ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Ковалев Л.А.

Лекция 1.

Аналитическая механика – это раздел теоретической механики, в котором изучение равновесия и движения механических систем основано на дифференциальных и интегральных принципах механики. В отличие от механики Ньютона в аналитической механике используются энергетические характеристики движения. Подчинение этих характеристик принципам механики позволяет получить наиболее общие формы как условий равновесия, так и дифференциальных уравнений движения механических систем.

Связи и их классификация

Механическая система, точки которой могут занимать любое положение в пространстве и иметь любые скорости, называется **свободной**. Если на координаты и скорости точек системы наложены ограничения, то система называется **несвободной**, а ограничения называются **связями**.

Связи это любого вида ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие на систему действуют заданные силы. Механические связи реализуются в виде различных устройств или тел (стержни, нити, шарниры и т.д.). Аналитически связь описывается уравнениями вида

$$f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,N,$$

где N число точек системы.

Ограничивая движение механической системы, связи действуют на ее точки посредством сил, которые называются **реакциями связей**. При изучении равновесия и движения механических систем методами аналитической механики применяется принцип освобождаемости от связей (аксиома о связях). Этот принцип состоит в том, что любую систему можно рассматривать как свободную, приложив к ее точкам реакции, соответствующие отброшенным связям.

Для механической системы, состоящей из N точек, m уравнений связей представятся системой уравнений

$$f_j(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0,$$

$$k = 1,2,\ldots,N, \qquad j = 1,2,\ldots,m$$

Связи, не изменяющиеся со временем, называются **стационарными,** а изменяющиеся со временем - **нестационарными.** Уравнение связи стационарной связи имеет вид $f_j(x_k, y_k, z_k) = 0$. Уравнение связи нестационарной связи имеет вид $f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0$.

Связи, налагающие ограничения на положения (координаты) точек системы, называются **геометрическими,** а налагающие ограничения еще и на скорости (первые производные от координат по времени) точек системы - **кинематическими** или **дифференциальными**.

Уравнение геометрической связи для системы имеет вид $f\left(x_k, y_k, z_k, t\right)=0$.

Если, дифференциальную связь можно представить как геометрическую, т. е. устанавливаемую этой связью зависимость между скоростями свести к зависимости между координатами, то такая связь называется **интегрируемой,** а в противном случае **- неинтегрируемой**.

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называют **голономными** связями, а неинтегрируемые дифференциальные связи - **неголономными.**

По виду связей механические системы тоже разделяются на **голономные** и **неголономные**.

Наконец, различают связи **удерживающие** или **двусторонние** (налагаемые ими ограничения сохраняются при любом положении системы) и **неудерживоющие** или **односторонние,** которые этим свойством не обладают (от таких связей, как говорят, система может «освобождаться»).

Связь называется **удерживающей** (двухсторонней), если она описывается уравнением (равенством). Голономную стационарную удерживающую связь, наложенную на материальную точку, можно представить в виде двух бесконечно близких одинаковых поверхностей, между которыми только и может находиться точка. **Неудерживающая** (односторонняя) связь описывается неравенством.

Например, если математический маятник представляет собой тонкий стержень длиной l, вращающийся вокруг неподвижной оси и к свободному концу которого прикреплен груз (материальная точка), то связь для груза будет удерживающая $\left(x^2+y^2+z^2-l^2=0\right)$. Если же груз прикреплен к свободному концу нерастяжимой нити длиной l. то связь будет неудерживающая, поскольку груз может находиться как на поверхности сферы радиусом l, так и внутри нее $\left(x^2+y^2+z^2-l^2 \leq 0\right)$.

Обобщенные координаты

Пусть механическая система состоит из N материальных точек. Положение такой системы в пространстве определяется $3N$ декартовыми координатами. Если на систему наложено m голономных удерживающих связей, то независимыми между собой будут не $3N$. а $n=3N-m$ координат. Выбрав n декартовых координат системы в качестве независимых, остальные m координат можно найти при помощи уравнений связи. Выбор декартовых координат в качестве независимых для ряда задач механики оказывается нерациональным, так как приводит к громоздким выкладкам. Поэтому целесообразно использовать и другие независимые координаты.

Независимые между собой координаты, которые однозначно определяют положение механической системы в пространстве, в любой момент времени, называются **обобщенными координатами**. Их обозначают $q_i(t)$, где $i = 1,2,...,n$.

В качестве обобщенных координат можно использовать отрезки прямых, дуги, углы, а также любые другие параметры, удовлетворяющие определению обобщенных координат. Для одной и той же механической системы может быть несколько вариантов выбора обобщенных координат.

Независимые декартовы координаты ($n = 3N - m$) могут быть выражены через обобщенные координаты. Остальные декартовы координаты выражаются через те же обобщенные координаты с помощью m уравнений связей. Следовательно, и радиус-векторы всех точек системы выражаются через обобщенные координаты:

$$\overline{r_k} = \overline{r_k}(q_1, q_2, ..., q_n, t).$$

Например, положение кривошипно-ползунного механизма, показанного на рис. 1, определяется двумя его точками A и B. Из четырех декартовых координат $(x_A, y_A, x_B, y_B,)$ независимой будет только одна, так как число m голономных удерживающих связей равно трем: $OA = l_1 = const$, $AB = l_2 = const$ $y_B = 0$.

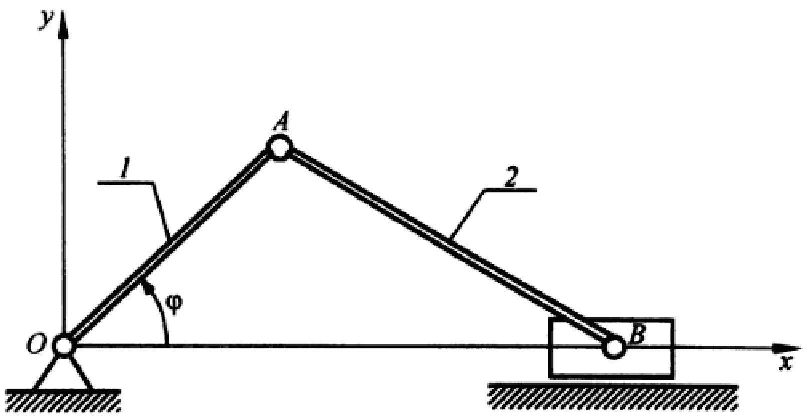

Рис. 1

Если за независимую декартову координату принять x_A, а за обобщенную — угол φ поворота кривошипа 1, то $x_A = l_1 \cos\varphi$. Другие декартовы координаты точек системы определим при помощи уравнений связей. Из уравнения $x_A^2 + y_A^2 - l_1^2 = 0$ находим $y_A = l_1 \sin\varphi$. Ордината $y_B = 0$. Из условия $(x_B - x_A)^2 + y_A^2 - l_2^2 = 0$ получаем $x_B^2 = 2l_1\, x_B \cos\varphi - l_2^2 - l_1^2$. Если $l_1 = l_2$, то $x_B = 2l_1 \cos\varphi$.

Таким образом, все декартовы координаты точек системы выражены через угол φ.

Возможные перемещения. Число степеней свободы механической системы

Перемещение материальной точки зависит от ее массы, приложенных к точке сил, связей и начальных условий. Определение действительного перемещения сводится к решению задачи динамики точки. В аналитической механике в качестве одного из основных понятий используется понятие о возможном перемещении точки.

Возможным называется любое допускаемое связями перемещение материальной точки из положения, занимаемого ею в данный момент времени, в бесконечно близкое положение, которое она может занимать в тот же момент времени. Возможные перемещения не связаны ни с движением точки, ни с изменением наложенных на нее связей. Они представляют собой воображаемые перемещения, которые можно представить совокупностью бесконечно малых векторов $\delta\bar{r}$, зависящих только от структуры связей, зафиксированных в рассматриваемый момент времени. Вектор $\delta\bar{r}$ называют **вариацией радиус-вектора** точки, а проекции $\delta\bar{r}$ на оси декартовой системы координат — **вариациями координат**. Их обозначают δx, δy, δz. Возможные перемещения точки должны удовлетворять дифференциальным соотношениям, вытекающим из уравнений связей при условии, что время является фиксированным. Получим эти соотношения и установим различие между бесконечно малым действительным $d\bar{r}$ и возможными $\delta\bar{r}$ перемещениями точки.

Пусть на материальную точку наложена голономная удерживающая связь, уравнение которой

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{1}$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точки в момент времени t. Через бесконечно малый промежуток времени dt координаты $(x+dx),(y+dy),(z+dz)$ точки также должны удовлетворять уравнению связи, т. е.

$$f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) = 0. \tag{2}$$

Раскладывая функцию (2) в ряд Тейлора с точностью до слагаемых выше первого порядка малости и учитывая, что связь имеет вид (1), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0. \tag{3}$$

Выражение (3) представляет собой условие, которому должны удовлетворять проекции вектора $d\bar{r}$ элементарного действительного перемещения точки.

В отличие от элементарного (бесконечно малого) действительного перемещения точки $d\bar{r}$, которое совершает точка за время dt под действием приложенных сил при заданных начальных условиях и наложенных связях, возможное перемещение $\delta\bar{r}$ определяется только связями в данный момент.

Если связью для точки является, например, движущаяся поверхность, уравнение которой $f(x, y, z, t) = 0$, то действительное перемещение точки $d\bar{r}$ за время dt является в общем случае векторной суммой перемещений по поверхности и вместе с поверхностью. Все возможные перемещения точки $\delta\bar{r}$ в данный момент времени t расположатся на поверхности в положении, которое она занимает в рассматриваемый момент времени. Действительное перемещение при заданных начальных условиях и силах, которое точка может совершить от момента времени t до момента $t + dt$, только одно. Возможных перемещений у точки в момент времени t бесконечно много. Все они допускаются связью (поверхностью) и как отрезки бесконечно малой длины расположатся в касательной плоскости к поверхности в точке, в которой находится рассматриваемая точка в данный момент времени.

Возможное перемещение $\delta\bar{r}$, как и действительное $d\bar{r}$, является вектором и потому всегда изображается направленным прямолинейным отрезком. Очевидно, что элементарное действительное перемещение точки принадлежит к числу возможных, если связь стационарна, т. е. действительное перемещение не содержит перемещения вместе со связью.

Возможное перемещение точки $\delta\bar{r}$ считают изохронной вариацией радиуса-вектора, т. е. его полным дифференциалом, но при фиксированном времени, когда изменяются (варьируются) только координаты точки. Соответственно δx, δy, δz, — изохронные вариации координат точки, допускаемые связями. Действительное перемещение $d\bar{r}$ является полным дифференциалом радиуса-вектора, который определяется по изменению координат точки в зависимости от изменения времени; dx, dy, dz — полные дифференциалы координат точки при изменении независимого переменного t на величину dt.

Возможным перемещением системы называют любую совокупность возможных перемещений точек системы. В общем случае система может иметь несколько и даже бесконечно много возможных перемещений. Вследствие уравнений связей, наложенных на систему, не все возможные перемещения являются независимыми. **Число независимых возможных перемещений называют числом степеней свободы системы.**

Свободная точка имеет три степени свободы. В этом случае возможные перемещения (вариации) δx, δy, δz (или выраженные через вариации каких-либо других координат) являются независимыми. Если точка движется по поверхности $f(x, y, z, t) = 0$, то δx, δy, δz связаны соотношением (3). Независимых вариаций координат, а следовательно, и степеней свободы будет две. Время при этом не варьируется, оно фиксировано.

Лекция 2.

Элементарная работа силы на возможном перемещении. Идеальные связи.

Элементарная работа силы на возможном перемещении ее точки приложения определяется так:

$$\delta A = \overline{F} \cdot \delta \overline{r} = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z .$$

Для механической системы, состоящей из N точек, к которым приложены силы, элементарная работа этих сил на каком-либо возможном перемещении системы соответственно выразится так:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \delta \overline{r_k} = 0 .$$

Элементарная работа сил при этом зависит от выбора возможного перемещения системы.

Обозначим силы реакций связей для точек системы $\overline{R_k}$.

Связи системы называются идеальными, если для любого возможного перемещения системы выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{R_k} \cdot \delta \overline{r_k} = 0 \qquad (4)$$

Условие (4) является определением идеальных связей.

Приведем примеры идеальных связей.

1. **Абсолютно твердое тело.**

В абсолютно твердом теле точки связаны идеальными связями. Силами реакций связей в этом случае являются внутренние силы, сумма элементарных работ которых на любых возможных перемещениях точек тела равна нулю.

2. **Абсолютно гладкая поверхность, или абсолютно гладкая линия**, является идеальной связью для точки. Возможные перемещения точки с такими связями направлены по касательным к поверхности или линии. Силы реакции в этих случаях направлены по нормалям к ним, т. е. перпендикулярны перемещениям и элементарные работы сил реакции равны нулю.

3. **Гибкая нерастяжимая нить.**

Реакция нити – сила ее натяжения – ортогональна возможному перемещению точки ее приложения. Элементарная работа реакции равна нулю.

4. **Цилиндрические и сферические шарниры,** если поверхности соприкасающихся тел считаются идеально гладкими.

Если твердое тело при помощи шарнира прикреплено к неподвижной опоре, то реакция приложена к неподвижной точке. Возможное перемещение такой точки равно нулю и возможная работа силы реакции также равна нулю.

Если два твердых тела при помощи шарнира соединены между собой, то возможная работа сил реакции равна нулю, так как сумма сил реакции равна нулю (силы действия и противодействия).

5. **Закрепленные точки системы** по отдельности являются связями идеальными, так как их возможные перемещения равны нулю.

6. **Твердая шероховатая поверхность** для катков, катящихся по ней без скольжения. Контакт катка с поверхностью происходит по линии. Силы реакции распределены вдоль линии контакта. Возможная работа сил реакции равна нулю, так как они приложены к неподвижным в каждый момент времени точкам.

Обобщенные силы

В аналитической механике наряду с понятием о силе как векторной величине, характеризующей воздействие на данное тело со стороны других материальных тел, используют понятие об обобщенной силе. Для определения обобщенной силы рассмотрим возможную работу сил, приложенных к точкам системы,

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A\left(\overline{F_k}\right) = \sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \delta \overline{r_k} .$$

Если механическая система при наложенных на нее голономных удерживающих связях имеет n степеней свободы, то положение этой системы определяется $q_1, q_2, ..., q_n, t$ обобщенными координатами и $\overline{r_k} = \overline{r_k}(q_1, q_2, ..., q_n, t)$. Возможное перемещение $k-$й точки

$$\delta \overline{r_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \delta q_i .$$

Подставляя $\delta \overline{r_k}$ в формулу для возможной работы сил, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A\left(\overline{F_k}\right) = \sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \right) \delta q_i .$$

Скалярную величину

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \delta q_i = Q_i \tag{5}$$

называют обобщенной силой, соответствующей $i-$й обобщенной координате.

Таким образом, **обобщенной силой, соответствующей $i-$й обобщенной координате, называется величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил, действующих на механическую систему**.

В общем случае обобщенная сила является функцией обобщенных координат, скоростей точек системы и времени. Из определения следует, что обобщенная сила — скалярная величина, которая зависит от выбранных для данной механической системы обобщенных координат. Это значит, что при изменении набора обобщенных координат, определяющих положение данной системы, изменятся и обобщенные силы.

Пример. Для диска радиусом r и массой m, который катится без скольжения по наклонной плоскости (рис. 2), за обобщенные координаты можно принять либо s — координата центра масс диска, либо φ — угол поворота диска. Если пренебречь сопротивлением качению, то в первом случае обобщенной силой будет $Q_s = mg \sin\alpha$, а во втором — $Q_s = mgr \sin \alpha$. Обобщенная координата определяет и единицу измерения соответствующей обобщенной силы.

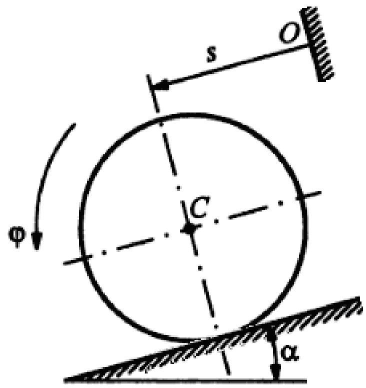

Рис. 2

Из выражения $\sum_{k=1}^{N} \delta A\left(\overline{F_k}\right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$ следует, что единица измерения обобщенной силы равна единице измерения работы, деленной на единицу измерения обобщенной координаты. Если в качестве обобщенной координаты q_i принять координату какой-либо точки, то единица измерения обобщенной силы Q_i будет ньютон, если же в качестве q_i будет принят угол поворота тела, то единицей измерения будет ньютон на метр.

Существуют различные способы вычисления обобщенных сил.

Способ 1. Согласно определению, обобщенная сила

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i}.$$

Принимая во внимание, что, $\overline{r_k} = x_k \bar{i} + y_k \bar{j} + z_k \bar{k}$ получаем

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right). \tag{6}$$

Этот способ определения обобщенных сил называют аналитическим.

Способ 2. Обобщенные силы для механических систем с $n > 1$ целесообразно вычислять последовательно, учитывая, что обобщенные координаты, а значит, и их вариации независимы между собой. Системе всегда можно сообщить такое возможное перемещение, при котором изменяется только одна обобщенная координата, а другие при этом не варьируются. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{N}\delta A\left(\overline{F_k}\right)=\left[\sum_{k=1}^{N}\delta A\left(\overline{F_k}\right)\right]_{q_i}=Q_i\delta q_i.$$

Откуда

$$Q_i=\frac{\left[\sum_{k=1}^{N}\delta A\left(\overline{F_k}\right)\right]_{q_i}}{\delta q_i}\delta q_i \tag{7}$$

Индекс q_i в (6) означает, что возможная работа сил, действующих на систему, определяется на перемещениях точек приложения этих сил, соответствующих вариации только одной $i-$й обобщенной координаты.

Пример. Найти обобщенные силы Q_s и Q_φ для системы, показанной на рис. 3. Масса груза 1 равна M, масса цилиндра 2 равна m, а его радиус r. Нить по блоку 3 и цилиндру 2 не скользит. Центр масс цилиндра движется вдоль вертикали.

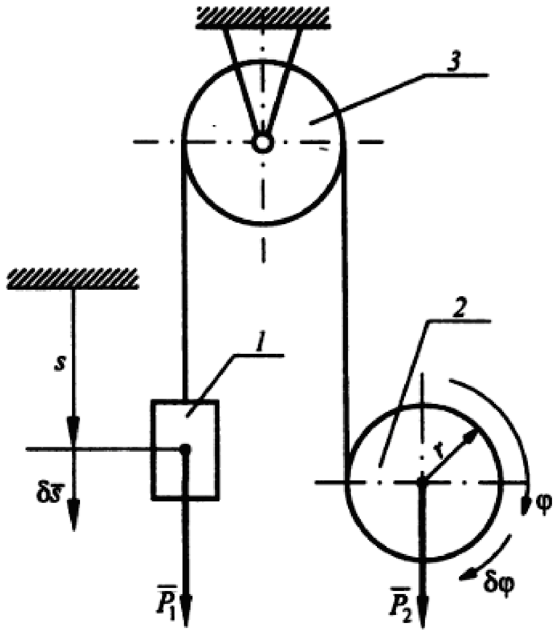

Рис. 3

Решение. Для определения обобщенной силы Q_s, зададим приращение δs координате груза 1, а для угла φ поворота цилиндра 2 будем считать $\delta\varphi=0$. При этом цилиндр будет иметь перемещение, равное перемещению груза. Следовательно,

$$\left[\sum_{k=1}^{N}\delta A\left(\overline{F_k}\right)\right]_s=(P_1-P_2)\delta s;\quad Q_s=\frac{\left[\sum_{k=1}^{N}\delta A\left(\overline{F_k}\right)\right]_s}{\delta s}=(M-m)g,$$

где $P_1=Mg$; $P_2=mg$.

Определяя Q_φ, будем полагать, что $\delta s=0$, а $\delta\varphi\neq 0$. Тогда

$$\left[\sum_{k=1}^{N}\delta A\left(\overline{F_k}\right)\right]_\varphi=\delta A\left(\overline{P_2}\right)=mgr\delta\varphi;\quad Q_\varphi=mgr.$$

Способ 3. Если силы, действующие на механическую систему, потенциальные, то для определения обобщенных сил можно использовать силовую функцию U или потенциальную энергию Π системы. Потенциальная сила

$$\overline{F_k} = \frac{\partial U}{\partial x_k}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y_k}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z_k}\bar{k}.$$

Подставляя проекции силы $\overline{F_k}$ в (6), получаем

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Так как $U = -\Pi + const$, то $Q_{q_i} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i}$.

Лекция 3.

Дифференциальные принципы аналитической механики

Принципы механики являются основой эффективных методов изучения равновесия и движения механических систем. Их принято разделять на вариационные и невариационные. Невариационные принципы устанавливают общие для всех движений систем свойства, которые имеют место как в определенные моменты, так и на конечных интервалах времени. К ним относятся аксиомы механики, принцип независимости действия сил, принцип Даламбера и т. п. Вариационные принципы устанавливают критерии, которые позволяют отличить истинное состояние системы от возможного. Вариационные принципы разделяют на дифференциальные и интегральные. Дифференциальные принципы устанавливают критерии истинного состояния системы для фиксированного момента времени, а интегральные — на конечном интервале времени.

Принцип возможных перемещений

Аналитические условия равновесия механических систем были сформулированы Ж. Лагранжем в 1788 г. В настоящее время эти условия называются принципом возможных перемещений, или принципом Лагранжа. Он формулируется следующим образом: **для равновесия механической системы, подчиненной идеальным, стационарным и удерживающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы, если скорости точек системы в рассматриваемый момент времени равны нулю**.

Данной формулировке соответствует условие равновесия системы

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \delta \overline{r_k} = 0 \tag{8}$$

или в декартовых координатах

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx} \cdot \delta x_k + F_{ky} \cdot \delta y_k + F_{kz} \cdot \delta z_k = 0 .$$

Положением равновесия называется такое положение механической системы, в котором она может находиться сколь угодно долго, если в начальный момент времени система была приведена в это положение с нулевыми скоростями $\left(\overline{v_k} = 0\right)$.

Докажем необходимость условия (8) для равновесия системы, т. е. докажем, **что если система находится в равновесии, то активные силы удовлетворяют условию** (8). Действительно, если механическая система находится в равновесии, то для каждой ее точки активная сила $\overline{F_k}$ и сила реакции связей $\overline{R_k}$ удовлетворяют условию равновесия статики для сил, приложенных к точке:

$$\overline{F_k} + \overline{R_k} = 0 , \quad k = 1,2,..,N . \tag{9}$$

Умножив каждое равенство (9) на возможное перемещение $\delta \overline{r_k}$ соответствующей $k-$й точке и просуммировав скалярные произведения, получим

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \delta \overline{r_k} + \sum_{k=1}^{N} \overline{R_k} \cdot \delta \overline{r_k} = 0 .$$

Если наложенные на систему связи идеальные, то $\sum_{k=1}^{N} \overline{R_k} \cdot \delta \overline{r_k} = 0$ и условие $\sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \delta \overline{r_k} = 0$ является необходимым условием равновесия системы.

Докажем достаточность условия (9) для равновесия системы, т. е. что если это условие выполняется для активных сил, действующих на точки системы, то система находится в равновесии при выполнении других условий принципа возможных перемещений.

Доказательство достаточности принципа Лагранжа проведем методом от противного. Предположим, что условие (9) выполнено, а система не находится в равновесии. Значит под действием активных сил и реакций связей система за малый промежуток времени совершит некоторое действительное перемещение. При стационарных связях это действительное перемещение совпадает с одним из возможных, поэтому

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\overline{F_k}+\overline{R_k}\right)\cdot\delta\overline{r_k}\neq 0.$$

Так как связи идеальные, то $\sum_{k=1}^{N}\overline{R_k}\cdot\delta\overline{r_k}=0$ и тогда $\sum_{k=1}^{N}\overline{F_k}\cdot\delta\overline{r_k}\neq 0$,

что противоречит принятому выше предположению. Таким образом, достаточность принципа возможных перемещений доказана.

Пример. Найти вертикальную силу $\overline{F}$, приложенную в точке A к линейке 2 эллипсографа (рис. 4), которая обеспечит равновесие системы при заданном угле φ $(0<\varphi<\pi/2)$. Сила $\overline{F_1}$ и момент M пары сил известны. Трением в шарнирах и направляющих, а также массой элементов системы пренебречь.

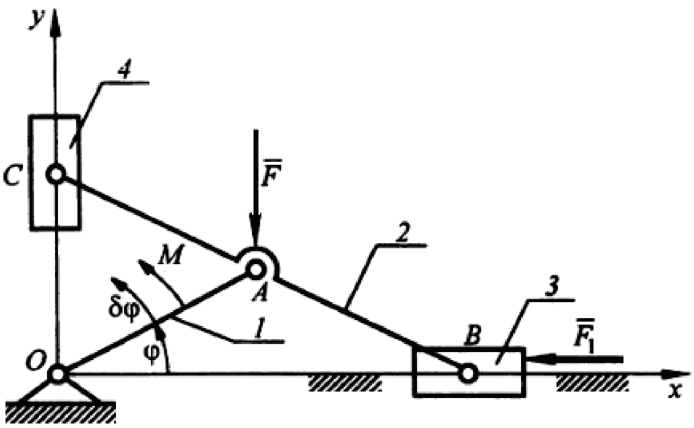

Рис. 4

Решение. Условие равновесия эллипсографа имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N}\delta A\left(\overline{F_k}\right)=\delta A(M)+\delta A\left(\overline{F_1}\right)+\delta A\left(\overline{F}\right)=0.$$

Дадим системе возможное перемещение, повернув кривошип 1 на угол $\delta\varphi$. Возможная работа пары сил с моментом M равна $M\delta\varphi$. Вычислим возможную работу сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F}$:

Так как $\quad F_{1x}=-F_1,\; x_B=2l\cos\varphi,\; \delta x_B=-2l\sin\varphi\cdot\delta\varphi,$

$$F_y=-F,\; y_A=l\sin\varphi,\; \delta y_A=l\cos\varphi\cdot\delta\varphi,$$

То $\quad \delta A\left(\overline{F_1}\right)=2F_1 l\sin\varphi\cdot\delta\varphi;\quad \delta A\left(\overline{F}\right)=-Fl\cos\varphi\cdot\delta\varphi.$

Подставляя выражения для возможных работ сил в (18.9), получаем

$$M\delta\varphi+2F_1 l\sin\varphi\cdot\delta\varphi-Fl\cos\varphi\cdot\delta\varphi=0.$$

Отсюда $\quad F=2F_1 tg\varphi+\dfrac{M}{l\cos\varphi}.$

Однако принцип возможных перемещений позволяет находить и реакции идеальных связей. Для этого, в соответствии с принципом освобождаемости, связь отбрасывают, заменяя ее соответствующей реакцией. Эту реакцию включают в число активных сил. При отбрасывании связи увеличивается число степеней свободы системы. Поэтому точке приложения реакции отброшенной связи можно задать возможное перемещение. К системам с неидеальными связями принцип возможных перемещений неприменим. Однако в некоторых случаях, например при движении точки по шероховатой поверхности, связь рассматривают как идеальную, дополняя ее силой трения скольжения.

Пример Г-образная рама состоит из двух стержней AC и CB, соединенных в точке C при помощи цилиндрического шарнира (рис. 5). Найти момент M_A заделки, если $AC = l_1$, $CD = l_2$, $DE = l_3$, момент M пары сил и сила $\overline{F}$ — заданы.

Решение. Заменим заделку шарнирно-неподвижной опорой, приложив при этом к стержню AC пару сил с моментом M_A. Дадим системе возможное перемещение,

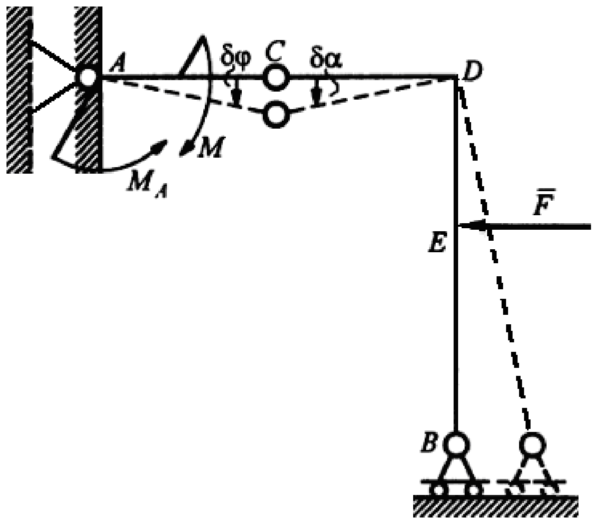

Рис. 5

повернув стержень AC на угол $\delta\varphi$, вокруг оси, проходящей через точку A. При этом стержень CB повернется вокруг мгновенной оси, проходящей через точку D на угол $\delta\alpha = {l_1}/{l_2}\,\delta\varphi$.

Сумма возможных работ приложенных к раме сил, включая момент заделки, равна

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A\left(\overline{F_k}\right) = \delta A\left(M_A\right) + \delta A\left(M\right) + \delta A\left(\overline{F}\right),$$

где $\delta A\left(M_A\right) = -M_A \delta\varphi$; $\delta A\left(M\right) = M\delta\varphi$; $\delta A\left(\overline{F}\right) = -F\delta s_E$; $\delta s_E = DE\delta\alpha = \dfrac{l_1 l_3}{l_2}\delta\varphi$,

Приравняв сумму возможных работ к нулю, получим

$$-M_A\delta\varphi + M\delta\varphi - F\frac{l_1 l_3}{l_2}\delta\varphi = 0,$$

Откуда $$M_A = M - F\frac{l_1 l_3}{l_2}.$$

Условия равновесия механической системы в обобщенных силах

Положим, что механическая система, состоящая из N точек, в силу наложенных на нее голономных удерживающих связей имеет n степеней свободы. Положение такой системы в пространстве определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, ..., q_n$, и радиус-вектор $k-$й точки есть функция обобщенных координат: $\overline{r_k} = \overline{r_k}(q_1, q_2, ..., q_n, t)$.

Возможное перемещение каждой точки системы $\delta\overline{r_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \delta q_i$.

Подставляя выражение для $\delta\overline{r_k}$ в условие (8) равновесия системы, получаем:

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0.$$

После изменения порядка суммирования это условие принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F_k} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0. \qquad (10)$$

Так как обобщенные координаты независимы, то их вариации $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n$ тоже независимы между собой. Поэтому условие (10) будет выполнено, если равны нулю обобщенные силы, соответствующие всем обобщенным координатам системы:

$$Q_i = 0, \quad i = 1, 2, .., n$$

Таким образом, условия равновесия механической системы можно сформулировать так: **для равновесия системы, подчиненной голономным удерживающим связям, необходимо и достаточно, чтобы обобщенные силы, соответствующие всем обобщенным координатам системы, были равны нулю**.

Если силы, приложенные к точкам механической системы, потенциальные, то

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

В этом случае условия равновесия имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \ \text{ или } \ \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, .., n. \qquad (11)$$

Выражения (11) являются необходимыми условиями существования экстремумов функций U и Π. Таким образом, при равновесии системы, находящейся под действием потенциальных сил, все частные производные от силовой функции и потенциальной энергии по обобщенным координатам равны нулю.

Лекция 4.

Принцип Даламбера-Лагранжа.
Общее уравнение динамики

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. В соответствии с принципом Даламбера, приложенные к каждой точке активные силы, реакции связей и силы инерции в любой момент времени образуют уравновешенную систему сходящихся сил. Эта система сил удовлетворяет условию равновесия

$$\overline{F_k} + \overline{R_k} + \overline{\Phi_k} = 0, \tag{12}$$

где $\overline{F_k}$ и $\overline{R_k}$ — равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к $k-$й точке; $\overline{\Phi_k} = -m_k \overline{a_k}$ - сила инерции, приложенная к $k-$й точке.

Умножим обе части уравнения (12) скалярно на возможное перемещение $\delta\overline{r_k}$ $k-$й точки и просуммируем полученные для всех точек системы произведения. В результате имеем

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\overline{F_k} + \overline{R_k} + \overline{\Phi_k}\right)\delta\overline{r_k} = 0, \tag{13}$$

Это уравнение называется общим уравнением динамики. Выражение (13) является условием, которое должно выполняться для любого совместного со связями движения системы под действием заданных активных сил. Общему уравнению динамики соответствует **принцип Даламбера-Лагранжа**: **при движении механической системы в любой момент времени сумма работ активных сил, сил реакций связей и сил инерции на любом возможном перемещении из занимаемого положения равна нулю**. Принцип Даламбера-Лагранжа является вариационным и дифференциальным, потому что в нем рассматривается возможная работа активных сил, сил реакции и сил инерции в произвольный, но фиксированный момент времени. Отметим, что условие (13) выполняется только для истинного движения системы. Общее уравнение динамики можно записать и в других формах. Раскрывая скалярные произведения, получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\left(F_{kx} + R_{kx} + \Phi_{kx}\right)\delta x_k + \left(F_{ky} + R_{ky} + \Phi_{ky}\right)\delta y_k + \left(F_{kz} + R_{kz} + \Phi_{kz}\right)\delta z_k\right] = 0$$

Так как $\Phi_{kx} = -m_k \ddot{x}_k$, $\Phi_{k\acute{\imath}} = -m_k \ddot{y}_k$, $\Phi_{kx} = -m_k \ddot{z}_k$, то

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\left(F_{kx} + R_{kx} - m_k \ddot{x}_k\right)\delta x_k + \left(F_{ky} + R_{ky} - m_k \ddot{y}_k\right)\delta y_k + \left(F_{kz} + R_{kz} - m_k \ddot{z}_k\right)\delta z_k\right] = 0 \tag{14}$$

Выражение (14) определяет аналитическую форму записи общего уравнения динамики.

Если связи, наложенные на систему, идеальные, то $\sum_{k=1}^{N} \overline{R_k} \cdot \delta \overline{r_k} = 0$ и общее уравнение динамики принимает вид

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\overline{F_k} + \overline{\Phi_k} \right) \delta \overline{r_k} = 0, \qquad (15)$$

Таким образом, при движении системы с идеальными связями в любой момент времени должна быть равна нулю сумма возможных работ активных сил и сил инерции.

Если для изучения движения системы применяют обобщенные координаты, то $\overline{r_k} = \overline{r_k}(q_1, q_2, ..., q_n, t)$ и $\delta \overline{r_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \delta q_i$.

Подставив выражение для возможного перемещения $\delta \overline{r_k}$ в (13) и изменив порядок суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\overline{F_k} + \overline{R_k} + \overline{\Phi_k} \right) \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \qquad (16)$$

Так как $\left(\sum_{k=1}^{N} \left(\overline{F_k} + \overline{R_k} \right) \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \right) = Q_i$. — обобщенная сила, соответствующая $i-$й обобщенной координате, то $\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{\Phi_k} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \right) = Q_i^{\text{ин}}$ — обобщенная сила инерции, соответствующая той же координате.

Если вариации обобщенных координат независимы между собой, условие (16) принимает вид

$$Q_i + Q_i^{\text{ин}} = 0, \quad i = 1,2,..,n \qquad (17)$$

Выражение (17) называется **общим уравнением динамики в обобщенных силах**.

При изучении движения твердого тела с помощью принципа Даламбера-Лагранжа силы инерции точек тела нужно привести к какому-либо центру, например центру масс тела. Тогда сумму возможных работ сил инерции можно вычислить следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{\Phi_k} \cdot \delta \overline{r_k} = \overline{R_{\text{ин}}} \cdot \delta \overline{r_C} + L_{\omega}^{\text{ин}} \cdot \delta \varphi,$$

где $\overline{R}_{\text{ин}}$, $L_{\omega}^{\text{ин}}$ — главный вектор и главный момент сил инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс; $\delta\overline{r_C}$ — возможное перемещение центра масс; $\delta\varphi$ — возможный угол поворота тела вокруг мгновенной оси вращения.

Пример Определить ускорение центра масс диска радиусом r, который без скольжения скатывается по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис.). Коэффициент трения качения равен f_k.

Решение. Общее уравнение динамики для диска имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N}\delta A\left(\overline{F_k}\right)=\delta A\left(\overline{P}\right)+\delta A\left(M_{\text{тр}}\right)+\delta A\left(\overline{R_{\text{ин}}}\right)+\delta A\left(\overline{L_{Cz}^{ин}}\right)=0.$$

Возможные работы сил нормальной реакции $\overline{N}$ и трения скольжения $\overline{F}_{\text{тр}}$ равны нулю, так как они приложены к неподвижной в каждый момент времени точке — МЦС диска.

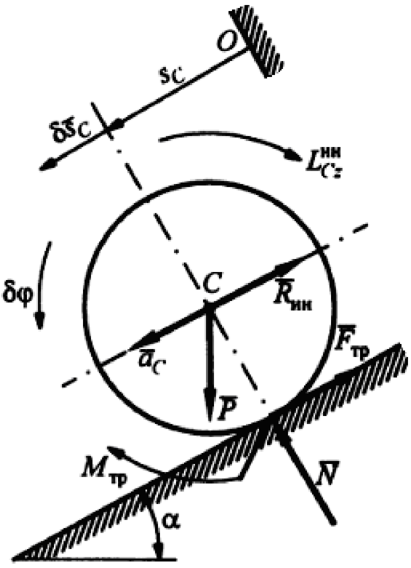

Рис. 6

Зададим диску возможное перемещение, при котором точка C получит перемещение δs_C. Тогда

$$\delta A\left(\overline{P}\right)=P\sin\alpha\cdot\delta s_C.$$

Момент трения качения $M_{\text{тр}}=\left(M_{\text{тр}}\right)_{\max}=f_{\text{k}}N=Pf_{\text{k}}\cos\alpha$ и

$$\delta A\left(M_{\text{тр}}\right)=-M_{\text{тр}}\delta\varphi=-\frac{Pf_{\text{k}}}{r}\cos\alpha\cdot\delta s_{\text{C}}.$$

Главный вектор и главный момент сил инерции точек диска относительно оси Cz соответственно равны

$$\overline{R_{\text{ин}}}=-\frac{P}{g}\overline{a_{\text{C}}};\quad L_{Cz}^{ин}=-\frac{P\cdot r^2}{2g}\varepsilon_{\text{z}},\quad \text{где } \varepsilon_{\text{z}}=\frac{a_{\text{C}}}{r}.$$

Возможные работы $\delta A\left(\overline{R_{\text{ин}}}\right)=-\frac{P}{g}a_{\text{C}}\cdot\delta s_{\text{C}},\qquad \delta A\left(\overline{L_{Cz}^{ин}}\right)=-\frac{P\cdot r^2}{2g}\frac{a_{\text{C}}}{r}\frac{\delta s_{\text{C}}}{r}.$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{4}\delta A_k=P\sin\alpha\cdot\delta s_C-\frac{Pf_{\text{k}}}{r}\cos\alpha\cdot\delta s_{\text{C}}-\frac{P}{g}a_{\text{C}}\cdot\delta s_{\text{C}}-\frac{P\cdot r^2}{2g}\frac{a_{\text{C}}}{r}\frac{\delta s_{\text{C}}}{r}=0.$$

Отсюда находим $a_{\text{C}}=\frac{2}{3}g\left(\sin\alpha-\frac{f_{\text{k}}}{r}\cos\alpha\right).$

Лекция 5.

Уравнения Лагранжа второго рода

Вывод уравнений

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой дифференциальные уравнения движения несвободной механической системы, составленные в обобщенных координатах. Рассмотрим движение системы, состоящей из N материальных точек, относительно инерциальной системы отсчета. Наложенные на систему связи — голономные, удерживающие, идеальные. Если некоторые связи не идеальные, то соответствующие им реакции следует добавить к действующим на систему активным силам.

Общее уравнение динамики для такой системы имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\overline{F_k}-m_k\overline{\ddot{r}_k}\right)\cdot\delta\overline{r_k}=0, \tag{18}$$

Запишем это уравнение в обобщенных координатах $q_1,q_2,...,q_n$, n - число степеней свободы.

Уравнение (18) получает вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\overline{F_k}\cdot\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_i}-\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d\overline{\dot{r}_k}}{dt}\cdot\left(\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_i}\right)\right)\delta q_i=0 \tag{19}$$

В этом выражении $\left(\sum_{k=1}^{N}\overline{F_k}\cdot\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_i}\right)=Q_i$, — обобщенная сила, соответствующая $i-$й обобщенной координате.

Произведение во втором слагаемом уравнения (19) представим в виде:

$$\frac{d\overline{\dot{r}_k}}{dt}\cdot\left(\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\overline{\dot{r}_k}\cdot\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_i}\right)-\overline{\dot{r}_k}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_i}\right).$$

После некоторых преобразований получаем

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d}{dt}\left(\overline{\dot{r}_k}\cdot\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_i}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\overline{\dot{r}_k}^2}{2}\right)\right]=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) \tag{20}$$

где T кинетическая энергия механической системы и

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\overline{\dot{r}_k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_i}\right)=\sum_{k=1}^{N}m_k\overline{\dot{r}_k}\cdot\frac{\partial\overline{\dot{r}_k}}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\overline{\dot{r}_k}^2}{2}\right)=\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \tag{21}$$

Подставляя в общее уравнение динамики (19) выражение для обобщенной силы Q_i а также результаты преобразований (20) и (21), находим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0 \tag{22}$$

Вариации обобщенных координат независимы между собой, поэтому условие (22) будет выполнено, если равны нулям множители при всех δq_i, т. е. если

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i, \qquad i=1,2,..,n. \tag{23}$$

Уравнения (23) называются уравнениями Лагранжа второго рода. Число этих уравнений равно числу степеней свободы. В уравнения Лагранжа не входят заранее неизвестные реакции идеальных связей.

Если силы, действующие на систему, потенциальные, то

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \qquad i=1,2,..,n.$$

В таком случае уравнения Лагранжа второго рода принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \qquad i=1,2,..,n.$$

Функция, равная разности кинетической и потенциальной энергий механической системы, называется **функцией Лагранжа**:

$$L=T-\Pi.$$

Так как потенциальная энергия системы является функцией только обобщенных координат, то $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$. При использовании функции Лагранжа уравнения (23) имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0. \tag{24}$$

Обобщенная координата, которая явно не входит в выражение функции Лагранжа, называется **циклической координатой**.

Если $\dot{q}_i$ — циклическая координата, то $\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ и из (24) находим первый интеграл $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=C_i$. Таким образом, если в качестве обобщенных удается выбрать циклические координаты, то вместо системы дифференциальных уравнений второго порядка получаем уравнения первого порядка.

Структура уравнений

Кинетическая энергия системы является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = 0 .$$

Производные от кинетической энергии, соответствующие левой части уравнений Лагранжа, равны

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_j ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_s}\dot{q}_j\dot{q}_s ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j = 0 .$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_s}\dot{q}_j\dot{q}_s - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j = Q_i , \qquad (25)$$

$$i = 1,2,..,n .$$

Обобщенные силы являются функциями обобщенных координат, времени и, возможно, обобщенных скоростей, поэтому каждое из уравнений Лагранжа имеет второй порядок. Порядок уравнений не изменится и при нестационарных связях, так как в этом случае в выражения (25) войдут слагаемые, зависящие только от обобщенных координат, скоростей и времени.

Таким образом, уравнения Лагранжа второго рода для механической системы с голономными связями представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ относительно обобщенных координат.

Последовательность действий при использовании уравнений Лагранжа второго рода для решения задач аналитической динамики следующая:

1) определить число степеней свободы системы и выбрать наиболее удобные обобщенные координаты;

2) вычислить кинетическую энергию системы в ее абсолютном движении и выразить эту энергию через обобщенные координаты q_i, и обобщенные скорости $\dot{q}_i$;

3) вычислить производные от кинетической энергии, входящие в левую часть уравнений Лагранжа;

4) определить обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам;

5) подставить все вычисленные величины в уравнения Лагранжа.