

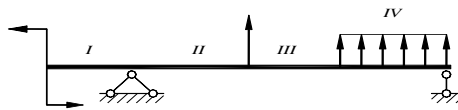


Рис. 2.3. Разбиение бруса на участки

Порядок построения эпюр.

1. Определить опорные реакции из уравнений статики.
2. Разбить брус на участки и выделить сечение на каждом участке (рис. 2.3).
3. Записать выражения для определения ВСФ на каждом участке.
4. Построить эпюры. При этом необходимо соблюдать следующие правила:
 - а) построение эпюр производится на оси, параллельной оси бруса;
 - б) ординаты эпюр откладываются перпендикулярно оси бруса;
 - в) штриховка эпюр производится прямыми, перпендикулярными оси.

2.2.1. Внутренние силовые факторы в сечениях балки

Балкой называется прямолинейный стержень, подверженный изгибу. На расчетной схеме балку заменяют ее осью и все нагрузки приводят к этой оси.

При плоском изгибе в поперечном сечении балки возникают три ВСФ: продольная сила \bar{N} , поперечная сила \bar{Q}_y , изгибающий момент M_z (рис. 2.4). При вертикальной нагрузке $\bar{N} = 0$.

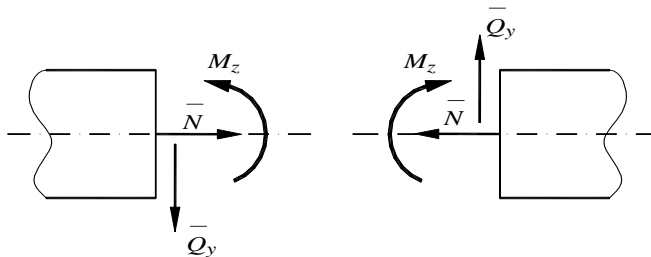


Рис. 2.4. Положительные направления усилий

Согласно изложенным правилам, на рис. 2.4 показаны положительные направления усилий.

Для практических вычислений момента можно рекомендовать следующее: если внешняя нагрузка создает относительно рассматриваемого сечения момент, вызывающий растяжение нижних волокон, то в выражении для M_z она дает положительное слагаемое (рис. 2.5). Например, для сечения A : $M_A = F \cdot l - M$.

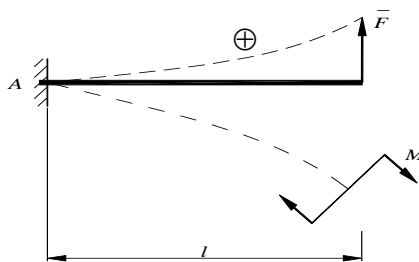


Рис. 2.5. Правило знаков для изгибающего момента

Построение эпюр ВСФ рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 2.1. Построить эпюры внутренних силовых факторов для балки (рис. 2.6, а).

Реакции в заделке можно не определять, если привязку сечений вести справа. На каждом из трех участков имеем равновесие правой части балки.

Исходные данные: $M = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $F = 40 \text{ кН}$.

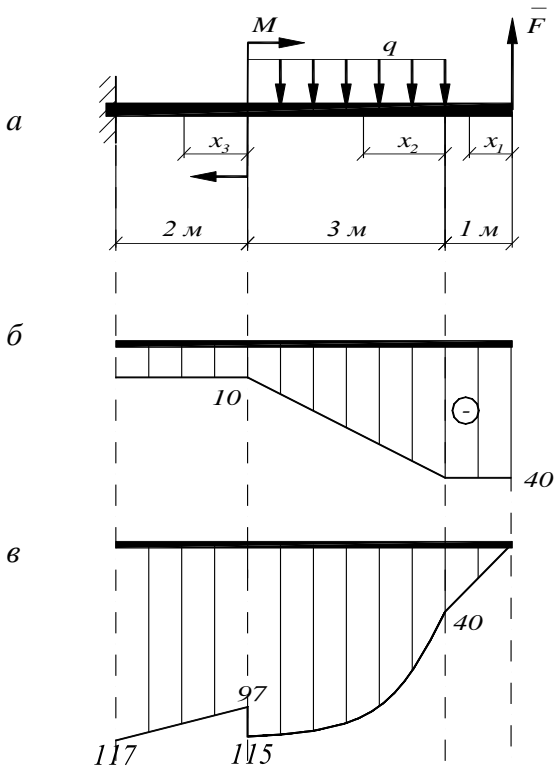


Рис. 2.6. Расчетная схема (а) и эпюры внутренних силовых факторов: б – эпюра поперечной силы Q_y [кН], в – эпюра изгибающего момента M_z [кН·м]

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$)

Поперечная сила в сечении определяется как проекция внешних сил на ось y :

$$Q_y = -F = -40 \text{ кН} .$$

Знак минус свидетельствует, что сила относительно сечения создает момент, направленный против хода часовой стрелки.

$$M_z = Fx_1 \Big|_{x_1=0} = 0 \Big|_{x_1=1 \text{ м}} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Сила F растягивает нижние волокна, следовательно, в выражении изгибающего момента вводим знак плюс.

Таким образом, поперечная сила одинакова во всех сечениях балки. Функция $M_z(x)$ линейна. Для построения ее графика достаточно получить два значения – в начале и в конце участка.

Участок II ($0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м}$)

$$Q_y = -F + qx_2 = -40 + 10x_2 \left|_{x_2=0} = -40 \text{ кН} \right|_{x_2=3 \text{ м}} = -10 \text{ кН} .$$

Распределенная нагрузка на длине x_2 приведена к сосредоточенной силе, создает вращение относительно сечения по часовой стрелке (знак плюс).

$$\begin{aligned} M_z &= F(1 + x_2) - qx_2 \frac{x_2}{2} = \\ &= 40(1 + x_2) - 10 \frac{x_2^2}{2} \left|_{x_2=0} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м} \right|_{x_2=3 \text{ м}} = 115 \text{ кН}\cdot\text{м} . \end{aligned}$$

От нагрузки q растягиваются верхние волокна, слагаемое от нее в выражении момента M_z взято со знаком минус.

Здесь функция Q_y линейная, а функция M_z квадратичная, выпуклость направлена в сторону действия нагрузки q , растягиваются нижние волокна.

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$)

$$Q_y = -F + q \cdot 3 = -40 + 10 \cdot 3 = -10 \text{ кН} .$$

$$\begin{aligned} M_z &= F(4 + x_3) - q \cdot 3(1,5 + x_3) - M = \\ &= 40(4 + x_3) - 30(1,5 + x_3) - 18 \left|_{x_3=0} = 97 \text{ кН}\cdot\text{м} \right|_{x_3=2 \text{ м}} = 117 \text{ кН}\cdot\text{м} . \end{aligned}$$

Проверка правильности построения эпюр заключается в следующем: на эпюре Q_y должны быть скачки на величины сосредоточенных сил, на эпюре M_z – на величины сосредоточенных моментов (в данном примере на величины $F = 40 \text{ кН}$ и $M = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$).

Эпюры ВСФ представлены на рис. 2.6, б, в.

Пример 2.2. Построить эпюры внутренних усилий для балки с шарнирным опиранием (рис. 2.7, а).

Исходные данные: $M = 14 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $F = 8 \text{ кН}$.

Определим реакции. Распределенную нагрузку заменим равнодействующей (рис. 2.7, б), равной площади эпюры нагрузки и приложенной в центре тяжести. Вращение нагрузки по часовой стрелке примем за положительное.

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = R_A \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 2,5 + M - F \cdot 2 = 0, \quad R_A = 11,75 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = R_B \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + M - F \cdot 6 = 0, \quad R_B = 1,75 \text{ кН.}$$

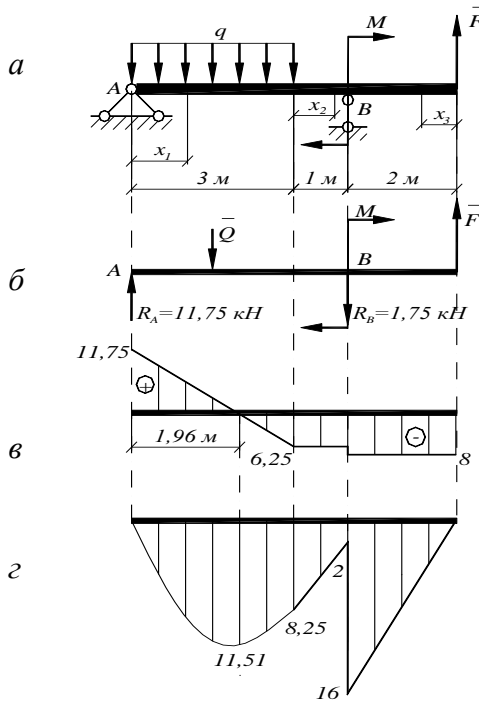


Рис. 2.7. Расчетные схемы (а, б) и эпюры внутренних силовых факторов: в – эпюра поперечной силы Q_y [кН], г – эпюра изгибающего момента M_z [кН·м]

Проверим найденные значения реакций:

$$\sum Y = R_A - q \cdot 3 - R_B + F = 11,75 - 18 - 1,75 + 8 = 0.$$

Балка имеет три участка.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 3 \text{ м}$)

$$Q_y = R_A - qx_1 = 11,75 - 6x_1 \Big|_{x_1=0} = 11,75 \text{ кН} \Big|_{x_1=3 \text{ м}} = -6,25 \text{ кН} .$$

$$M_z = R_A x_1 - q \frac{x_1^2}{2} .$$

В сечении, где поперечная сила Q_y равна нулю, изгибающий момент M_z имеет экстремальное значение. Для определения этого значения приравняем нулю производную от момента M_z по абсциссе x_1 сечения.

$$\frac{dM_z}{dx_1} = Q_y = R_A - qx_1 = 0 , \quad x_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{11,75}{6} = 1,96 \text{ м} .$$

Тогда

$$M_z = 11,75 x_1 - 6 \frac{x_1^2}{2} \Big|_{x_1=0} = 0 \Big|_{x_1=1,96 \text{ м}} = 11,51 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x_1=3 \text{ м}} = 8,25 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Участок II ($0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$)

Рассмотрим равновесие части балки левее проведенного сечения.

$$Q_y = R_A - q \cdot 3 = 11,75 - 6 \cdot 3 = -6,25 \text{ кН} .$$

$$M_z = R_A (3 + x_2) - q \cdot 3(1,5 + x_2) =$$

$$= 11,75 (3 + x_2) - 18 (1,5 + x_2) \Big|_{x_2=0} = 8,25 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x_2=1 \text{ м}} = 8 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$)

Из равновесия правой части балки:

$$Q_y = -F = -8 \text{ кН} .$$

$$M_z = Fx_3 = 8x_3 \Big|_{x_3=0} = 0 \Big|_{x_3=2 \text{ м}} = 16 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Проверка правильности построения эпюр: на эпюре Q_y скачки на величины R_A , R_B и F , на эпюре M_z — на величину M .

Эпюры ВСФ представлены на рис. 2.7, в, г.

2.2.2. Внутренние силовые факторы в сечениях рамы

Рамой называют систему, состоящую из прямолинейных стержней, с жесткими или шарнирными узлами. Ось рамы представляет собой ломаную линию, но каждый прямолинейный участок можно рассматривать как балку. В отличие от балок в сечениях стержней рамы кроме поперечной силы \bar{Q}_y и изгибающего момента M_z действует продольная сила \bar{N} .

Пример 2.3. Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы (рис. 2.8).

Исходные данные: $M = 32 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 14 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $F = 8 \text{ кН}$.

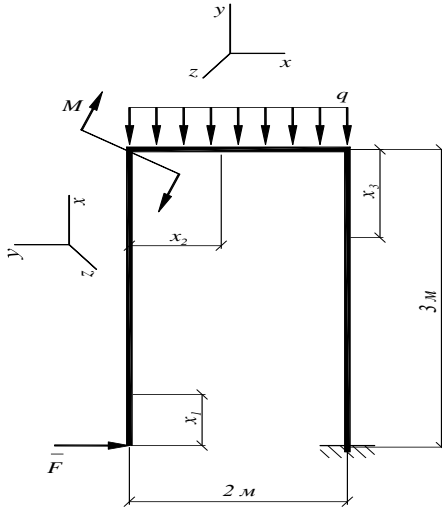


Рис. 2.8. Расчетная схема рамы

Рама имеет три участка. Расчет ведем со свободного левого торца, не определяя опорных реакций в заделке.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 3 \text{ м}$)

$$Q_y = -F = -8 \text{ кН} \quad (\text{из проекций на ось } y).$$

Сила относительно проведенного сечения создает момент против часовой стрелки, следовательно, принимаем знак минус.

$$M_z = -Fx_1 = -8x_1 \Big|_{x_1=0} = 0 \Big|_{x_1=3} = -24 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Поскольку растянуты левые волокна, запишем выражение момента со знаком минус, а ординаты эпюры M_z отложим с левой стороны.

$$N = 0.$$

Участок II ($0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$)

$$Q_y = -q \cdot x_2 = -14 \cdot x_2 = \Big|_{x_2=0} = 0 \Big|_{x_2=2 \text{ м}} = -28 \text{ кН}.$$

$$\begin{aligned} M_z &= -F \cdot 3 + M - q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} = \\ &= -24 + 32 - 14 \cdot \frac{x_2^2}{2} \Big|_{x_2=0} = 8 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x_2=2 \text{ м}} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м} . \end{aligned}$$

Сила \overline{F} и нагрузка q относительно сечения на данном участке растягивают верхние волокна, а момент M – нижние. Соответственно на эпюре M_z отрицательные значения отложим вверх, положительные – вниз.

$$N = -F = -8 \text{ кН} \text{ (из суммы проекций, равной нулю на ось } x\text{)}.$$

Сила сжимает стержень, поэтому принимаем знак минус.

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$)

Для определения знака силу \overline{F} мысленно перенесем в начало третьего участка.

$$Q_y = F = 8 \text{ кН} .$$

$$\begin{aligned} M_z &= F(3 - x_3) - M + q \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= 8(3 - x_3) - 32 + 28 \Big|_{x_3=0} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x_3=3 \text{ м}} = -4 \text{ кН}\cdot\text{м} . \end{aligned}$$

Знаки перед слагаемыми аналогичны принятым на первом участке.

Продольная сила равна

$$N = -q \cdot 2 = -14 \cdot 2 = -28 \text{ кН} .$$

Проверка правильности построения эпюр. Сила \overline{F} является поперечной на участках I и III и продольной на участке II;

распределенная нагрузка q является поперечной силой на участке II и продольной на участке III. В сечении, где применен момент $M=32 \text{ кН}\cdot\text{м}$, на эпюре M_z имеет место скачок на его величину.

Эпюры ВСФ представлены на рис. 2.9.

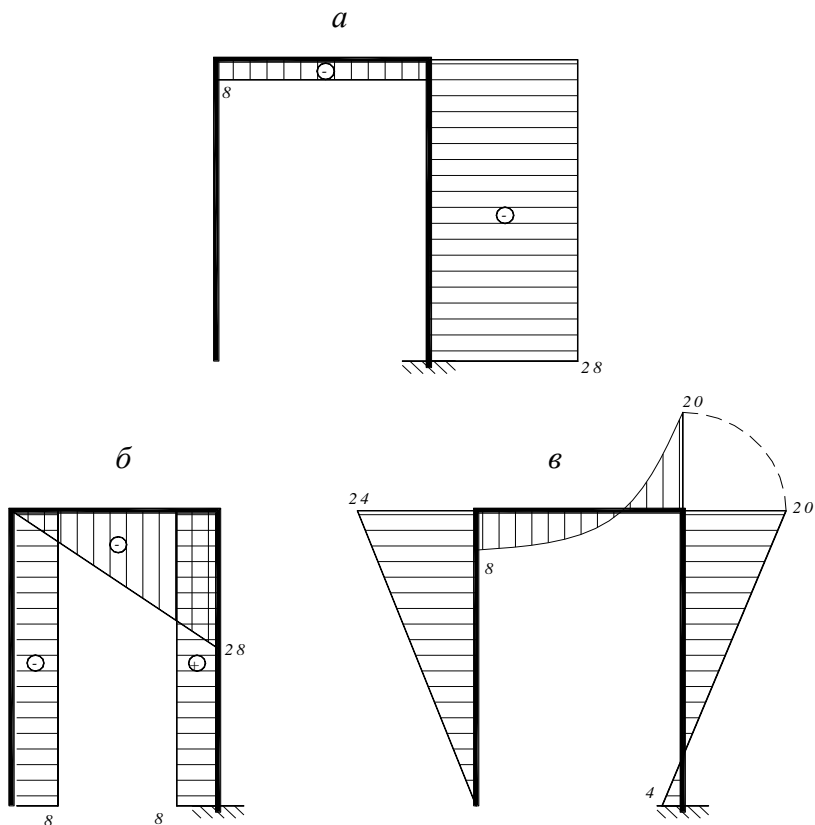


Рис. 2.9. Эпюры внутренних силовых факторов: a – эпюра продольной силы N [кН], b – эпюра поперечной силы Q_y [кН], $в$ – эпюра изгибающего момента M_z [кН·м]

Пример 2.4. Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы с шарнирным опиранием (рис. 2.10).

Исходные данные: $M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $F = 6 \text{ кН}$.

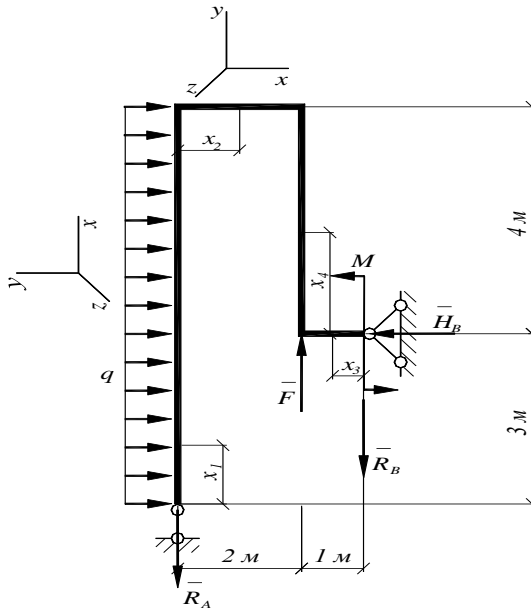


Рис. 2.10. Расчетная схема бруса

Из уравнений статики определим значения опорных реакций.

$$\sum X = q \cdot 7 - H_B = 0, \quad H_B = 4 \cdot 7 = 28 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 3 + q \cdot 7 \cdot 0,5 + F \cdot 1 - M = 0; \quad R_A = 2,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = R_B \cdot 3 - H_B \cdot 3 - M - F \cdot 2 + q \cdot 7 \cdot 3,5 = 0; \quad R_B = 3,33 \text{ кН}.$$

Проверим найденные значения реакций:

$$\sum Y = -R_A - R_B + F = -2,67 - 3,33 + 6 = 0.$$

Рама имеет четыре участка.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 7 \text{ м}$)

Из равновесия части рамы длиной x_1 имеем:

$$Q_y = -qx_1 = -4x_1 \Big|_{x_1=0}^0 = 0 \Big|_{x_1=7} - 28 \text{ кН}.$$

$$M_z = -qx_1 \frac{x_1}{2} = -4 \frac{x_1^2}{2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=7 \text{ м}} = 0 - 98 \text{ кН}\cdot\text{м} ,$$

т.е. растянуты левые волокна.

$N = R_A = 2,67 \text{ кН}$, стержень растянут.

Участок II ($0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$)

$$Q_y = -R_A = -2,67 \text{ кН};$$

$$M_z = -R_A x_2 - q \cdot 7 \cdot 3,5 =$$

$$= -2,67 x_2 - 98 \Big|_{x_2=0}^{x_2=2 \text{ м}} = -98 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x_2=0}^{x_2=2 \text{ м}} = -103,5 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

т.е. растянуты верхние волокна.

$N = -q \cdot 7 = -4 \cdot 7 = -28 \text{ кН}$, стержень сжат.

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}$)

Рассмотрим равновесие правой части рамы.

$$Q_y = R_B = 3,33 \text{ кН} ;$$

$$M_z = M - R_B x_3 = 12 - 3,33 x_3 \Big|_{x_3=0}^{x_3=1 \text{ м}} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x_3=0}^{x_3=1 \text{ м}} = 8,67 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

т.е. растянуты нижние волокна.

$N = -H_B = -28 \text{ кН}$, стержень сжат.

Участок IV ($0 \leq x_4 \leq 4 \text{ м}$)

Рассмотрим равновесие правой части рамы.

$$Q_y = H_B = 28 \text{ кН} .$$

$$M_z = -M + R_B \cdot 1 + H_B x_4 =$$

$$= -12 + 3,33 \cdot 1 + 28 x_4 \Big|_{x_4=0}^{x_4=4 \text{ м}} = -8,67 \text{ кН}\cdot\text{м} \Big|_{x_4=0}^{x_4=4 \text{ м}} = 103,34 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Здесь нагрузка, растягивающая левые волокна, как и ранее, принята со знаком минус, правые – со знаком плюс.

$N = R_B - F = 3,33 - 6 = -2,67 \text{ кН}$, стержень сжат.

Эпюры усилий приведены на рис. 2.11.

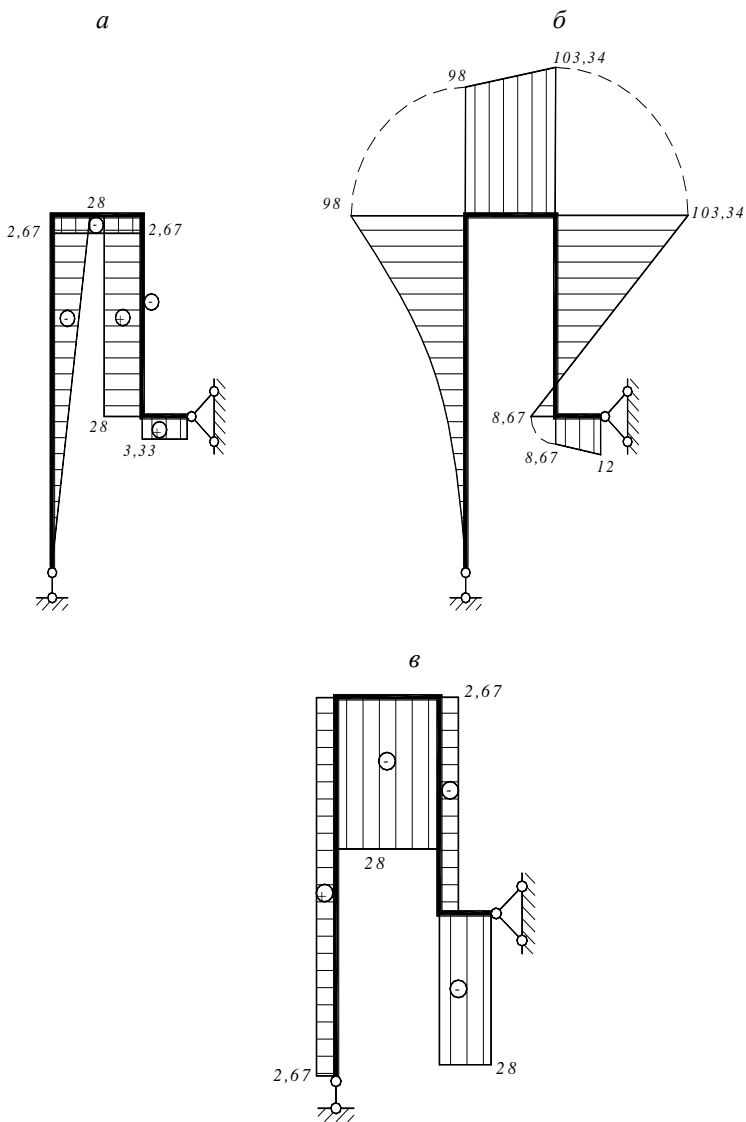


Рис. 2.11. Эпюры внутренних силовых факторов: *а* – эпюра поперечной силы Q_y [кН], *б* – эпюра изгибающего момента M_z [кН·м], *в* – эпюра продольной силы N [кН].

При контроле правильности построения эпюр необходимо обратить внимание на равновесие узлов на эпюре M_z для рамы.

2.2.3. Кручение бруса

При кручении в поперечных сечениях бруса возникает один внутренний силовой фактор – крутящий момент. Кручение прямого бруса происходит при нагружении его внешними скручивающими моментами (парами сил), плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси.

Стержень, работающий на кручение, называют *валом*. Если вал находится в состоянии покоя, то алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к его оси, равна нулю.

Пример 2.5. Для вала (рис. 2.12, а) построить эпюру крутящих моментов.

$$T_1 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad T_2 = 32 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad T_3 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad T_4 = 23 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

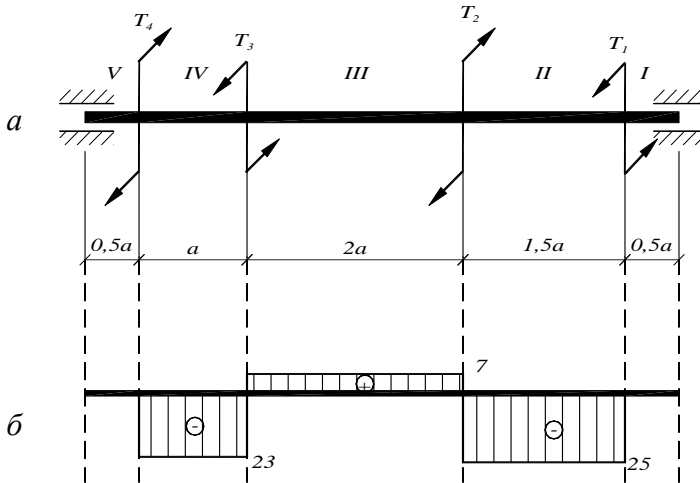


Рис. 2.12. Расчетная схема (а) и эпюра крутящих моментов T [кН·м] (б)

Рассмотрим равновесие правой части.

Участок I

$$T_I = 0.$$

Участок II

$$T_{II} = -T_1 = -25 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Участок III

$$T_{III} = -T_1 + T_2 = -15 + 32 = 7 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Рассмотрим равновесие левой части.

Участок V

$$T_V = 0 .$$

Участок IV

$$T_{IV} = -T_4 = -23 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 2.12, б. Проверка правильности построения эпюры: в местах приложения скручивающих моментов наблюдаются скачки на величину момента.

2.3. Напряжения

Как известно, внешняя сосредоточенная нагрузка представляет собой равнодействующую распределенной нагрузки.

Аналогично внутренние силы являются также равнодействующими внутренних сил, распределенных по площади сечения. Их интенсивность называется напряжением и выражается зависимостью

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}, \quad (2.1)$$

где ΔR – равнодействующая внутренних сил на площадке ΔA , имеющая составляющие ΔN , ΔQ – продольные и поперечные усилия (рис. 2.13).

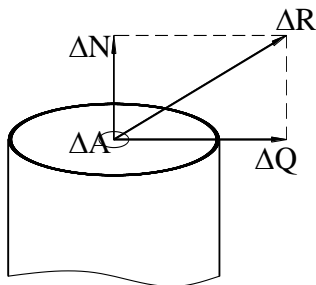


Рис. 2.13. Внутренние усилия в сечении

Интенсивность нормальных сил ΔN в рассматриваемой точке сечения называется *нормальным* напряжением σ , интенсивность касательных сил ΔQ – *касательным* напряжением τ .

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad (2.2)$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} . \quad (2.3)$$

Размерность напряжения – паскаль $[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}]$.

Полное напряжение в рассматриваемой точке тела равно

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} .$$

В сопротивлении материалов нормальные и касательные напряжения имеют важное значение, так как их величины характеризуют прочность сооружения. Существуют зависимости между внутренними усилиями и напряжениями (рис. 2.14):

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA; & Q_y &= \int_A \tau_y dA; & Q_z &= \int_A \tau_z dA; \\ M_z &= \int_A \sigma_y dA; & M_y &= \int_A \sigma_z dA; & T &= \int_A (\tau_y z - \tau_z y) dA. \end{aligned} \quad (2.4)$$

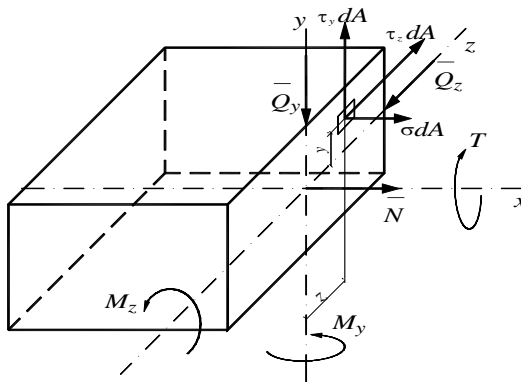


Рис. 2.14. Внутренние усилия и напряжения в сечении

2.4. Деформации и перемещения

Конструкция под действием нагрузки деформируется, то есть изменяются ее форма и размеры.

Изменение линейных размеров называется *линейной деформацией*, а изменение угловых размеров – *угловой деформацией*.

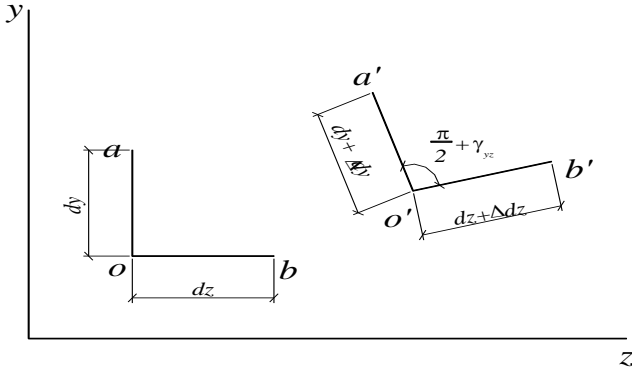


Рис. 2.15. Исходное и деформированное состояния

На рис. 2.15 показаны отрезки Oa и Ob , проведенные через точку O в направлении координатных осей y, z . $\Delta dy, \Delta dz$ – изменение длин этих отрезков после приложения к телу нагрузки.

Отношение $\frac{\Delta dz}{dz} = \varepsilon_z$ представляет собой линейную деформацию. Аналогично $\frac{\Delta dy}{dy} = \varepsilon_y$ и $\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x$.

Изменение первоначально прямого угла между отрезками Oa и Ob представляет собой угловую деформацию γ_{yz} в точке O плоскости yz . Аналогично можно представить угловые деформации γ_{yx} и γ_{xz} в плоскостях yx и xz .

Как показывают опыты, деформации после снятия нагрузки могут исчезнуть полностью или частично.

Зная деформации тела во всех его точках и условия закрепления, можно определить перемещения всех точек тела, т.е. указать их новые координаты после деформации.

2.5. Изгиб прямых стержней

2.5.1. Нормальные напряжения

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает изгибающий момент и поперечная сила. Такой изгиб называется *поперечным*. Если в поперечных сечениях стержня возникает только изгибающий момент, то такой изгиб называется *чистым*.

Изгиб называется *плоским*, или *прямым*, если внешняя нагрузка расположена в одной плоскости, совпадающей с продольной плоскостью симметрии стержня (рис. 2.16).

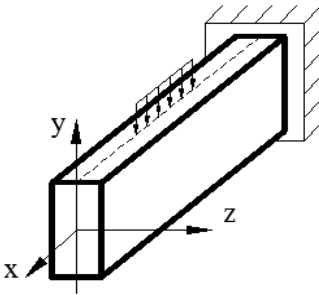


Рис. 2.16. Плоский изгиб

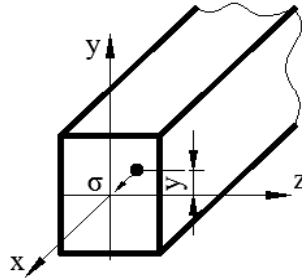


Рис. 2.17. К определению нормальных напряжений на расстоянии y от нейтральной линии

Теория изгиба основана на следующих гипотезах:

1. Поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси стержня после деформации. Эта гипотеза носит название *гипотезы плоских сечений* или *гипотезы Бернулли*.

2. Продольные волокна стержня не давят друг на друга.

При изгибе волокна, расположенные с одной стороны оси стержня, растягиваются, а с противоположной – сжимаются. Слой, разделяющий зону сжатия и зону растяжения, называется *нейтральным слоем*, а линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения – *нейтральной линией*.

При изгибе стержня, симметричного относительно оси z , вертикальной нагрузкой (рис. 2.16) нейтральным слоем будет являться плоскость сечения xz , а нейтральной линией – ось z .

Нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения на расстоянии y от нейтральной линии (рис. 2.17) определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (2.5)$$

где M_z – изгибающий момент; I_z – момент инерции сечения.

Из формулы (2.5) следует:

– нормальные напряжения распределены равномерно по ширине сечения, т.е. во всех точках поперечного сечения, расположенных на одинаковом расстоянии y от нейтральной линии, напряжения одинаковы;

– нормальные напряжения равны нулю на нейтральной линии (при $y=0$)

– максимальные напряжения возникают в крайних точках сечения, наиболее удалённых от нейтральной линии (при $y= y_{\max}$) и определяются по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}, \quad (2.6)$$

где $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$ – осевой момент сопротивления,

– по высоте сечения напряжения изменяются по линейному закону (пропорционально y).

Для разных форм поперечных сечений, симметричных относительно оси z , распределение нормальных напряжений по высоте одинаково и имеет вид, представленный на (рис. 2.18).

Если ось z не является осью симметрии, то максимальные напряжения в точках сечения, наиболее удалённых от оси z , неодинаковы (рис. 2.19) и вычисляются по формулам

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}; \quad \sigma'_{\max} = \frac{M_z}{W'_z}, \quad (2.7)$$

где $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$ $W'_z = \frac{I_z}{y'_{\max}}$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то проверка прочности по нормальным напряжениям производится по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_{adm}, \quad (2.8)$$

где σ_{adm} – допускаемое нормальное напряжение, определяемое из справочной литературы.

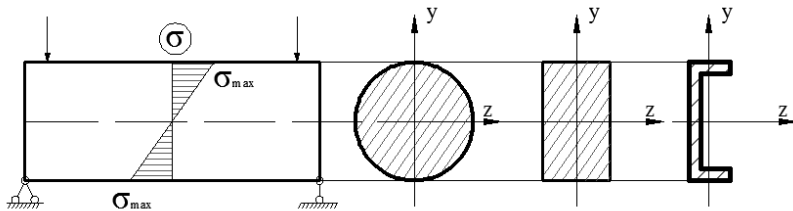


Рис. 2.18. Картина нормальных напряжений для симметричных сечений

Если материал неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию (чугун, бетон и др.), то производится проверка прочности растянутых и сжатых волокон в отдельности по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^t &= \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_{adm}^t, \\ \sigma_{\max}^c &= \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_{adm}^c, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\sigma_{adm}^t, \sigma_{adm}^c$ – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие соответственно.

Осевой момент сопротивления W_z характеризует прочность стержня при изгибе, так как чем больше W_z , тем меньше σ_{\max} и тем прочнее стержень.

Подбор сечения производится по формуле

$$W_z \geq \frac{M_z}{\sigma_{\max}}. \quad (2.10)$$

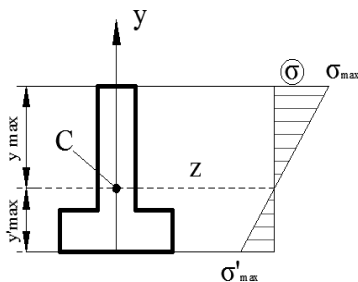


Рис. 2.19. Картина нормальных напряжений для несимметричного сечения

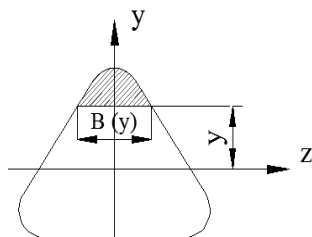


Рис. 2.20. К определению касательных напряжений на расстоянии y от нейтральной линии

По величине W_z определяются поперечные размеры сечения. Если требуется подобрать прокатный профиль (швеллер, двутавр и др.), то по сортаменту выбирается такой номер профиля, у которого момент сопротивления является *ближайшим большим* к вычисленному значению W_z .

2.5.2. Касательные напряжения

Касательные напряжения в поперечном сечении стержня на расстоянии y от нейтральной линии (рис. 2.20) вычисляются по формуле Журавского Д.И.

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z}{b(y) \cdot I_z}, \quad (2.11)$$

где S_z – статический момент относительно оси z заштрихованной части сечения; $b(y)$ – ширина сечения на расстоянии y от нейтральной линии; I_z – момент инерции сечения.

По закону парности касательные напряжения действуют также в продольных сечениях стержня.

Эпюры распределения касательных напряжений по высоте различных сечений, приведены на рис 2.21,

где $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{A}$ – для прямоугольного поперечного сечения;

$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{A}$ – для круглого поперечного сечения;

A – площадь поперечного сечения.

Касательные напряжения также распределены равномерно по ширине сечения, как и нормальные напряжения, но характер распределения τ по высоте сечения зависит от его формы. Однако для всех форм касательные напряжения равны нулю в крайних точках сечения, наиболее удалённых от нейтральной линии.

Проверка прочности по касательным напряжениям производится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} \cdot S_z}{b(y) \cdot I_z} \leq \tau_{adm}, \quad (2.12)$$

где τ_{adm} – допускаемое касательное напряжение.

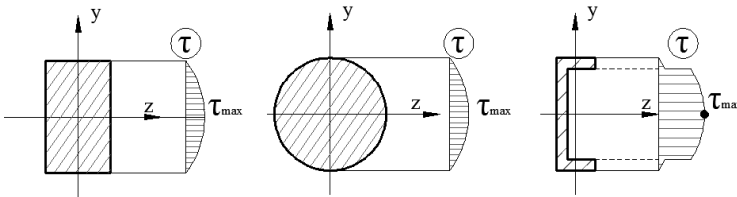


Рис. 2.21. Картина касательных напряжений для различных сечений

2.5.3. Главные напряжения

Главными называются напряжения, которые действуют на главных площадках, а *главными площадками* – площадки, на которых касательные напряжения равны нулю.

Величина и направления главных напряжений при изгибе определяются по следующим формулам:

$$\sigma_{\max}^{\pm} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma}, \quad (2.14)$$

где σ и τ вычисляются по формулам (2.5) и (2.11).

На нейтральной линии, где $\sigma=0$, главные напряжения равны касательным, то есть

$$\sigma_{\max} = +\tau, \sigma_{\min} = -\tau$$

и направлены к оси стержня под углом $\pm 45^\circ$.

Условие прочности по главным напряжениям имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \leq \sigma_{adm} . \quad (2.15)$$

Проверка прочности по главным напряжениям производится в тех сечениях стержня, в которых изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y имеют одновременно большие значения. При этом по высоте сечения следует найти такие точки, в которых σ и τ имеют одновременно большие значения. Как правило, такими точками являются места резкого изменения сечения тонкостенных стержней, наиболее удалённых от оси z .

2.5.4. Дифференциальное уравнение упругой линии и его интегрирование

Перемещение центра тяжести сечения (рис. 2.22) в направлении, перпендикулярном оси стержня, называется *прогибом* и обозначается v . Одновременно сечения при изгибе стержня поворачиваются на угол θ .

Изогнутая ось стержня называется *упругой линией*.

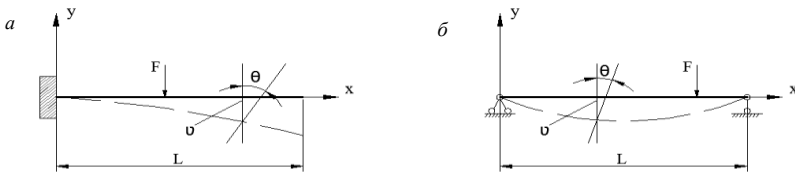


Рис. 2.22. Изогнутая ось стержня

Прямоугольную систему координат принято выбирать следующим образом: начало – в крайнем левом сечении стержня, ось y – вверх, ось x – вправо, ось z – перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 2.22).

Прогиб v считается положительным, если перемещение центра тяжести сечения происходит вверх, т.е. в положительном направлении оси y . Угол поворота сечения θ считается положительным при повороте против часовой стрелки.

Между величинами θ и v имеет место дифференциальная зависимость

$$\theta = \frac{dv}{dx} . \quad (2.16)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии при малых упругих перемещениях имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} , \quad (2.17)$$

где E – модуль упругости материал; I_z – момент инерции сечения.

Интегрируя обе части уравнения (2.17), получим формулу для определения углов поворота сечений:

$$\theta = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C . \quad (2.18)$$

Интегрируя второй раз, получим формулу для определения прогибов:

$$v = \int dx \int \frac{M_z}{EI_z} dx + Cx + D , \quad (2.19)$$

где C и D – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий, которые учитывают закрепление стержня и формулируются следующим образом:

– в жёстко закреплённом сечении стержня (рис. 2.22, а) равны нулю прогиб v и угол поворота сечения θ , т.е.

$$\text{при } x=0 \quad v=0$$

$$\text{при } x=0 \quad \theta=0,$$

– на шарнирных опорах (рис 2.22, б) равны нулю прогибы стержня, т.е.

$$\text{при } x=0 \quad v=0$$

$$\text{при } x=L \quad v=0$$

2.5.5. Метод начальных параметров

Недостатком метода непосредственного интегрирования, рассмотренного выше, является необходимость определения большого количества произвольных постоянных при большом количестве участков стержня. Если стержень имеет n участков, то необходимо определить $2n$ произвольные постоянные из граничных условий и условий

сопряжения линейных и угловых перемещений на границах смежных участков.

В методе начальных параметров (МНП) независимо от количества участков необходимо определить две произвольные постоянные из граничных условий.

Для стержня постоянной жесткости EI_z и положительных направлений внешних нагрузок и опорных реакций, представленных на рис. 2.23, метод дает следующую формулу для определения прогибов, которая называется *универсальным уравнением упругой линии*:

$$EI_z v = EI_z v_0 + EI_z \theta_0 x + \sum M_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum F_i \frac{(x - b_i)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(x - c_i)^4}{4!} - \sum q_i \frac{(x - d_i)^4}{4!} \quad (2.20)$$

где M_i , F_i , q_i – внешние нагрузки, включая опорные реакции, расположенные между началом координат и сечением, в котором определяется перемещение; a_i, b_i, c_i, d_i – расстояние от начала координат до точек приложения внешних нагрузок и опорных реакций; x – расстояние от начала координат до сечения, в котором определяется перемещение; v_0 и θ_0 – начальные параметры (прогиб и угол поворота сечения в начале координат), определяемые из граничных условий.

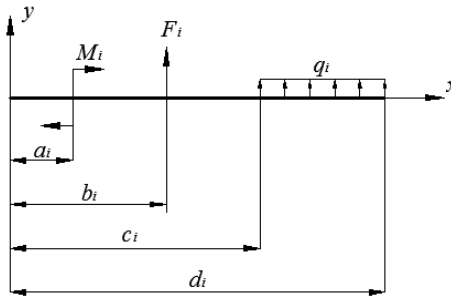


Рис. 2.23. Положительное направление внешних нагрузок

Если какая-либо из внешних нагрузок или опорных реакций имеет обратное направление, то перед соответствующим слагаемым в выражении (2.20) следует изменить знак на обратный.

Дифференцируя выражение (2.20), получим формулу для определения углов поворота сечений:

$$EI_z \theta = EI_z \theta_0 + \sum M_i (x - a_i) + \sum F_i \frac{(x - b_i)^2}{2!} + \sum q_i \frac{(x - c_i)^3}{3!} - \sum q_i \frac{(x - d_i)^3}{3!} \quad (2.21)$$

Пример 2.6. Расчет балки на прочность и жесткость.

Порядок расчета:

1. Из полученных в примере 2.2. эпюр внутренних силовых факторов выбрать значения максимального изгибающего момента M_z^{\max} и максимальной поперечной силы Q_y^{\max} .
2. Определить необходимый момент сопротивления сечений;
3. Подобрать заданные сечения (рис.2.24) по нормальным напряжениям, полагая $\sigma_{adm} = 160$ МПа и построить эпюры нормальных напряжений. Проверить прочность заданных сечений по касательным напряжениям, полагая $\tau_{adm} = 0,6\sigma_{adm}$;
4. Определить рациональное сечение балки;
5. Вычислить прогибы балки рационального сечения, полагая $E=2 \cdot 10^5$ МПа, и построить упругую линию;
6. Проверить жесткость балки, полагая $v_{adm} = 0,01l$, где l – полная длина балки.

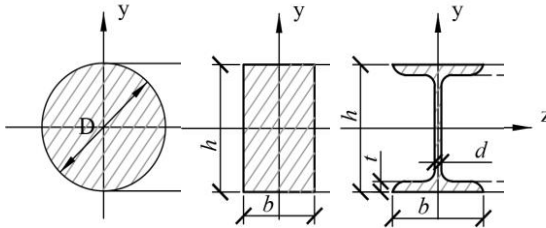


Рис. 2.24. Заданные сечения

Решение:

1. $M_z^{\max} = 16$ кН·м, $Q_y^{\max} = 11,75$ кН
2. Необходимый момент сопротивления сечений:

$$W_z \geq \frac{16 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{160 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}} = 100 \text{ см}^3$$

3. Подбор сечений.

Расчет на прочность балки круглого поперечного сечения.

а) Определение размеров поперечного сечения.

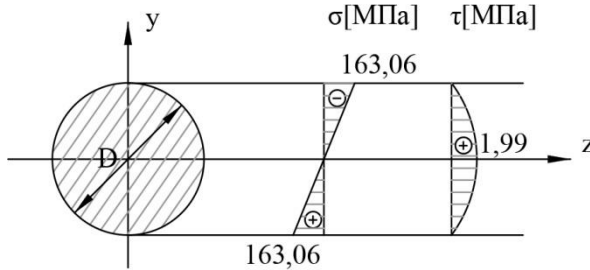


Рис. 2.25. Эпюры нормальных и касательных напряжений для балки круглого поперечного сечения

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} \geq 100 \text{ см}^3 \rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{100 \cdot 32}{\pi}} = 10 \text{ см}$$

Принимаем $D=10\text{см}$.

б) Проверка прочности по нормальным напряжениям.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{16 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{\pi \cdot 10^3 / 32} = 16306 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 163,06 \text{ МПа} > \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа}$$

Перенапряжение составляет $\frac{163,06 - 160}{160} 100\% = 1,9\% < 5\%$, следовательно, условие прочности удовлетворяются.

в) Проверка прочности по касательным напряжениям.

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y^{\max}}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{11,75 \cdot 10^3 \text{ Н}}{78,5 \text{ см}^2} = 199 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 1,99 \text{ МПа} < \tau_{\text{adm}} = 96 \text{ МПа},$$

где $A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10^2 \text{ см}}{4} = 78,5 \text{ см}^2$ – площадь поперечного сечения.

Условие прочности удовлетворяется.

Расчет на прочность балки прямоугольного поперечного сечения при условии $h=3b$.

а) Определение размеров прямоугольного поперечного сечения.

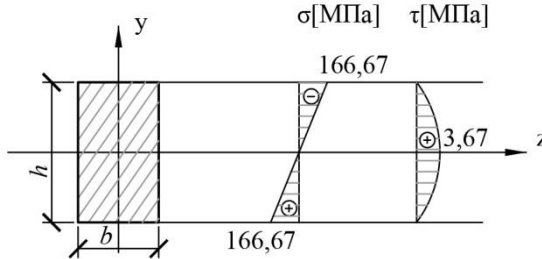


Рис. 2.26. Эпюры нормальных и касательных напряжений для балки прямоугольного поперечного сечения

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{9}{6}b^3 = 1,5b^3 \geq 100 \text{ см}^2 \rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{100}{1,5}} = 4 \text{ см}$$

Принимаем $b=4\text{см}$, тогда $h=3b=3\cdot 4=12\text{см}$

б) Проверка прочности по нормальным напряжениям.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{16 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{\frac{4 \text{ см} \cdot 12^2 \text{ см}}{6}} = 16667 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 166,67 \text{ МПа} > \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа}$$

Перенапряжение составляет $\frac{166,67 - 160}{160} \cdot 100\% = 4,17\% < 5\%$. Условие прочности удовлетворяется.

в) Проверка прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y^{\max}}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{11,75 \cdot 10^3 \text{ Н}}{48 \text{ см}^2} = 367 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 3,67 \text{ МПа} < \tau_{\text{adm}} = 96 \text{ МПа}$$

где $A=bh=4\text{см} \cdot 12\text{см}=48\text{см}^2$.

Условие прочности удовлетворяется.

Расчет на прочность балки двутаврового поперечного сечения.

а) Определение размеров двутаврового поперечного сечения.

По сортаменту принимаем балку №16, у которой $W_z=109\text{см}^3 > 100\text{см}^3$, $h=16\text{см}$, $b=8,1\text{см}$, $d=0,5\text{см}$, $t=0,78\text{см}$, $A=20,2\text{см}^2$, масса $1\text{м}=15,9\text{кг}$, $I_z=873\text{см}^4$, $S_z=62,3\text{см}^3$.

б) Проверка прочности по нормальным напряжениям.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{16 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{109 \text{ см}^3} = 14679 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 146,79 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$$

Условие прочности удовлетворяется.

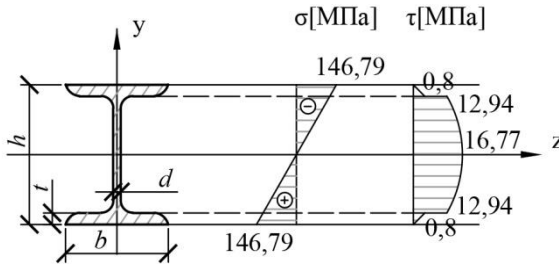


Рис. 2.27. Эпюры нормальных и касательных напряжений для балки двутаврового поперечного сечения

в) Проверка прочности по касательным напряжениям.

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} \cdot S_z}{b(y) \cdot I_z} = \frac{11,75 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 62,3 \text{ см}^3}{0,5 \text{ см} \cdot 873 \text{ см}^4} = 1677 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 16,77 \text{ МПа} < \tau_{adm} = 96 \text{ МПа} ,$$

где $b(y)=d=0,5\text{см}$.

Определим касательные напряжения в месте перехода полки в стенку. Статический момент сечения будет равен:

$$S_z = b \cdot t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 8,1 \text{ см} \cdot 0,78 \text{ см} \left(\frac{16 \text{ см}}{2} - \frac{0,78 \text{ см}}{2} \right) = 48,08 \text{ см}^3$$

Тогда при $b(y)=b=8,1\text{см}$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} \cdot S_z}{b(y) \cdot I_z} = \frac{11,75 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 48,08 \text{ см}^3}{8,1 \text{ см} \cdot 873 \text{ см}^4} = 80 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 0,8 \text{ МПа}$$

При $b(y)=d=0,5\text{см}$

$$\tau = \frac{11,75 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 48,08 \text{ см}^3}{0,5 \text{ см} \cdot 873 \text{ см}^4} = 1294 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 12,94 \text{ МПа}$$

4. Определим рациональное сечение балки. Для этого определим массу каждого сечения.

$$m^{\circ} = l \cdot A \cdot \gamma = 600 \text{ см} \cdot 78,5 \text{ см}^2 \cdot 7,8 \text{ г/см}^3 = 367380 \text{ г} = 367,38 \text{ кг}$$

$$m^{\square} = l \cdot A \cdot \gamma = 600 \text{ см} \cdot 48 \text{ см}^2 \cdot 7,8 \text{ г/см}^3 = 224640 \text{ г} = 224,64 \text{ кг}$$

$$m^{\text{I}} = l \cdot \text{масса } 1 \text{ м} = 6 \text{ м} \cdot 15,9 \text{ кг} = 95,4 \text{ кг}$$

где l – длина балки; A – площадь поперечного сечения; γ – удельный вес металла.

Наиболее рациональной является балка двутаврового поперечного сечения, т.к. она имеет наименьшую массу.

5. Определим прогибы балки рационального сечения методом начальных параметров (МНП).

Граничные условия:

- 1) $v_A=0$ при $x=0$
- 2) $v_B=0$ при $x=4\text{м}$

В соответствии с этими граничными условиями приравниваем нулю выражение (формула 2.20):

$$1) EI_z v_A = EI_z v_0 + EI_z \theta_0 \cdot 0 = 0 \rightarrow EI_z v_0 = 0$$

$$2) EI_z v_B = EI_z v_0 + EI_z \theta_0 \cdot 4 + \frac{R_A (4-0)^3}{6} - \frac{q(4-0)^4}{24} + \frac{q(4-3)^4}{24} = 0 \rightarrow EI_z \theta_0 = -15,4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$$

Прогиб балки при $x=3\text{м}$:

$$EI_z v = EI_z v_0 + EI_z \theta_0 \cdot 3 + \frac{R_A (3-0)^3}{6} - \frac{q(3-0)^4}{24} = -13,56 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$$

$$v = \frac{-13,56 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{см}^3}{EI_z} = \frac{-13,56 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{см}^3}{2 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \cdot 873 \text{ см}^4} = -0,78 \text{ см},$$

где E – модуль упругости стали, I_z – момент инерции рационального сечения.

Прогиб балки при $x=6\text{м}$:

$$EI_z v = EI_z v_0 + EI_z \theta_0 \cdot 6 + \frac{R_A (6-0)^3}{6} - \frac{q(6-0)^4}{24} + \frac{q(6-3)^4}{24} - \frac{R_B (6-4)^3}{6} + \frac{M_e (6-4)^2}{2} =$$

$$= 52,54 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$$

$$v = \frac{52,54 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{см}^3}{2 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \cdot 873 \text{ см}^4} = 3 \text{ см}.$$

Линия прогибов представлена на рис.(2.7, д)

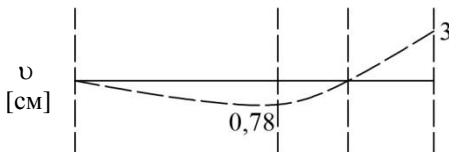


Рис. 2.28. Линия прогибов балки

6. Проверка жесткости балки.

Максимальный прогиб балка имеет на конце консоли $u_{\max}=3\text{см}$. Допускаемый прогиб $u_{adm}=0,01l=0,01\cdot 600\text{см}=6\text{см}$. Условие жесткости выполняется, т.к. $u_{\max}<u_{adm}$.

2.6. Геометрические характеристики плоских сечений

На сопротивление стержня различным видам деформаций оказывает влияние форма поперечных сечений. К геометрическим характеристикам поперечного сечения бруса относятся площадь, статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления.

Статические моменты площади сечения A относительно координатных осей y и z (рис.2.29) представляются выражениями:

$$S_y = \int_A z dA = z_c A, \quad S_z = \int_A y dA = y_c A. \quad (2.22)$$

Задав произвольные оси y и z , находим координаты центра тяжести сечения:

$$z_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_z}{A}. \quad (2.23)$$

Осевые моменты инерции сечения относительно осей y и z (рис. 2.16) представляются выражениями:

$$J_y = \int_A z^2 dA, \quad J_z = \int_A y^2 dA. \quad (2.24)$$

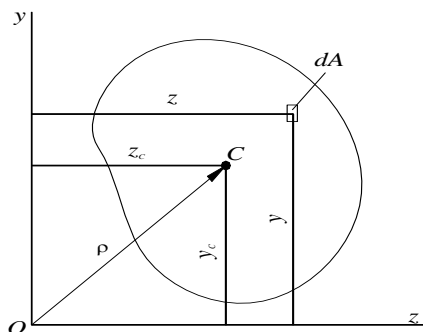


Рис. 2.29. К вычислению статического момента плоской фигуры

Центробежный момент инерции относительно осей y и z равен

$$D_{yz} = \int_A zy dA . \quad (2.25)$$

Полярный момент инерции сечения относительно точки O имеет выражение:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA . \quad (2.26)$$

Моменты инерции сечения обладают следующими свойствами:

1) сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух координатных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат:

$$J_p = J_z + J_y ; \quad (2.27)$$

2) момент инерции составного сечения равен алгебраической сумме моментов инерции составляющих частей сечения;

3) центробежный момент инерции относительно оси симметрии сечения и перпендикулярной ей оси равен нулю;

4) осевой момент инерции сечения относительно оси, параллельной центральной, равен осевому моменту инерции относительно этой центральной оси плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между осями (рис. 2.30);

$$J_{y_1} = J_{y_c} + b^2 A , \quad J_{z_1} = J_{z_c} + a^2 A . \quad (2.28)$$

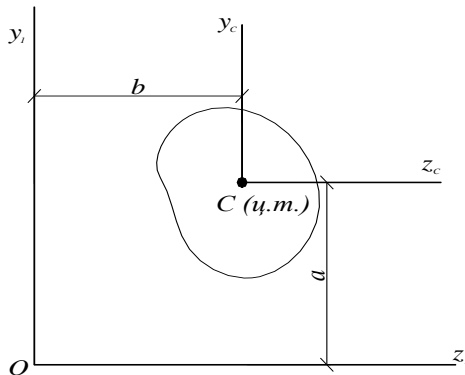


Рис. 2.17. Две системы осей координат для сечения

5) центробежный момент инерции сечения относительно осей y_1 и z_1 вычисляется по формуле

$$D_{y_1 z_1} = D_{y_c z_c} + abA \quad (2.29)$$

Пример 2.7. Для заданного поперечного сечения (рис. 2.31) требуется:

- 1) определить положение центра тяжести сечения;
- 2) вычислить осевой момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей по нижнему контуру сечения.

Введем прямоугольную систему координат Ozy . Пронумеруем элементы сечения с указанием их центров тяжести сечения и центральных осей $y_i z_i$. Определим координаты центра тяжести каждого элемента относительно осей yz (табл. 1 приложения 1):

$$z_1 = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ см}, \quad y_1 = \frac{1}{3} \cdot 8 = 2,67 \text{ см};$$

$$z_2 = 12 + \frac{4R}{3\pi} = 13,7 \text{ см}, \quad y_2 = R = 4 \text{ см}.$$

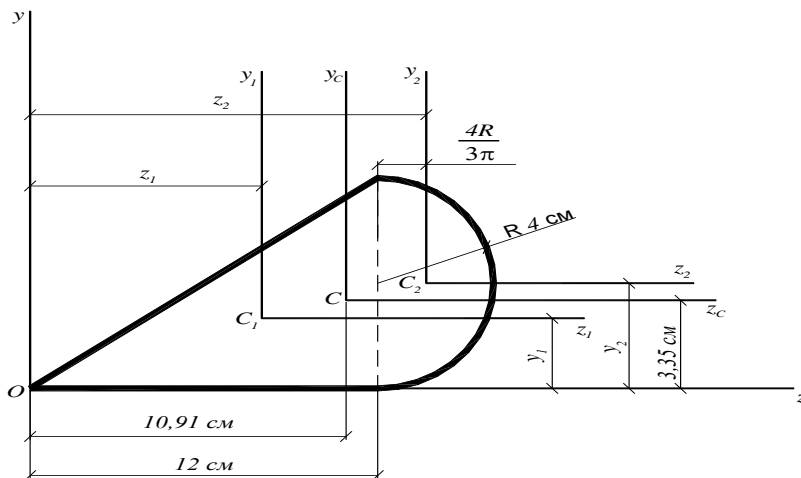


Рис. 2.31. К примеру 2.7

Координаты центра тяжести сечения равны:

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot 8 + \pi \cdot 4^2 \cdot 13,7}{\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 + \pi \cdot 4^2} = \frac{1072,29}{48 + 50,24} = 10,91 \text{ см.}$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot 2,67 + \pi \cdot 4^2 \cdot 4}{\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 + \pi \cdot 4^2} = 3,35 \text{ см.}$$

Вычислим осевой момент инерции сечения относительно оси z:

$$J_z = \sum_{i=1}^2 (J_{z_i} + y_{ci}^2 A_i) = J_{z_1} + y_1^2 A_1 + J_{z_2} + y_2^2 A_2 =$$

$$= \frac{8^3 \cdot 12}{36} + 2,67^2 \cdot 48 + \frac{\pi (2R)^4}{2 \cdot 64} + 4^2 \cdot 50,24 = 1417,17 \text{ см}^4.$$

2.7. Шарнирные фермы

2.7.1. Понятие о фермах

Ферма - стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой, если в ней все жесткие узлы заменить шарнирными. Как показывают сравнительные расчеты, при действии узловой нагрузки, усилия в стержнях фермы с жесткими узлами мало отличаются от усилий в стержнях шарнирной фермы, которую и будем рассматривать в дальнейшем.

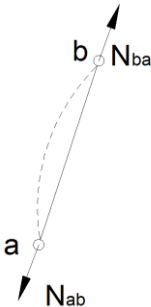


Рис. 2.32. Невесомый стержень

Так как нагрузка приложена в узлах, то по условию равновесия невесомого стержня ab (рис 2.32) на него со стороны узлов действуют равные и противоположные по направлению силы N_{ab} и N_{ba} . Стержни целесообразно делать прямыми. В этом случае они будут испытывать только продольные усилия. В кривом стержне, показанном штрихами, возникают так же поперечные усилия и изгибающие моменты.

Назначение фермы, по существу, такое же, как и балки. Известно, что в последних нормальные напряжения распределяются по сечению

неравномерно. Когда стержень работает только на продольные усилия, материал можно использовать более выгодно. Благодаря этому ферма получается более легкой, чем балка. Кроме плоских ферм, у которых оси всех стержней расположены в одной плоскости, применяют пространственные фермы, которые не обладают этим признаком. Их расчет часто сводится к расчету плоских ферм.

Расстояние между осями опор фермы (рис. 2.33) называется пролётом. Стержни, расположенные по внешнему контуру фермы, называются поясными и образуют *пояса*; стержни, соединяющие пояса, образуют *решетку* и называются: вертикальные – *стойками*, наклонные – *раскосами*. Расстояние между соседними узлами любого пояса фермы (обычно измеряемое по горизонтали) называется *панелью*.

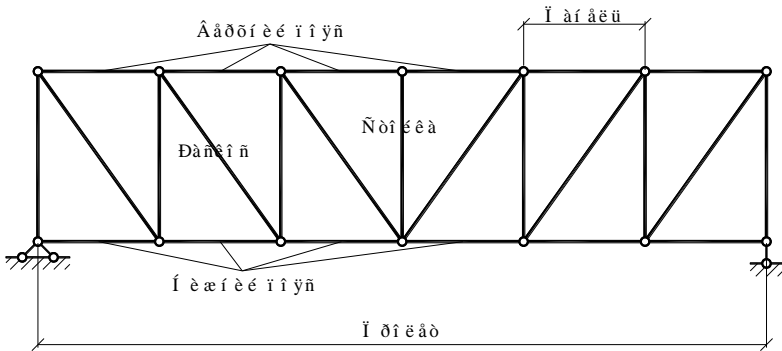


Рис. 2.33. Ферма

Классификация ферм может быть произведена по нескольким признакам, из которых выделим два.

По очертанию поясов различают фермы с поясами параллельными и полигональными (или ломаными).

По типу решетки различают фермы с простой решеткой (раскосной, треугольной) и сложной (многораскосной). Раскосная решетка (рис. 2.34, а) – это зигзагообразная решетка, состоящая попеременно из стоек и раскосов. Треугольная решетка (рис.2.34,б) – это зигзагообразная решетка, состоящая только из раскосов. Сложная решетка может быть двухраскосная (рис.2.34,в), полураскосная (рис.2.34,г), ромбическая (рис.2.34,д). Существуют также фермы с составной решеткой (рис.2.34,е), включающей простую основную решетку и дополнительные элементы (шпренгели, рис.2.34,ж), предназначенные для разделения большой панели на меньшие.

Анализ изменяемости плоской фермы начинается с формулы

$$2Y >, =, < C + C_{\text{оп}},$$

где Y – число узлов, C – число стержней, $C_{\text{оп}}$ – число опорных связей

При первом знаке неравенства ферма изменяема. При знаке равенства имеем ферму с достаточным числом связей, при последнем знаке неравенства – ферму с лишними связями. Последние 2 условия являются необходимыми, но недостаточными для неизменяемости системы, так как связи могут быть размещены неправильно. Необходимо провести анализ геометрической структуры фермы. Ферма заведомо неизменяема, если она образована из треугольника и последовательно присоединённых двухстержневых узлов.

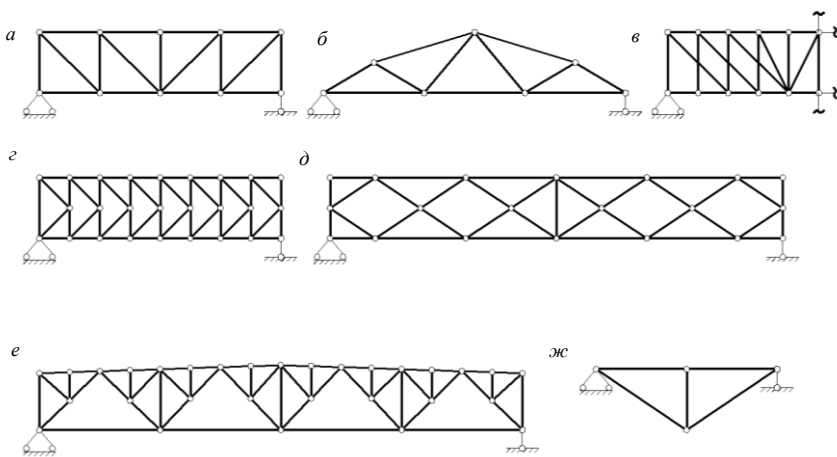


Рис. 2.34. Фермы по типу решетки:

простая: *a* – раскосная, *б* – треугольная, *в* – двухраскосная, *г* – полураскосная, *д* – ромбическая; составная: *е* – шпренгельная, *ж* – шпренгель

Для неизменяемости фермы необходимо: а) достаточное количество стержней в целом; б) рациональное распределение их с позиций обеспечения достаточности в отдельных частях.

Для определения продольных усилий в стержнях фермы наиболее часто применяют метод вырезания узлов и метод сечений.

Если нагрузка расположена между узлами фермы и передается непосредственно на ее стержни в промежуточных сечениях, то кроме продольных усилий, возникают изгибающие моменты и поперечные силы. Нагруженные стержни фермы работают в этом случае как балки, подвергнутые совместному действию продольных и поперечных сил.

Сосредоточенная сила F приложена между узлами A и B фермы (рис. 2.35,а). Если бы стержень AB представлял собой простую балку на 2-х опорах, то на ее концах возникли бы опорные реакции R_a и R_b (рис. 2.35,б). В узлах A и B фермы приложим силы $\pm R_a$ и $\pm R_b$. От добавления такой нагрузки усилия в стержнях фермы не изменятся.

Усложнив таким образом нагрузку, получим вместо одной силы F пять сил, которые разобьем на две группы (рис. 2.35, б, в).

Первая группа сил (рис. 2.35,б) является уравновешенной системой и вызывает усилия только в стержне AB . Вторая группа узловых сил (рис. 2.35,в) вызывает в ферме продольные усилия.

Напряжения в стержне AB вычисляются по формуле внецентренного растяжения-сжатия:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}$$

где N – продольное усилие, A – площадь поперечного сечения, M – изгибающий момент, W – момент сопротивления поперечного сечения стержня.

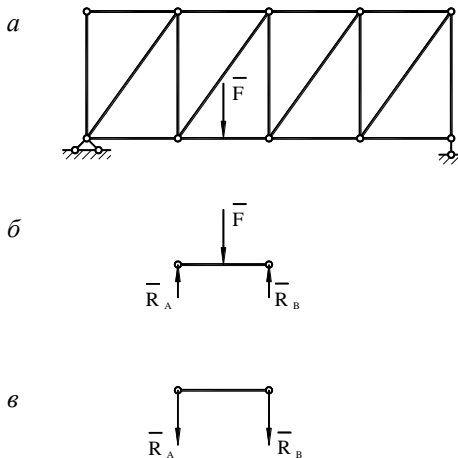


Рис. 2.35. Ферма с внеузловой передачей нагрузки

2.7.2. Расчет по методу вырезания узлов

Анализ структуры ферм показывает, что в ферме можно определить все усилия последовательным вырезанием узлов (т.е. существует такой порядок обхода узлов, при котором в каждом уравнении равновесия встречаются только два неизвестных усилия).

Метод вырезания узлов позволяет установить некоторые правила для усилий в стержнях.

1. В ненагруженном стержневом узле (рис. 2.36,*а*) усилия в стержнях равны нулю (оба стержня нулевые).
2. Если в ненагруженном узле сходятся три стержня (рис.2.36,*б*), причем два из них лежат на одной прямой, то усилия в последних равны друг другу по величине и по знаку, а третий стержень нулевой.

Заменив N_1 и N_2 равнодействующей R , получим случай 1. Значит, $N_3 = 0$, $R = 0$. В то же время $R = 0$, если $N_1 = N_2$.

3. Если в узле сходятся три стержня, из которых два лежат на одной прямой, и есть нагрузка F , действующая по оси третьего стержня (рис.2.36,*в*), то усилие в последнем равно нагрузке, а усилия в двух других стержнях равны друг другу по величине и знаку.

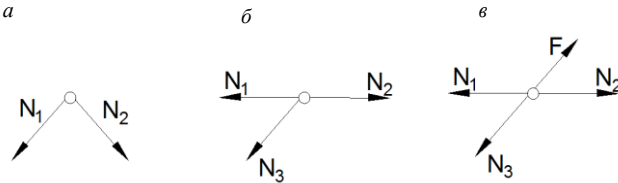


Рис. 2.36. Правила метода вырезания узлов:
а – при двух стержнях, *б*, *в* – при трех стержнях

Заменив N_1 и N_2 равнодействующей R_1 , а N_3 и F равнодействующей R_2 , получим случай 1. Значит, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$. В то же время $R_2 = 0$, если $N_3 = F$.

При использовании метода вырезания узлов оси проекций следует выбирать так, чтобы получались уравнения с разделенными неизвестными.

2.7.3. Расчет по методу сечений

Этот способ применяется, главным образом, в тех случаях, когда удается расечь ферму на две части так, чтобы при этом перерезанны-

ми оказались три ее стержня, направления осей которых не пересекаются в одной точке. По сравнению с методом вырезания узлов этот метод менее подвержен неточностям ввиду отсутствия цепной зависимости между неизвестными. Кроме того, при определении усилия в каком-либо стержне к нему не надо добираться издалека.

Рассмотрим ферму (рис.2.37), в которой по методу сечений определим усилия в стержнях 2 – 4, 1 – 3 и 2 – 3. С этой целью проведем сечение I – I через эти стержни, а усилия обозначим соответственно N_{24} , N_{13} и N_{23} . Каждая из полученных двух частей фермы находится в равновесии под действием приложенных внешних сил, включая и опорные реакции, и продольных сил, введенных вместо рассеченных стержней.

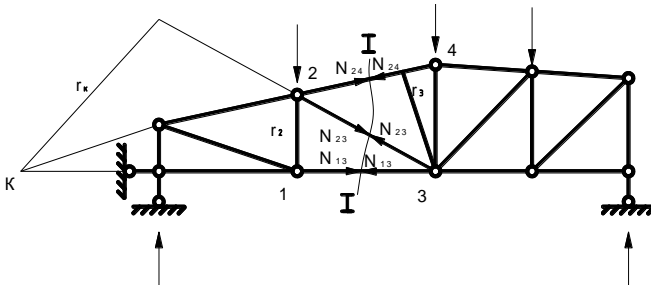


Рис. 2.37. Расчетная схема фермы

Рассмотрим левую часть и составим для нее уравнения равновесия. С точки зрения идеального разделения неизвестных целесообразно выразить условия равновесия в форме уравнений моментов относительно точек попарного взаимного пересечения сил N_{24} , N_{13} и N_{23} :

$$\begin{aligned} \Sigma M_3^{лев} = 0: & \quad N_{24} r_3 + \Sigma M_{F3} = 0; \\ \Sigma M_2^{лев} = 0: & \quad -N_{13} r_2 + \Sigma M_{F2} = 0; \\ \Sigma M_K = 0: & \quad N_{23} r_K + \Sigma M_{FK} = 0, \end{aligned}$$

где ΣM_{F3} , ΣM_{F2} , и ΣM_{FK} – суммы моментов от внешних сил, включая и опорные реакции, относительно точек 3, 2 и K.

Таким образом,

$$N_{24} = \Sigma M_{F3} / r_3; \quad N_{13} = -\Sigma M_{F2} / r_2; \quad N_{23} = \Sigma M_{FK} / r_K.$$

Естественно, такой же результат получим, рассматривая правую часть фермы.

При параллельных поясных стержнях точка K лежит в бесконечности. Тогда вместо уравнения моментов следует использовать уравнение проекций. Усилие в раскосе можно найти из условия $\Sigma Y = 0$.

2.7.4. Матричная форма определения усилий

Матричное представление расчета фермы имеет вид:

$$\vec{N} = L_N \vec{F},$$

где \vec{N} – вектор усилий в стержнях фермы; L_N – матрица влияния усилий в стержнях фермы; \vec{F} – вектор нагрузки.

Формирование матрицы влияния усилий L_N упрощается благодаря тому, что нагрузка на ферму обычно передается в определенных точках – ее узлах. Матрицу L_N можно получить, вычислив усилия в стержнях от последовательного нагружения узлов фермы единичными силами.

Вычисление элементов матрицы L_N иногда удобно производить через матрицы влияния моментов и поперечных сил в балке. Для этого достаточно использовать имеющиеся зависимости между усилиями в стержнях фермы и моментами и поперечными силами в сечениях балки того же пролета.

Пример 2.8. Расчет плоской статически определимой фермы.

Для заданной фермы требуется:

1. Провести анализ изменяемости.
2. Определить с помощью аналитических методов усилия в отмеченных стержнях

Решение.1. Заданная ферма (рис. 2.38) имеет 14 узлов (У), 25 стержней (С) и 3 опорных связи (С_{оп}). Имеем $2У - С - С_{оп} = 2 \cdot 14 - 25 - 3 = 0$ – статически определима. Ферма состоит только из треугольников и, следовательно, геометрически неизменяема.

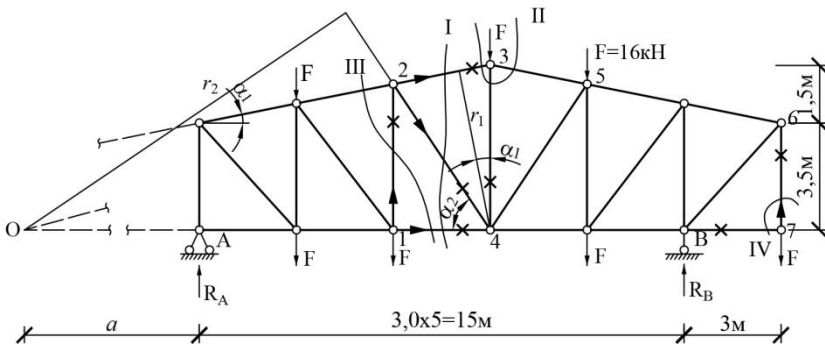


Рис. 2.38. Расчетная схема фермы

2. Из условия равновесия фермы определим значения реакций:

$$\sum M_B = R_A \cdot 15 - F(2 \cdot 12 + 9 + 6 + 2 \cdot 3 - 3) = 0; \quad R_A = 44,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -R_B \cdot 15 + F(18 + 2 \cdot 12 + 9 + 6 + 2 \cdot 3) = 0; \quad R_B = 67,2 \text{ кН};$$

$$\sum Y = R_A + R_B - 7F = 44,8 + 67,2 - 7 \cdot 16 = 0.$$

Сечение I

Усилие N_{14}

Из условия равновесия левой части фермы записываем уравнение

$$\sum M_2 = R_A \cdot 6 - 2F \cdot 3 - N_{14} \cdot l_{1-2} = 0.$$

Здесь $l_{1-2} = 3,5 + \frac{2}{3} \cdot 1,5 = 4,5 \text{ м}; \quad N_{14} = 38,4 \text{ кН}.$

Усилие N_{23}

$$\sum M_4 = R_A \cdot 9 - 2F \cdot 6 - F \cdot 3 + N_{23} \cdot r_1 = 0.$$

Здесь $r_1 = l_{3-4} \cdot \cos \alpha_1; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1,5}{9} = 0,167;$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,167^2}} = 0,986; \quad l_{3-4} = 5 \text{ м};$$

$$r_1 = 5 \cdot 0,986 = 4,93 \text{ м}; \quad N_{23} = -33,1 \text{ кН}.$$

Усилие N_{24}

$$\sum M_0 = -R_A \cdot a + 2F(a + 3) + F(a + 6) + N_{24} \cdot r_2 = 0.$$

Здесь $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3,5}{a}; \quad a = \frac{3,5}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{3,5}{0,167} = 20,96 \text{ м};$

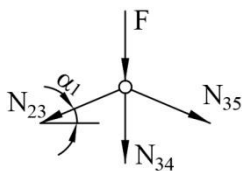
$$r_2 = (a + 9) \sin \alpha_2; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{l_{1-2}}{3} = \frac{4,5}{3} = 1,5;$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{1,5}{\sqrt{1 + 1,5^2}} = 0,832;$$

$$r_2 = 29,96 \cdot 0,832 = 24,93 \text{ м}; \quad N_{24} = -10,39 \text{ кН}.$$

Сечение II

Усилие N_{34}



$$\sum X = -N_{23} \cos \alpha_1 + N_{35} \cos \alpha_1 = 0;$$

$$N_{23} = N_{35} = -33,1 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 2 N_{23} \sin \alpha_1 + N_{34} + F = 0;$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{0,167}{\sqrt{1 + 0,167^2}} = 0,165;$$

$$N_{34} = -5,07 \text{ кН.}$$

Сечение III

Усилие N_{12}

$$\sum M_0 = -R_A a + 2F(a+3) + F(a+6) - N_{12}(a+6) = 0;$$

$$N_{34} = 9,61 \text{ кН.}$$

Сечение IV

Усилие N_{67}

$$\sum Y = N_{67} - F = 0; \quad N_{67} = 16 \text{ кН}; \quad N_{B7} = 0.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое внутренние силовые факторы и как они определяются?

2. На какие составляющие раскладываются главный вектор \bar{R} и главный момент M ?

3. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении балки при плоском изгибе?

4. Правила знаков для определения внутренних усилий?

5. Какой внутренний силовой фактор возникает в поперечном сечении бруса при кручении?

6. Что называется нормальным напряжением?

7. Что называется касательным напряжением?

8. Размерность напряжения.

9. Что такое линейная и угловая деформация.

10. Что называется изгибом?

11. Дать определение чистого и поперечного изгибов?

12. Сформулируйте гипотезу плоских сечений.

13. Дать определение нейтральной линии.

14. Как выглядят эпюры нормальных и касательных напряжений для различных видов сечений?

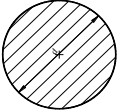
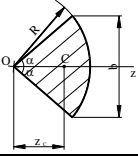
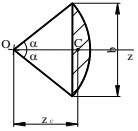
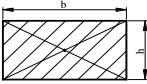
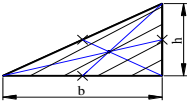
15. Дать определение главных напряжений и главных площадок.

16. Дать определение упругой линии.

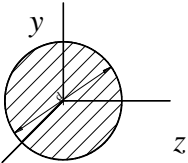
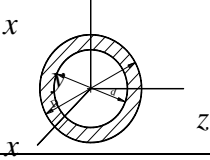
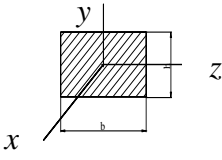
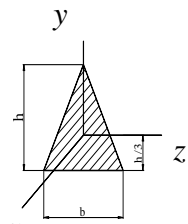
17. Укажите основное свойство статического момента сечения.

18. Что такое осевой, полярный и центробежный моменты инерции?
19. Какая связь существует между осевыми и полярным моментами инерции сечения?
20. Приведите формулы моментов инерции простейших сечений относительно центральных осей.
21. Относительно какой оси осевой момент инерции двутавра, швеллера наибольший?
22. Для каких сечений центробежный момент инерции равен нулю?
23. Приведите формулы моментов инерции при параллельном переносе осей. Осевой момент инерции относительно какой оси имеет меньшее значение: проходящий через центр тяжести или ей параллельной?
24. Какие оси называются главными, а какие – главными центральными?
25. Что называется фермой?
26. Классифицируйте фермы по очертанию поясов и по типу решетки.
27. По какой формуле производится анализ изменяемости плоской фермы?
28. В чем заключается метод вырезания узлов и метод сечений?

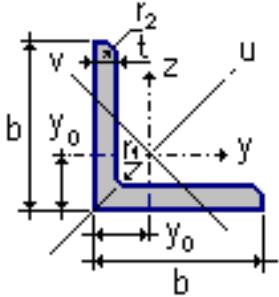
Центры тяжести некоторых однородных тел

Плоская фигура		Площадь	Координаты центра тяжести
Круг		$A = \pi R^2$	Центр тяжести находится в центре круга
Круговой сектор		$A = \alpha R^2$	$z_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2 b}{3A}$
Полукруг		$A = \frac{\pi R^2}{2}$	$z_c = \frac{2R}{3\pi}$
Круговой сегмент		$A = \frac{1}{2} R^2 \times$ $\times (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$z_c = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} =$ $= \frac{b^3}{12A}$
Прямоуголь- -ник		$A = bh$	Центр тяжести прямоугольника лежит в точке пересечения его диагоналей
Треугольник		$A = \frac{1}{2} bh$	Центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан $z_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_c = \frac{1}{3}h$, где h – высота треугольника, x_1, x_2, x_3 – координаты вершин

Моменты инерции плоских фигур

	J_x	J_y	J_z
	$\frac{\pi D^4}{32}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}$
	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$
	$\frac{1}{12}(hb^3 + bh^3)$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}hb^3$
	-	$\frac{hb^3}{36}$	-

Уголок равнополочный по ГОСТ 8509-93



	b	t	r_1	r_2	A	$J_y = J_z$	W_y	i_y	J_{yz}	y_0	P
	мм	мм	мм	мм	см ²	см ⁴	см ³	мм	см ⁴	мм	кг/м
L20x3	20,0	3,0	3,5	1,2	1,13	0,4	0,28	5,9	0,23	6,0	0,89
L20x4	20,0	4,0	3,5	1,2	1,46	0,5	0,37	5,8	0,28	6,4	1,15
L25x3	25,0	3,0	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	7,5	0,47	7,3	1,12
L25x4	25,0	4,0	3,5	1,2	1,86	1,03	0,59	7,4	0,59	7,6	1,46
L25x5	25,0	5,0	3,5	1,2	2,27	1,22	0,71	7,3	0,69	8,0	1,78
L28x3	28,0	3,0	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	8,5	0,68	8,0	1,27
L30x3	30,0	3,0	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	9,1	0,85	8,5	1,36
L30x4	30,0	4,0	4,0	1,3	2,27	1,84	0,87	8,0	1,08	8,9	1,78

Продолжение прил. 2

L30x5	30,0	5,0	4,0	1,3	2,78	2,2	1,06	8,9	1,27	9,3	2,18
L32x3	32,0	3,0	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	9,7	1,03	8,9	1,46
L32x4	32,0	4,0	4,5	1,5	2,43	2,26	1,0	9,6	1,32	9,4	1,91
L35x3	35,0	3,0	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	10,7	1,37	9,7	1,6
L35x4	35,0	4,0	4,5	1,5	2,17	3,01	1,21	10,6	1,75	10,1	2,1
L35x5	35,0	5,0	4,5	1,5	3,28	3,61	1,47	10,5	2,1	10,5	2,58
L40x3	40,0	3,0	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	12,3	2,08	10,9	1,85
L40x4	40,0	4,0	5,0	1,7	3,08	4,58	1,6	12,2	2,68	11,3	2,42
L40x5	40,0	5,0	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	12,1	3,22	11,7	2,98
L40x6	40,0	6,0	5,0	1,7	4,48	6,41	2,3	12,0	3,72	12,1	3,52
L45x3	45,0	3,0	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	13,9	3,0	12,1	2,08
L45x4	45,0	4,0	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	13,8	3,89	12,6	2,73
L45x5	45,0	5,0	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	13,7	4,71	13,0	3,37
L45x6	45,0	6,0	5,0	1,7	5,08	9,35	2,95	13,6	5,45	13,4	3,99
L50x3	50,0	3,0	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	15,5	4,16	13,3	2,32
L50x4	50,0	4,0	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	15,4	5,42	13,8	3,05
L50x5	50,0	5,0	5,5	1,8	4,8	11,2	3,13	15,3	6,57	14,2	3,77
L50x6	50,0	6,0	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	15,2	7,65	14,6	4,47
L50x7	50,0	7,0	5,5	1,8	6,56	14,84	4,23	15,0	8,63	15,0	5,15
L50x8	50,0	8,0	5,5	1,8	7,41	16,51	4,76	14,9	9,52	15,3	5,82
L56x4	56,0	4,0	6,0	2,0	4,38	13,1	3,21	17,3	7,69	15,2	3,44
L56x5	56,0	5,0	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	17,2	9,41	15,7	4,25
L60x4	60,0	4,0	7,0	2,3	4,72	16,21	3,7	18,5	9,48	16,2	3,71

Продолжение прил. 2

L60x5	60,0	5,0	7,0	2,3	5,83	19,79	4,56	18,4	11,61	16,6	4,58
L60x6	60,0	6,0	7,0	2,3	6,92	23,21	5,4	18,3	13,6	17,0	5,43
L60x8	60,0	8,0	7,0	2,3	9,04	29,55	7,0	18,1	17,22	17,8	7,1
L60x10	60,0	10,0	7,0	2,3	11,08	35,32	8,52	17,9	20,32	18,5	8,7
L63x4	63,0	4,0	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	19,5	11,0	16,9	3,9
L63x5	63,0	5,0	7,0	2,3	6,13	23,1	5,05	19,4	13,7	17,4	4,81
L63x6	63,0	6,0	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	19,3	15,9	17,8	5,72
L65x6	65,0	6,0	7,0	2,3	7,52	29,85	6,39	19,9	17,53	18,3	5,91
L65x8	65,0	8,0	7,0	2,3	9,84	38,13	8,3	19,7	22,29	19,0	7,73
L70x4	70,0	4,5	8,0	2,7	6,2	29,04	5,67	21,6	17,0	18,8	4,87
L70x5	70,0	5,0	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	21,6	18,7	19,0	5,38
L70x6	70,0	6,0	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	21,5	22,1	19,4	6,39
L70x7	70,0	7,0	8,0	2,7	9,42	42,98	8,57	21,4	25,2	19,9	7,39
L70x8	70,0	8,0	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	21,2	28,2	20,2	8,37
L70x10	70,0	10,0	8,0	2,7	13,11	57,9	11,82	21,0	33,6	21,0	10,29
L75x5	75,0	5,0	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	23,1	23,1	20,2	5,8
L75x6	75,0	6,0	9,0	3,0	8,78	46,57	8,57	23,0	27,3	20,6	6,89
L75x7	75,0	7,0	9,0	3,0	10,15	53,34	9,89	22,9	31,2	21,0	7,96
L75x8	75,0	8,0	9,0	3,0	11,5	59,84	11,18	22,8	35,0	21,5	9,02
L75x9	75,0	9,0	9,0	3,0	12,83	66,1	12,43	22,7	38,6	21,8	10,07
L80x5	80,0	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	24,7	30,9	21,7	6,78
L80x6	80,0	6,0	9,0	3,0	9,38	56,97	9,8	24,7	33,4	21,9	7,36
L80x7	80,0	7,0	9,0	3,0	10,85	65,31	11,32	24,5	38,3	22,3	8,51

Продолжение прил. 2

L80x8	80,0	8,0	9,0	3,0	12,3	73,36	12,8	24,4	43,0	22,7	9,65
L80x10	80,0	10,0	9,0	3,0	15,14	83,58	15,67	24,2	56,7	23,5	11,88
L80x12	80,0	12,0	9,0	3,0	17,9	102,74	18,42	24,0	59,5	24,2	14,05
L90x6	90,0	6,0	10,0	3,3	10,61	82,1	12,49	27,8	48,1	24,3	8,33
L90x7	90,0	7,0	10,0	3,3	12,28	94,3	14,45	27,7	55,4	24,7	9,64
L90x8	90,0	8,0	10,0	3,3	13,93	106,11	16,36	27,6	62,3	25,1	10,93
L90x9	90,0	9,0	10,0	3,3	15,6	118,0	18,29	27,5	68,0	25,5	12,2
L90x10	90,0	10,0	10,0	3,3	17,17	128,6	20,07	27,4	75,3	25,9	13,48
L90x12	90,0	12,0	10,0	3,3	20,33	149,67	23,85	27,1	86,2	26,7	15,96
L100x6.5	100,0	6,5	12,0	4,0	12,82	122,1	16,69	30,9	71,4	26,8	10,06
L100x7	100,0	7,0	12,0	4,0	13,75	130,59	17,9	30,8	76,4	27,1	10,79
L100x8	100,0	8,0	12,0	4,0	15,6	147,19	20,3	30,7	86,3	27,5	12,25
L100x10	100,0	10,0	12,0	4,0	19,24	178,95	24,97	30,5	110,0	28,3	15,1
L100x12	100,0	12,0	12,0	4,0	22,8	208,9	29,47	30,3	122,0	29,1	17,9
L100x14	100,0	14,0	12,0	4,0	26,28	237,15	33,83	30,0	138,0	29,9	20,63
L100x15	100,0	15,0	12,0	4,0	27,99	250,68	35,95	29,9	145,0	30,3	21,97
L100x16	100,0	16,0	12,0	4,0	29,68	263,82	38,04	29,8	152,0	30,6	23,3
L110x7	110,0	7,0	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	34,0	106,0	29,6	11,89
L110x8	110,0	8,0	12,0	4,0	17,2	198,17	24,77	33,9	116,0	30,0	13,5
L120x8	120,0	8,0	12,0	4,0	18,8	259,75	29,68	37,2	153,0	32,5	14,76
L120x10	120,0	10,0	12,0	4,0	23,24	317,16	36,59	36,9	187,0	33,3	18,24
L120x12	120,0	12,0	12,0	4,0	27,6	371,8	43,3	36,7	218,0	34,1	21,67
L120x15	120,0	15,0	12,0	4,0	33,99	448,9	52,96	36,3	262,0	35,3	26,68

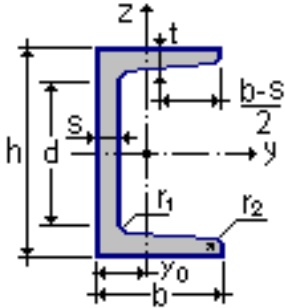
Продолжение прил. 2

L125x8	125,0	8,0	14,0	4,6	19,69	294,36	32,2	38,7	172,0	33,6	15,46
L125x9	125,0	9,0	14,0	4,6	22,0	327,48	36,0	38,6	192,0	34,0	17,3
L125x10	125,0	10,0	14,0	4,6	24,33	359,82	39,74	38,5	211,0	34,5	19,1
L125x12	125,0	12,0	14,0	4,6	28,89	422,32	47,06	38,2	248,0	35,3	22,68
L125x14	125,0	14,0	14,0	4,6	33,37	481,76	54,17	38,0	282,0	36,1	26,2
L125x16	125,0	16,0	14,0	4,6	37,77	538,56	61,09	37,8	315,0	36,8	29,65
L140x9	140,0	9,0	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	43,4	274,0	37,8	19,41
L140x10	140,0	10,0	14,0	4,6	27,33	512,29	50,32	43,3	301,0	38,2	21,45
L140x12	140,0	12,0	14,0	4,6	32,49	602,49	59,66	43,1	354,0	39,0	25,5
L150x10	150,0	10,0	14,0	4,6	29,33	634,76	58,07	46,5	374,0	40,7	23,02
L150x12	150,0	12,0	14,0	4,6	34,89	747,48	68,9	46,3	440,0	41,5	27,39
L150x15	150,0	15,0	14,0	4,6	43,08	908,38	84,66	45,9	534,0	42,7	33,82
L150x18	150,0	18,0	14,0	4,6	51,09	1060,08	99,86	45,6	621,0	43,8	40,11
L160x10	160,0	10,0	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	49,6	455,0	43,0	24,67
L160x11	160,0	11,0	16,0	5,3	34,42	844,21	72,44	49,5	496,0	43,5	27,02
L160x12	160,0	12,0	16,0	5,3	37,39	912,89	78,62	49,4	537,0	43,9	28,35
L160x14	160,0	14,0	16,0	5,3	43,57	1046,47	90,77	49,2	615,0	44,7	33,97
L160x16	160,0	16,0	16,0	5,3	49,07	1175,19	102,64	48,9	690,0	45,5	38,52
L160x18	160,0	18,0	16,0	5,3	54,79	1290,24	114,24	48,7	771,0	46,3	43,01
L160x20	160,0	20,0	16,0	5,3	60,4	1418,85	125,6	48,5	830,0	47,0	47,44
L180x11	180,0	11,0	16,0	5,3	38,8	1216,44	92,47	56,0	716,0	48,5	30,47
L180x12	180,0	12,0	16,0	5,3	42,19	1316,62	100,41	55,9	776,0	48,9	33,12
L180x15	180,0	15,0	16,0	5,3	52,18	1607,36	123,74	55,5	948,0	50,1	40,96

Продолжение прил. 2

L180x18	180,0	18,0	16,0	5,3	61,99	1884,07	146,36	55,1	1108,0	51,3	48,66
L180x20	180,0	20,0	16,0	5,3	68,43	2061,11	161,07	54,9	1210,0	52,0	53,72
L200x12	200,0	12,0	18,0	6,0	47,1	1822,78	124,61	62,2	1073,0	53,7	36,97
L200x13	200,0	13,0	18,0	6,0	50,85	1960,77	134,44	62,1	1156,0	54,2	39,92
L200x14	200,0	14,0	18,0	6,0	54,6	2097,0	144,17	62,0	1236,0	54,6	42,8
L200x16	200,0	16,0	18,0	6,0	61,98	2362,57	163,37	61,7	1393,0	55,4	48,65
L200x18	200,0	18,0	18,0	6,0	69,3	2620,64	182,22	61,5	1544,0	56,2	54,4
L200x20	200,0	20,0	18,0	6,0	76,54	2871,47	200,73	61,2	1689,0	57,0	60,08
L200x24	200,0	24,0	18,0	6,0	90,78	3350,66	236,77	60,8	1963,0	58,5	71,26
L200x25	200,0	25,0	18,0	6,0	94,29	3466,21	245,59	60,6	2028,0	58,9	74,02
L200x30	200,0	30,0	18,0	6,0	111,54	4019,6	288,57	60,0	2332,0	60,7	87,56
L220x14	220,0	14,0	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	68,3	1655,0	59,1	47,4
L220x16	220,0	16,0	21,0	7,0	68,58	3175,44	198,71	68,0	1869,0	60,2	53,83
L250x16	250,0	16,0	24,0	8,0	78,4	4717,1	258,43	77,6	2775,0	67,5	61,55
L250x18	250,0	18,0	24,0	8,0	87,72	5247,239	288,82	77,3	3089,0	68,3	68,86
L250x20	250,0	20,0	24,0	8,0	96,96	5764,87	318,76	77,1	3395,0	69,1	76,11
L250x22	250,0	22,0	24,0	8,0	106,12	6270,319	348,26	70,9	3691,0	70,0	83,31
L250x25	250,0	25,0	24,0	8,0	119,71	7006,389	391,72	76,5	4119,0	71,1	93,97
L250x28	250,0	28,0	24,0	8,0	133,12	7716,858	434,25	76,1	4527,0	72,3	104,5
L250x30	250,0	30,0	24,0	8,0	141,96	8176,519	462,11	75,9	4788,0	73,1	111,44
L250x35	250,0	35,0	24,0	8,0	163,71	9281,049	530,11	75,3	5401,68	74,9	128,51

Швеллер с уклоном полок по ГОСТ 8240-89

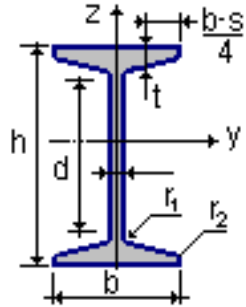


	h	b	s	t	r_1	r_2	A	P	J_y	W_y	i_y	s_y	J_z	W_z	i_z	y_0
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	mm	cm ³	cm ⁴	cm ³	mm	mm
5	50,0	32,0	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	19,2	5,59	5,61	2,75	9,5	11,6
6.5	65,0	36,0	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,9	48,6	15,0	25,4	9,0	8,7	3,68	10,8	12,4
8	80,0	40,0	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	31,6	23,3	12,8	4,75	11,9	13,1
10	100,0	46,0	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	8,59	174,0	34,8	39,9	20,4	20,4	6,46	13,7	14,4
12	120,0	52,0	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	10,4	304,0	50,6	47,8	29,6	31,2	8,52	15,3	15,4
14	140,0	58,0	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	12,3	491,0	70,2	56,0	40,8	45,4	11,0	17,0	16,7
16	160,0	64,0	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	14,2	747,0	93,4	64,2	54,1	63,3	13,8	18,7	18,0
16a	160,0	68,0	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	15,3	823,0	103,0	64,9	59,4	78,8	16,4	20,1	20,0

Продолжение прил. 2

18	180,0	70,0	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	16,3	1090,0	121,0	72,4	69,8	86,0	17,0	20,4	19,4
18a	180,0	74,0	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	17,4	1190,0	132,0	73,2	76,1	105,0	20,0	21,8	21,3
20	200,0	76,0	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	18,4	1520,0	152,0	80,7	87,8	113,0	20,5	22,0	20,7
22	220,0	82,0	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	21,0	2110,0	192,0	88,9	110,0	151,0	25,1	23,7	22,1
24	240,0	90,0	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	24,0	2900,0	242,0	97,3	139,0	208,0	31,6	26,0	24,2
27	270,0	95,0	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	27,7	4160,0	308,0	109,0	178,0	262,0	37,3	27,3	24,7
30	300,0	100,0	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	31,8	5810,0	387,0	120,0	224,0	327,0	43,6	28,4	25,2
33	330,0	105,0	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	36,5	7979,999	484,0	131,0	281,0	410,0	51,8	29,7	25,9
36	360,0	110,0	7,5	12,6	14,0	6,0	53,4	41,9	10819,999	601,0	142,0	350,0	513,0	61,7	31,0	26,8
40	400,0	115,0	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	48,3	15219,998	761,0	157,0	444,0	642,0	73,4	32,3	27,5

Двутавр с уклоном полок по ГОСТ 8239-89



	h	b	s	t	r_1	r_2	A	P	J_y	W_y	i_y	s_y	J_z	W_z	i_z
	MM	MM	MM	MM	MM	MM	CM ²	КГ/М	CM ⁴	CM ³	MM	CM ³	CM ⁴	CM ³	MM
10	100,0	55,0	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198,0	39,7	40,6	23,0	17,9	6,49	12,2
12	120,0	64,0	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	350,0	58,4	48,8	33,7	27,9	8,72	13,8
14	140,0	73,0	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	572,0	81,7	57,3	46,8	41,9	11,5	15,5
16	160,0	81,0	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	873,0	109,0	65,7	62,3	58,6	14,5	17,0
18	180,0	90,0	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	1290,0	143,0	74,2	81,4	82,6	18,4	18,8
20	200,0	100,0	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	1840,0	184,0	82,8	104,0	115,0	23,1	20,7
22	220,0	110,0	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,0	2550,0	232,0	91,3	131,0	157,0	28,6	22,7
24	240,0	115,0	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	3460,0	289,0	99,7	163,0	198,0	34,5	23,7

Продолжение прил. 2

27	270,0	125,0	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,5	5010,0	371,0	112,0	210,0	260,0	41,5	25,4
30	300,0	135,0	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,5	7080,0	472,0	123,0	268,0	337,0	49,9	26,9
33	330,0	140,0	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,2	9839,999	597,0	135,0	339,0	419,0	59,9	27,9
36	360,0	145,0	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,6	13379,999	743,0	147,0	423,0	516,0	71,1	28,9
40	400,0	155,0	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,0	19061,998	953,0	162,0	545,0	667,0	86,1	30,3
45	450,0	160,0	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,5	27695,998	1231,0	181,0	708,0	808,0	101,0	30,9
50	500,0	170,0	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,5	39726,996	1589,0	199,0	919,0	1043,0	123,0	32,3
55	550,0	180,0	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,6	55961,992	2035,0	218,0	1181,0	1356,0	151,0	33,9
60	600,0	190,0	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76805,992	2560,0	236,0	1491,0	1725,0	182,0	35,4

Учебное издание

Дегтярь Андрей Николаевич
Юрьев Александр Гаврилович
Смоляго Нина Алексеевна и др.

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
С ОСНОВАМИ СТАТИКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ
И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

Учебное пособие

Подписано в печать 19.01.16 Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,0

Тираж экз.

Заказ

Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46