

Министерство образования и науки  
Российской Федерации  
Белгородский государственный технологический университет  
им. В.Г. Шухова

И. Р. Серых, Н. А. Смоляго, О. А. Яковлев

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Утверждено ученым советом университета  
в качестве учебного пособия для студентов  
очной формы обучения направления:  
23.05.06 – Строительство  
железных дорог, мостов и транспортных тоннелей

Белгород  
2018

УДК 539.3(07)  
ББК 30.121я7  
С32

**Р е ц е н з е н т ы:**

Кандидат технических наук, доцент, ведущий инженер-конструктор  
ООО «ПСК»БелЭнергоСтрой» *А.С. Горшков.*

Доктор технических наук, профессор Белгородского государственного  
технологического университета им. В.Г. Шухова *Г.А. Смоляго.*

**Серых, И. Р.**

С32 Сопротивление материалов: учеб. пособие / И. Р. Серых, Н. А.  
Смоляго, О. А. Яковлев. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. – 136 с.

ISBN 978-5-361-00625-0

В учебном пособии кратко изложен теоретический материал, сопровождаемый практическими примерами по следующим разделам: метод сечений; геометрические характеристики плоских сечений; плоский изгиб прямых стержней; расчет балки на упругом основании; сложное сопротивление; перемещения стержневых систем; статически неопределимые стержневые системы.

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения направления: 23.05.06 – Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей.

Данное издание публикуется в авторской редакции.

**УДК 539.3**  
**ББК 22.251**

ISBN 978-5-361-00625-0

© Серых И.Р., Смоляго Н.А.,  
Яковлев О.А, 2018

© Белгородский государственный  
технологический университет  
(БГТУ) им. В.Г.Шухова, 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ.....	6
1.1. Внешние и внутренние силы .....	6
1.2. Метод сечений.....	7
1.3. Правило знаков .....	8
1.4. Построение эпюр внутренних силовых факторов .....	8
Пример 1.1 .....	9
Пример 1.2 .....	11
Пример 1.3 .....	12
Пример 1.4 .....	13
Пример 1.5 .....	14
Пример 1.6 .....	18
1.5. Построение эпюр внутренних силовых факторов в плоских рамах .....	22
Пример 1.7 .....	22
Пример 1.8 .....	26
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	29
2.1. Основные геометрические характеристики плоских сечений.....	29
2.2. Моменты инерции простейших фигур относительно центральных осей .....	31
2.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей .....	33
Пример 2.1 .....	34
2.4. Изменение моментов инерции при повороте осей. Главные моменты инерции и главные оси.....	36
Пример 2.2 .....	38
3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБ .....	42
3.1. Основные понятия в теории изгиба.....	42
3.2. Нормальные напряжения при чистом изгибе .....	42
3.3. Моменты сопротивления.....	45
3.4. Нормальные напряжения при поперечном изгибе .....	46
3.5. Касательные напряжения .....	46
3.6. Главные напряжения .....	47
3.7. Дифференциальное уравнение упругой линии .....	48

3.8. Метод непосредственного интегрирования. Граничные условия .....	49
3.9. Универсальное уравнение упругой линии (Метод начальных параметров) .....	50
Пример 3.1 .....	51
4. РАСЧЕТ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ .....	56
4.1. Общие сведения .....	56
4.2. Расчет бесконечной балки на упругом основании .....	57
4.3. Расчет коротких балок на упругом основании .....	59
Пример 4.1 .....	65
5. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ .....	73
5.1. Особенности расчетов элементов конструкций на прочность и жесткость при сложном сопротивлении .....	73
5.2. Косой изгиб .....	73
Пример 5.1 .....	77
Пример 5.2 .....	82
5.3. Внецентренное растяжение (сжатие) .....	85
Пример 5.3 .....	89
5.4. Общий случай сложного сопротивления .....	93
6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ .....	95
6.1. Применение принципа возможных перемещений к упругим системам .....	95
6.2. Общая формула для определения перемещений. Метод Мора .....	98
6.3. Вычисление интегралов Мора по способу Верещагина .....	99
Пример 6.1 .....	101
Пример 6.2 .....	105
6.4. Перемещения, вызванные действием температуры .....	110
Пример 6.3 .....	112
7. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ .....	116
7.1. Анализ плоских стержневых систем .....	116
7.2. Основы метода сил .....	117
Пример 7.1 .....	118
Приложение .....	129
Библиографический список .....	136

## ВВЕДЕНИЕ

Вопросы прочности, жесткости и устойчивости конструкций интересуют инженера любой специальности. Особо важное значение они приобретают для инженеров путей сообщения, поскольку на железнодорожном транспорте работают уникальные инженерные сооружения: мосты, путепроводы, тоннели, трубы, метрополитены и т.д., требующие постоянного и пристального внимания ученых и инженеров.

Авторы стремились преподнести материал, предусмотренный учебной программой, в сжатом виде, но без ущерба для ясности понимания основных законов и методов.

Основной целью данного издания было помочь читателю в освоении основных положений курса сопротивления материалов и подготовить его к дальнейшему накоплению знаний при самостоятельной работе.

Необходимое внимание уделено рассмотрению таких разделов, как метод сечений; геометрические характеристики плоских сечений; плоский изгиб прямых стержней; расчет балки на упругом основании; сложное сопротивление; перемещения стержневых систем; статически неопределимые стержневые системы.

Направленность курса «Сопротивление материалов» преследует цель научить будущего инженера проектированию надежных и экономичных конструкций, начиная с вопросов физического и математического моделирования и кончая анализом полученных результатов.

Учебное пособие содержит минимально необходимое количество числовых примеров, которые способствуют лучшему восприятию теоретического материала и могут быть использованы в самостоятельной работе.

# 1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

## 1.1. Внешние и внутренние силы

**Стержень (брус)** – это тело, поперечные размеры которого значительно меньше его длины (валы, болты, балки перекрытия, элементы ферм и арок и др.).

Различают внешние и внутренние силы.

**Внешними** называются силы, которые действуют на тело со стороны других тел. В свою очередь, внешние силы подразделяются на сосредоточенные и распределенные (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Внешние силы

К сосредоточенным нагрузкам относится:  $F$  – сосредоточенная сила, [кН];  $M_e$  – пара сил, [кН·м]. К распределенным нагрузкам относится:  $q$  – равномерно-распределенная нагрузка, [кН/м].

**Внутренними** – называются силы, которые возникают в элементах конструкций под воздействием внешних сил.

Внутренние силы, распределенные произвольным образом в поперечном сечении бруса, всегда могут быть приведены к главному вектору и главному моменту. В качестве центра приведения принимается центр тяжести поперечного сечения.

Система координат выбирается следующим образом: начало в центре тяжести сечения, ось  $OX$  – вдоль оси бруса, оси  $OY$  и  $OZ$  – в плоскости перпендикулярной  $OX$ .

Проекции главного вектора и главного момента на оси координат называются **внутренними силовыми факторами** и обозначаются:

$N$ – продольная сила	} проекции главного вектора на оси $X, Y, Z$
$Q_y, Q_z$ – поперечные силы	
$M_x$ – крутящий момент	} проекции главного момента на оси $X, Y, Z$
$M_y, M_z$ – изгибающие моменты	

Таким образом, в общем случае в поперечном сечении бруса могут возникать шесть внутренних силовых фактора: три силы и три момента.

## 1.2. Метод сечений

Определение внутренних силовых факторов производится **методом сечений**.

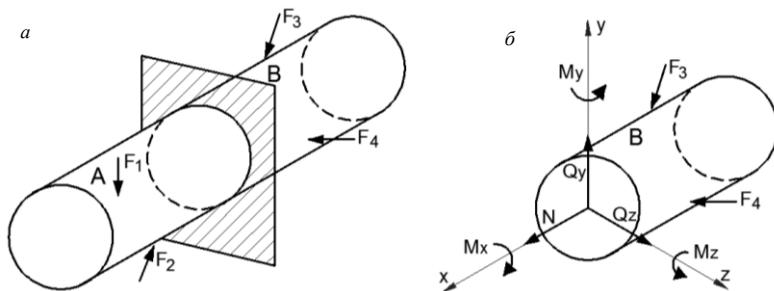


Рис. 1.2. Метод сечений:

$a$  – брус под действием внешних сил,  $b$  – уравновешенная часть бруса  $B$

Рассмотрим брус, находящийся в равновесии под действием внешних сил  $F_1, F_2, F_3, F_4$  (рис. 1.2,  $a$ ). Метод сечений заключается в следующем:

1. В заданном сечении проводится плоскость, перпендикулярная оси бруса, которая разрезает его на две части  $A$  и  $B$  (рис. 1.2,  $a$ ).
2. Одна из частей отбрасывается (например, часть  $A$ ).
3. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяется шестью внутренними силовыми факторами, направление которых выбирается произвольно (рис. 1.2,  $b$ ).

4. Записываются уравнения статики для части  $B$ , которая находится под действием внутренних силовых факторов и внешних сил, расположенных справа от приведенного сечения.

$$\sum X = 0 \rightarrow N$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow Q_y$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Q_z$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_x$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow M_y$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow M_z$$

5. Из шести уравнений статики определяются шесть внутренних силовых фактора. Если в результате вычислений какой либо внутренней силовой фактор получается со знаком «-», то это означает, что он имеет направление, противоположное заданному.

### 1.3. Правило знаков

При определении внутренних силовых факторов направление внешних нагрузок и опорных реакций учитывается с помощью следующих **правил знаков**:

– при определении продольной силы  $N$  растягивающие внешние силы принимаются со знаком «+», а сжимающие со знаком «-»;

– при определении остальных пяти внутренних силовых факторов  $Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$  правило знаков устанавливается в зависимости от направления вращения внешних нагрузок. Как правило, принимается по часовой стрелке со знаком «+», а против часовой со знаком «-». Это же правило знаков используется при определении опорных реакций.

### 1.4. Построение эпюр внутренних силовых факторов

**Эпюрой** называется графическое изображение внутреннего силового фактора:  $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ .

При построении эпюр  $N, Q_y, Q_z, M_x$  положительные значения откладываются с одной стороны базы, а отрицательные с обратной.

При построении эпюр  $M_y, M_z$  значение изгибающих моментов откладывается со стороны растянутого волокна не зависимо от знака. Поэтому он на эпюрах  $M_y, M_z$  не указывается. Штриховка эпюр производится прямыми, перпендикулярными базе эпюры. На эпюрах следует указать численные значения внутренних силовых факторов на границах участков и в характерных точках.

При построении эпюр необходимо придерживаться следующей последовательности:

1. Определить опорные реакции из уравнений статики.

2. Разбить брус на участки и провести сечения на каждом из них.

**Участком** называется прямолинейный отрезок бруса постоянного сечения, ограниченный какими-либо нагрузками, опорами либо весь покрытый равномерно-распределенной нагрузкой.

3. Записать на каждом участке уравнение для определения внутренних силовых факторов и вычислить их значения на концах каждого участка.

4. Построить эпюры и определить опасные сечения, в которых внутренние силовые факторы имеют наибольшее, но абсолютное по величине значение.

Рассмотрим построение эпюр на примере простейших балок.

**Балка** – это стержень, работающий на изгиб. При изгибе поперечные сечения стержня поворачиваются относительно первоначального положения на некоторый угол, при этом волокна, расположенные с одной стороны оси растягиваются, а с противоположной – сжимаются.

При определении внутренних силовых факторов ось  $OY$  будем располагать в плоскости действия внешних нагрузок, а ось  $OZ$  – перпендикулярно этой плоскости, ось  $OX$  – направляется вдоль оси балки.

В этом случае в поперечных сечениях балки могут возникать три внутренних силовых фактора: продольная сила  $N$ , поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_z$ . Если внешняя нагрузка перпендикулярна оси балки, то продольная сила  $N = 0$ .

**Пример 1.1.** Построить эпюры внутренних силовых факторов в простой балке (рис. 1.3).

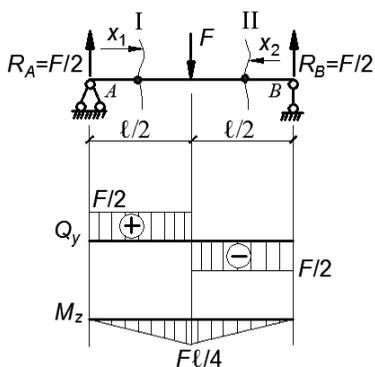


Рис. 1.3. К примеру 1.1

*Решение:* Определим опорные реакции, считая вращение по часовой стрелке положительным:

$$\sum M_A = F \frac{\ell}{2} - R_B \ell = 0, \quad R_B = \frac{F}{2}.$$

$$\sum M_B = -F \frac{\ell}{2} + R_A \ell = 0, \quad R_A = \frac{F}{2}.$$

Проверка:

$$\sum Y = R_A + R_B - F = \frac{F}{2} + \frac{F}{2} - F = 0.$$

Разобьем балку на два участка. Рассмотрим **участок I**. Проведем сечение, перпендикулярное оси балки. Отбросим правую часть и составим

уравнения  $Q_y$  и  $M_z$  для левой части. Для этого обозначим расстояние от начала участка (точка  $A$ ) до проведенного сечения через  $x_1$ , которое может меняться в пределах от 0 до  $\ell/2$ , что выражается неравенством  $0 \leq x_1 \leq \ell/2$ . При составлении уравнений пользуемся правилом знаков, рассмотренном выше (по часовой стрелке «+», против часовой «-»). Вращение производим вокруг точки пересечения произвольного сечения с осью балки:

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = R_A = F/2 .$$

Полученную положительную ординату  $F/2$  откладываем сверху от базы в начале и в конце участка. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $Q_y$  на первом участке. Внутри эпюры поставим знак «+». Штриховку производим перпендикулярно базе.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = R_A \cdot x_1 \Big|_{x_1=0}^{\Big|_{x_1=\ell/2}} = 0 \Big|_{x_1=0}^{\Big|_{x_1=\ell/2}} = F\ell/4 .$$

Как видно, эпюра будет иметь различные ординаты в начале и в конце участка. В начале участка откладываем ординату 0, а в конце  $F\ell/4$  снизу от базы поскольку единственная на данном участке нагрузка (опорная реакция  $R_A$ ), действуя вверх, растягивает нижние волокна. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $M_z$  на первом участке. Штриховку производим перпендикулярно базе.

Рассмотрим **участок II**. Проведем сечение, перпендикулярное оси балки. Отбросим левую часть и составим уравнения  $Q_y$  и  $M_z$  для правой части. Для этого обозначим расстояние от начала участка (точка  $B$ ) до проведенного сечения через  $x_2$ , которое может меняться в пределах от 0 до  $\ell/2$ , что выражается неравенством  $0 \leq x_2 \leq \ell/2$ .

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = -R_B = -F/2 .$$

Полученную отрицательную ординату  $F/2$  откладываем снизу от базы в начале и в конце участка. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $Q_y$  на втором участке. Внутри эпюры поставим знак «-». Штриховку производим перпендикулярно базе.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = -R_B \cdot x_2 \Big|_{x_2=0}^{\Big|_{x_2=\ell/2}} = 0 \Big|_{x_2=0}^{\Big|_{x_2=\ell/2}} = -F\ell/4 .$$

В начале участка откладываем ординату 0, а в конце  $F\ell/4$  снизу от базы поскольку единственная на данном участке нагрузка (опорная реакция  $R_B$ ), действуя вверх, растягивает нижние волокна. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $M_z$  на втором участке. Штриховку производим перпендикулярно базе.

**Замечание:** если к балке приложена сосредоточенная сила, то на эпюре  $Q_y$  в соответствующем сечении должен быть скачок на величину этой силы.

**Пример 1.2.** Построить эпюры внутренних силовых факторов в простой балке (рис. 1.4).

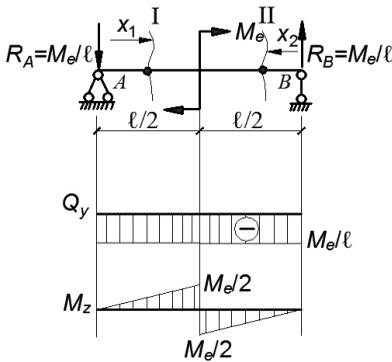


Рис. 1.4. К примеру 1.2

*Решение:* Определим опорные реакции, считая вращение по часовой стрелке положительным:

$$\sum M_A = M_e - R_B \ell = 0, \quad R_B = \frac{M_e}{\ell}.$$

$$\sum M_B = M_e - R_A \ell = 0, \quad R_A = \frac{M_e}{\ell}.$$

Проверка:

$$\sum Y = -R_A + R_B = -\frac{M_e}{\ell} + \frac{M_e}{\ell} = 0.$$

Разобьем балку на два участка.

**Участок I:**  $0 \leq x_1 \leq \ell/2$ .

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = -R_A = -M_e / \ell.$$

Полученную отрицательную ординату  $M_e / \ell$  откладываем снизу от базы в начале и в конце участка. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $Q_y$  на первом участке. Внутри эпюры поставим знак «-». Штриховку производим перпендикулярно базе.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = -R_A \cdot x_1 \begin{cases} = 0 & | & - M_e / 2 \\ x_1 = 0 & | & x_1 = \ell / 2 \end{cases}.$$

В начале участка откладываем ординату 0, а в конце  $M_e / 2$  сверху от базы поскольку единственная на данном участке нагрузка (опорная реакция  $R_A$ ), действуя вниз, растягивает верхние волокна. Соединив

эти ординаты, получим эпюру  $M_z$  на первом участке. Штриховку производим перпендикулярно базе.

**Участок II:**  $0 \leq x_2 \leq \ell/2$ .

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = -R_B = -M_e / \ell.$$

Полученную отрицательную ординату  $M_e / \ell$  откладываем снизу от базы в начале и в конце участка. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $Q_y$  на втором участке. Штриховку производим перпендикулярно базе.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = -R_B \cdot x_2 \left| \begin{array}{l} 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right| = -M_e / 2 \left| \begin{array}{l} 0 \\ x_2 = \ell/2 \end{array} \right|.$$

В начале участка откладываем ординату 0, а в конце  $M_e / 2$  снизу от базы поскольку единственная на данном участке нагрузка (опорная реакция  $R_B$ ), действуя вверх, растягивает нижние волокна. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $M_z$  на втором участке. Штриховку производим перпендикулярно базе.

**Замечание:** если к балке приложена пара сил, то на эпюре  $M_z$  в соответствующем сечении должен быть скачок на величину этой пары сил.

**Пример 1.3.** Построить эпюры внутренних силовых факторов в простой балке (рис. 1.5).

*Решение:* Определим опорные реакции, считая вращение по часовой стрелке положительным:

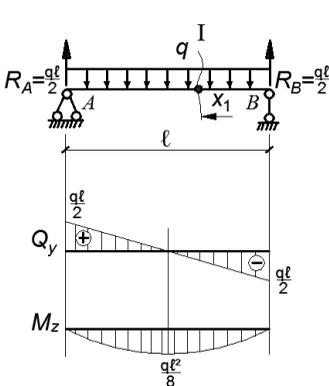


Рис. 1.5. К примеру 1.3

$$\sum M_A = q\ell \frac{\ell}{2} - R_B \ell = 0, \quad R_B = \frac{q\ell}{2}.$$

$$\sum M_B = -q\ell \frac{\ell}{2} + R_A \ell = 0, \quad R_A = \frac{q\ell}{2}.$$

**Замечание:** прежде чем ввести равномерно распределенную нагрузку в расчет, ее следует привести к равнодействующей (действующей по середине своей длины), равной произведению интенсивности нагрузки  $q$  на длину ее действия.

Проверка:

$$\sum Y = R_A + R_B - q\ell = \frac{q\ell}{2} + \frac{q\ell}{2} - q\ell = 0.$$

Балка имеет один участок. Рассмотрим его справа, отбросив левую часть балки.

$$0 \leq x_1 \leq \ell .$$

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = -R_B + qx_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell} = -q\ell/2 \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell} = q\ell/2 .$$

Отрицательную ординату  $q\ell/2$  откладываем снизу от базы в начале участка (точка  $B$ ), а положительную  $q\ell/2$  – сверху от базы в конце участка (точка  $A$ ). Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $Q_y$ . Таким образом, часть эпюры будет со знаком «-», другая – со знаком «+». Штриховку производим перпендикулярно базе.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = -R_B x_1 + qx_1 \frac{x_1}{2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell} = 0 \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell} = 0 .$$

В начале и в конце участка откладываем ординату 0. Соединяем начало и конец эпюры параболой, выпуклость которой направляем в сторону действия равномерно-распределенной нагрузки  $q$ , то есть вниз.

Так как эпюра  $Q_y$  изменяет знак, определим экстремальный изгибающий момент. Для этого приравняем нулю выражение для поперечной силы:

$$Q_y = -R_B + qx_1 = 0 , \quad x_1 = \frac{R_B}{q} = \frac{\ell}{2} .$$

Подставив полученное значение  $x_1$  в выражение для изгибающего момента, получим экстремальный изгибающий момент:

$$M_z^{\text{экстр}} = -R_B x_1 + qx_1 \frac{x_1}{2} = -\frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} + q \frac{\ell}{2} \frac{\ell/2}{2} = -\frac{q\ell^2}{8} .$$

Штриховку производим перпендикулярно базе.

#### **Замечания:**

1. В тех сечениях балки, где  $Q_y=0$  изгибающий момент имеет экстремальное значение.

2. На участках балки с распределенной нагрузкой эпюра  $M_z$  имеет форму параболы, выпуклость которой направлена в сторону действия нагрузки  $q$ .

**Пример 1.4.** Построить эпюры внутренних силовых факторов в простой балке (рис. 1.6).

*Решение:* Балка имеет один участок. Проведем сечение, перпендикулярное оси балки. Отбросим левую часть и составим уравнения  $Q_y$  и  $M_z$  для правой части.

**Замечание:** в данном случае движение справа более выгодно, поскольку не требует определения опорных реакций.

Обозначим расстояние от начала участка (свободный конец консоли) до проведенного сечения через  $x_1$ , которое может меняться в пределах от 0 до  $\ell$ , что выражается неравенством  $0 \leq x_1 \leq \ell$ .

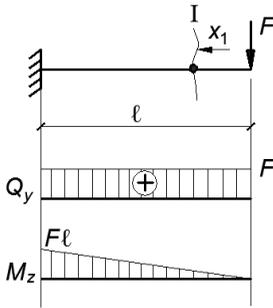


Рис. 1.6. К примеру 1.4

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = F.$$

Полученную положительную ординату  $F$  откладываем сверху от базы в начале и в конце участка. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $Q_y$ . Внутри эпюры поставим знак «+». Штриховку производим перпендикулярно базе.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = F \cdot x_1 \Big|_{x_1=0}^{\ell} = F \ell.$$

В начале участка откладываем ординату 0, а в конце  $F \ell$  сверху от базы поскольку единственная на данном участке нагрузка (сосредоточенная сила  $F$ ), действуя вниз, растягивает верхние волокна. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $M_z$ . Штриховку производим перпендикулярно базе.

**Пример 1.5.** Построить эпюры внутренних силовых факторов в балке (рис. 1.7).

*Решение:* Определим опорные реакции, считая вращение по часовой стрелке положительным:

$$\sum M_A = M_e + q \cdot 9 \cdot 7,5 - F \cdot 12 - R_B \cdot 7 = 0,$$

$$R_B = 82,57 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 7 + M_e - q \cdot 4 \cdot 2 + q \cdot 5 \cdot 2,5 - F \cdot 5 = 0,$$

$$R_A = 5,43 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = R_A - q \cdot 9 + R_B + F = 5,43 - 12 \cdot 9 + 82,57 + 20 = 0.$$

Разобьем балку на три участка. Рассмотрим участок I. Проведем сечение, перпендикулярное оси балки. Отбросим правую часть и составим уравнения  $Q_y$  и  $M_z$  для левой части. Для этого обозначим расстояние от начала участка (точка  $A$ ) до проведенного сечения через  $x_1$ , которое может меняться в пределах от 0 до 3м, что выражается неравенством  $0 \leq x_1 \leq 3\text{ м}$ .

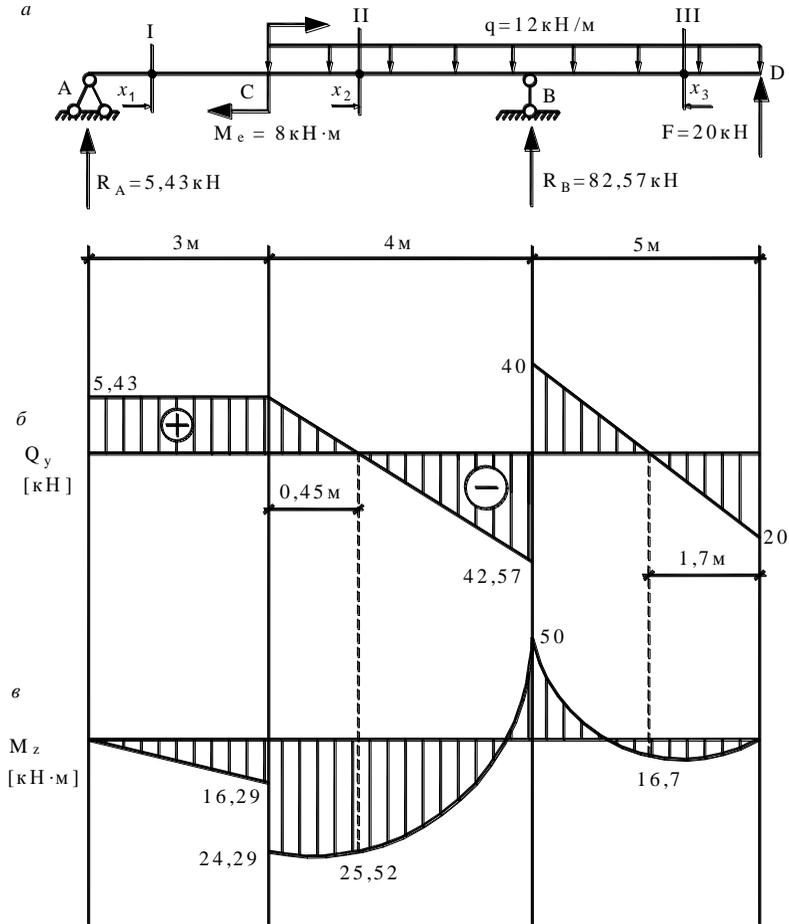


Рис. 1.7. К примеру 1.5:  
 а – схема балки, б – эпюра поперечных сил,  
 в – эпюра изгибающих моментов

При составлении уравнений пользуемся правилом знаков, рассмотренном выше (по часовой стрелке  $\langle\langle+\rangle\rangle$ , против часовой  $\langle\langle-\rangle\rangle$ ). Вращение производим вокруг точки пересечения произвольного сечения с осью балки.

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = R_A = 5,43 \text{ кН} .$$

Полученную положительную ординату откладываем сверху от базы в начале и в конце участка. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $Q_y$  на первом участке. Внутри эпюры поставим знак  $\langle\langle+\rangle\rangle$ .

Штриховку производим перпендикулярно базе.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = R_A \cdot x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=3} = 0 \Big|_{x_1=0}^{x_1=3} = 16,29 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Как видно, эпюра будет иметь различные ординаты в начале и в конце участка. В начале участка откладываем ординату  $\langle\langle 0 \rangle\rangle$ , а в конце  $\langle\langle 16,29 \rangle\rangle$  снизу от базы, поскольку единственная в данном уравнении нагрузка (опорная реакция  $R_A$ ) действуя вверх, растягивает нижние волокна. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $M_z$  на первом участке. Штриховку производим перпендикулярно базе.

Рассмотрим участок II. Проведем сечение, перпендикулярное оси балки. Отбросим правую часть и составим уравнения  $Q_y$  и  $M_z$  для левой части. Обозначим расстояние от начала участка (точка C) до проведенного сечения через  $x_2$ , которое может меняться в пределах от 0 до 4м, что выражается неравенством  $0 \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$ .

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = R_A - qx_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=4} = 5,43 \text{ кН} \Big|_{x_2=0}^{x_2=4} = -42,57 \text{ кН} .$$

Эпюра будет иметь различные ординаты в начале и в конце участка. В начале участка откладываем ординату  $\langle\langle 5,43 \rangle\rangle$ , а в конце  $\langle\langle -42,57 \rangle\rangle$  с учетом знака. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $Q_y$  на втором участке. Штриховку производим перпендикулярно базе.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = R_A(3 + x_2) + M_e - qx_2 \frac{x_2}{2} \Big|_{x_2=0}^{x_2=4} = 24,29 \text{ кН} \cdot \text{м} \Big|_{x_2=0}^{x_2=4} = -50 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

В начале участка откладываем ординату «(24,29)» снизу от базы, поскольку в уравнении  $M_z$  нагрузки, имеющие тот же знак, что и ордината «(24,29)» ( $R_A$  и  $M_e$ ) растягивают нижние волокна. В конце участка откладываем ординату «(50)» сверху от базы, поскольку в уравнении  $M_z$  нагрузка, имеющая тот же знак, что и ордината «(50)» ( $q$ ) растягивает верхние волокна. Соединяем обе ординаты параболой (см. пример 1.3, гл.1), выпуклость которой направляем в сторону действия равномерно распределенной нагрузки  $q$ , то есть вниз.

Так как эпюра  $Q_y$  меняет знак, определим экстремальный изгибающий момент. Приравняем нулю выражение для поперечной силы на этом участке.

$$Q_y = R_A - qx_2 = 0, \quad x_2 = \frac{R_A}{q} = \frac{5,43}{12} = 0,45 \text{ м} .$$

Подставив полученное значение  $x_2$  в выражение для изгибающего момента, получим экстремальный изгибающий момент:

$$M_z^{\text{экстр}} = R_A (3 + 0,45) + M_e - q \cdot 0,45 \cdot \frac{0,45}{2} = 25,52 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Штриховку производим перпендикулярно базе.

Рассмотрим участок III. Проведем сечение, перпендикулярное оси балки. Отбросим левую часть и составим уравнения  $Q_y$  и  $M_z$  для правой части. Обозначим расстояние от начала участка (точка  $D$ ) до проведенного сечения через  $x_3$ , которое может меняться в пределах от 0 до 5м, что выражается неравенством  $0 \leq x_3 \leq 5 \text{ м}$  .

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = -F + qx_3 \left| \begin{array}{l} = -20 \text{ кН} \\ x_3 = 0 \end{array} \right| = 40 \text{ кН} \left| \begin{array}{l} \\ x_3 = 5 \text{ м} \end{array} \right. .$$

В начале участка откладываем ординату «(-20)» , в конце «(40)» с учетом знака. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $Q_y$  на третьем участке. Штриховку производим перпендикулярно базе.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = -Fx_3 + qx_3 \frac{x_3}{2} \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right| = 50 \text{ кН} \cdot \text{м} \left| \begin{array}{l} \\ x_3 = 5 \text{ м} \end{array} \right. .$$

В начале участка откладываем ординату «(0)» , в конце участка ординату «(50)» сверху от базы, поскольку в уравнении  $M_z$  нагрузка,

имеющая тот же знак, что и ордината  $\langle\langle 50 \rangle\rangle$  ( $q$ ) растягивает верхние волокна. Соединяем обе ординаты параболой (см. пример 1.3, гл.1), выпуклость которой направляем в сторону действия равномерно-распределенной нагрузки  $q$ , то есть вниз. На данном участке  $Q_y$  также меняет знак, следовательно, ищем экстремальный изгибающий момент

$$Q_y = -F + qx_3 = 0, \quad x_3 = \frac{F}{q} = \frac{20}{12} = 1,7 \text{ м};$$

$$M_z^{\text{экстр}} = -F \cdot 1,7 + q \cdot 1,7 \cdot \frac{1,7}{2} = -16,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Полученные эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  представлены на рис. 1.7. Произведем проверку построенных эпюр с учетом замечаний, рассмотренных выше:

1. В точке приложения силы  $F=20\text{кН}$  на эпюре  $Q_y$  имеется скачок на величину  $20\text{кН}$ ;

2. В точке приложения опорных реакций  $R_A = 5,43 \text{ кН}$  и  $R_B = 82,57 \text{ кН}$  на эпюре  $Q_y$  имеются скачки на величину  $5,43\text{кН}$  и  $82,57 \text{ кН}$  соответственно;

3. В точке приложения момента  $M_e = 8\text{кН} \cdot \text{м}$  на эпюре  $M_z$  имеется скачок на  $8\text{кН} \cdot \text{м}$ .

**Пример 1.6.** Построить эпюры внутренних силовых факторов в балке (рис. 1.8).

*Решение:* Определим опорные реакции<sup>1</sup>, считая вращение по часовой стрелке положительным:

$$\sum Y = q \cdot 3 - F + R_A = 0, \quad R_A = -16 \text{ кН}.$$

Поскольку реакция получилась отрицательной, то следует поменять её направление на противоположное заданному (рис. 1.8, а).

$$\sum M_A = -M_A - F \cdot 3 - M_e + q \cdot 3 \cdot 6,5 = 0, \quad M_A = 166 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Проверка:

В качестве проверки следует выбрать любую точку балки (кроме жесткой заделки) и составить уравнение моментов относительно нее.

<sup>1</sup> Опорные реакции в балке с жесткой заделкой можно не определять, но при составлении уравнений для определения внутренних силовых факторов следует рассматривать все участки, двигаясь со стороны свободного конца.

$$\sum M_c = q \cdot 3 \cdot 1,5 - M_e + F \cdot 2 - M_A + R_A \cdot 5 = 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 8 + 20 \cdot 2 - 166 + 16 \cdot 5 = 0.$$

Разобьем балку на три участка. Рассмотрим участок 1. Проведем сечение, перпендикулярное оси балки. Отбросим правую часть и составим уравнения  $Q_y$  и  $M_z$  для левой части. Обозначим расстояние от начала участка (точка  $D$ ) до проведенного сечения через  $x_1$ . Оно может меняться в пределах от 0 до 3м, что выражается неравенством  $0 \leq x_1 \leq 3\text{ м}$ . Правило знаков не изменилось: по часовой стрелке  $\langle\langle+\rangle\rangle$ , против  $\langle\langle-\rangle\rangle$ .

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = qx_1 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right| = 36 \text{ кН} \left| \begin{array}{l} \\ x_1 = 3 \text{ м} \end{array} \right|.$$

В начале участка откладываем  $\langle\langle 0 \rangle\rangle$ , в конце  $\langle\langle 36 \rangle\rangle$ , учитывая знак. Соединяем ординаты прямой линией.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = qx_1 \frac{x_1}{2} \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right| = 54 \text{ кН} \cdot \text{м} \left| \begin{array}{l} \\ x_1 = 3 \text{ м} \end{array} \right|.$$

В начале участка откладываем  $\langle\langle 0 \rangle\rangle$ , в конце  $\langle\langle 54 \rangle\rangle$  снизу от базы, поскольку единственная в этом уравнении нагрузка  $q$  растягивает нижние волокна. Обе ординаты соединяем параболой выпуклостью вверх вслед за направлением действия равномерно-распределенной нагрузки.

Рассмотрим участок II. Проведем сечение и отбросим правую часть. За  $x_2$  обозначим расстояние от начала участка (точки  $C$ ) до проведенного сечения. Неравенство на данном участке имеет вид:  $0 \leq x_2 \leq 2\text{ м}$ .

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = q \cdot 3 = 36 \text{ кН}.$$

Ординату  $\langle\langle 36 \rangle\rangle$  откладываем в начале и в конце участка сверху от базы, согласно знака. Соединяем их прямой.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = q \cdot 3(1,5 + x_2) \left| \begin{array}{l} = 54 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ x_2 = 0 \end{array} \right| = 126 \text{ кН} \cdot \text{м} \left| \begin{array}{l} \\ x_2 = 2 \text{ м} \end{array} \right|.$$

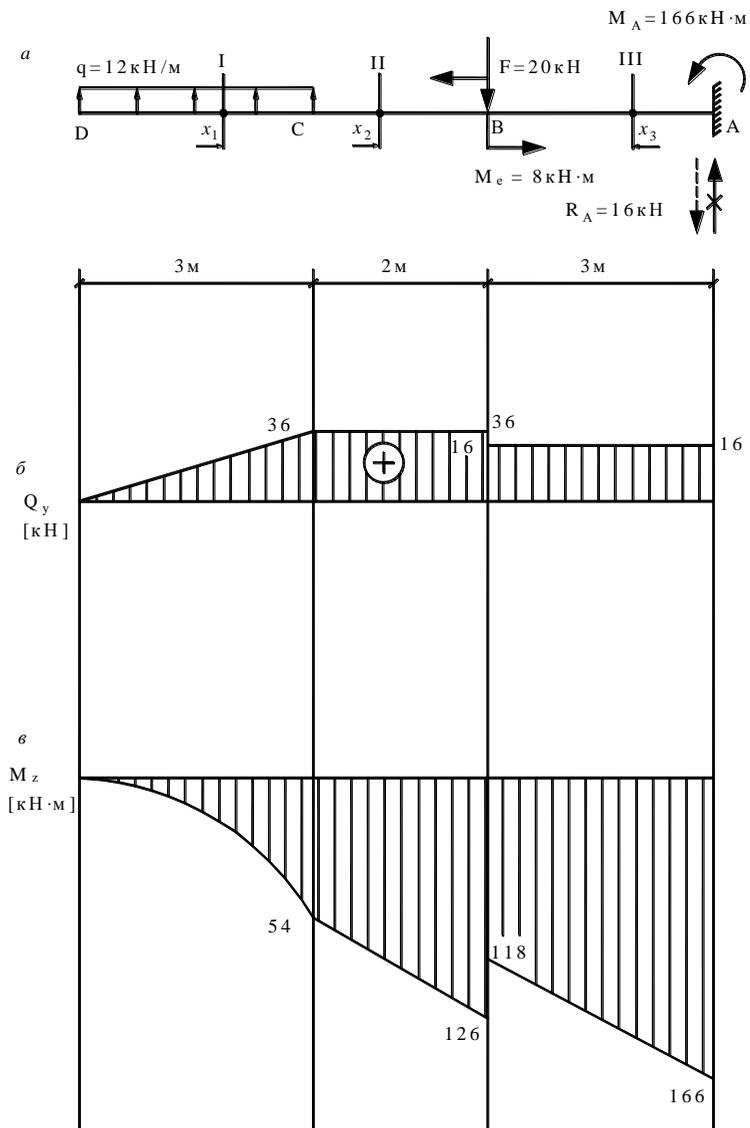


Рис. 1.8. К примеру 1.6:  
*a* – схема балки, *б* – эпюра поперечных сил,  
*в* – эпюра изгибающих моментов

В начале участка откладываем ординату «54», в конце «126» снизу от базы, поскольку единственная в этом уравнении нагрузка  $q$  растягивает нижние волокна. Ординаты соединяем прямой.

Рассмотрим участок III. Проведем сечение, перпендикулярное оси балки. Здесь, если бы опорные реакции не определялись, следовало отбросить правую часть (с жесткой заделкой) и составить уравнения со стороны свободного конца. Но поскольку реакции мы все же определили, то рассмотрим более рациональный вариант.

Отбросим левую часть. Обозначим через  $x_3$  расстояние от начала участка (жесткая заделка – точка  $A$ ) до проведенного сечения. Неравенство будет иметь вид  $0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$ .

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = R_A = 16 \text{ кН}$$

Ординаты «16» откладываем в начале и в конце участка сверху от базы, согласно знаку. Соединяем их прямой.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = R_A x_3 - M_A \quad \left| \begin{array}{l} -166 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ x_3 = 0 \end{array} \right| = -118 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad \left| \begin{array}{l} -118 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ x_3 = 3 \text{ м} \end{array} \right|$$

В начале участка откладываем «166», а в конце «118», и обе снизу от базы, поскольку в уравнении  $M_z$  нагрузка, имеющая тот же знак, что и откладываемые ординаты ( $M_A$ ) растягивает нижние волокна.

Произведем проверку построенных эпюр с учетом замечаний, рассмотренных выше:

1. В точке приложения силы  $F=20\text{кН}$  на эпюре  $Q_y$  имеется скачок на величину  $20\text{кН}$ .

2. В жесткой заделке величина опорной реакции  $R_A = 16 \text{ кН}$  совпадает со скачком на эпюре  $Q_y$ .

3. В точке приложения момента  $M_e = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$  на эпюре  $M_z$  имеется скачок на  $8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

4. В жесткой заделке величина опорного момента  $M_A = 166 \text{ кН} \cdot \text{м}$  совпадает со скачком на эпюре  $M_z$ .

## 1.5. Построение эпюр внутренних силовых факторов в плоских рамах

Рамой называется конструкция, состоящая из стержней, соединенных жесткими узлами. Вертикальные стержни называются стойками, а горизонтальные – ригелями. Рама называется плоской, если оси всех стержней и нагрузка расположены в одной плоскости.

В общем случае в поперечных сечениях плоских рам могут возникать три внутренних силовых фактора: продольная сила  $N$ , поперечная сила  $Q_y$ , изгибающий момент  $M_z$ .

При составлении уравнений пользуемся правилом знаков, рассмотренном выше: для  $Q_y$  и  $M_z$  считать по часовой стрелке  $\langle\langle+\rangle\rangle$ , против  $\langle\langle-\rangle\rangle$ ; для  $N$  сжимающие усилия входят в уравнение со знаком  $\langle\langle-\rangle\rangle$ , растягивающие со знаком  $\langle\langle+\rangle\rangle$ . При этом следует иметь в виду, что в уравнение  $N$  входят нагрузки, направленные вдоль или параллельно стержню, в уравнение  $Q_y$  – нагрузки, перпендикулярные стержню. Знак ставится только внутри эпюр  $N$  и  $Q_y$ . Штриховка производится перпендикулярно базе. При построении эпюр  $N$  и  $Q_y$  положительные значения откладываются по перпендикуляру к оси рассматриваемого стержня с одной стороны рамы (как правило, с внешней), а отрицательные соответственно с другой (как правило, с внутренней). Эпюра  $M_z$  строится со стороны растянутых волокон.

**Пример 1.7.** Построить эпюры внутренних силовых факторов в раме (рис. 1.9).

*Решение:* Определим опорные реакции, считая вращение по часовой стрелке положительным. В первую очередь следует определить опорную реакцию, не имеющую параллельной пары. В данном примере это  $H_A$ . А затем уже две другие, параллельные друг другу.

$$\sum X = q \cdot 5 - H_A = 0, \quad H_A = 60 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = q \cdot 5 \cdot 2,5 - M_e + F \cdot 7 - R_B \cdot 10 = 0, \quad R_B = 28,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -F \cdot 3 - M_e + H_A \cdot 5 + R_A \cdot 10 - q \cdot 5 \cdot 2,5 = 0, \quad R_A = -8,2 \text{ кН}.$$

Поскольку реакция  $R_A$  получилась отрицательной, то следует поменять ее направление на противоположное заданному, то есть вниз.

Проверка:

$$\sum Y = -R_A - F + R_B = -8,2 - 20 + 28,2 = 0.$$

Разобьем раму на пять участков. Рассмотрим участок 1. Проведем сечение, перпендикулярное оси стержня. Рассмотрим равновесие рамы ниже сечения. Остальную ее часть отбросим. Расстояние от начала участка (точка  $A$ ) до проведенного сечения обозначим через  $x_1$ . Неравенство будет иметь вид  $0 \leq x_1 \leq 5$  м. Вращение производим вокруг точки пересечения произвольного сечения с осью стержня.

Уравнение для продольной силы:

$$N = R_A = 8,2 \text{ кН} .$$

Полученную положительную ординату откладываем в начале и в конце участка слева от базы. Соединив эти ординаты прямой, получим эпюру  $N$  на первом участке.

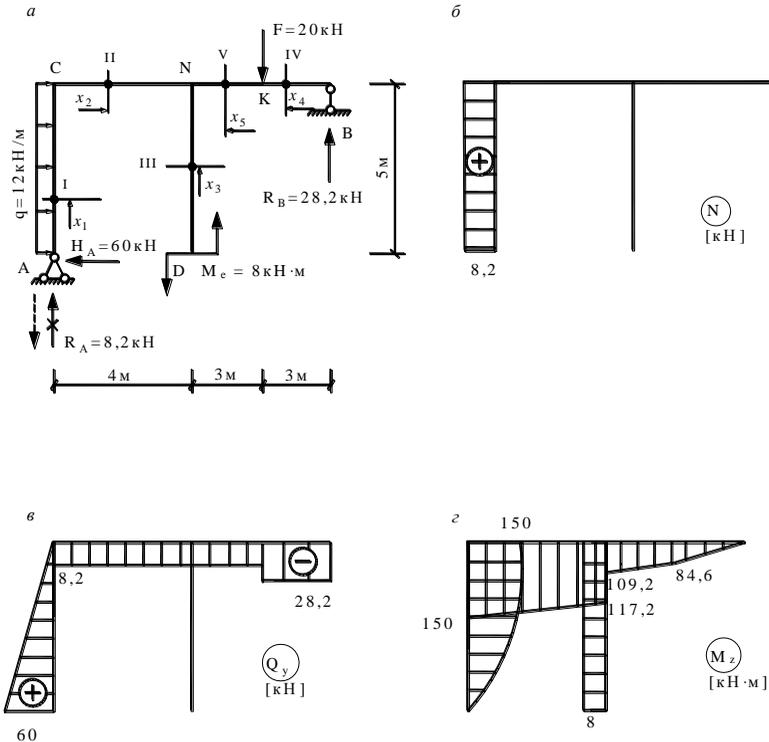


Рис. 1.9. К примеру 1.7:

$a$  – схема плоской рамы,  $б$  – эпюра продольных сил,  
 $в$  – эпюра поперечных сил,  $г$  – эпюра изгибающих моментов

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = H_A - qx_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=5\text{ м}} = 0$$

В начале участка откладываем ординату «60» слева от базы, в конце «0». Соединяем прямой.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = H_A x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=5\text{ м}} = 150 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

В начале участка откладываем «0», в конце «150» справа от базы, поскольку в уравнении  $M_z$  нагрузка, имеющая тот же знак, что и ордината «150» ( $H_A$ ) растягивает правые (внутренние) волокна. Соединяем обе ординаты параболой, выпуклость которой направляем в сторону действия  $q$ , то есть вправо.

Рассмотрим участок II. Проведем сечение, перпендикулярное оси стержня. Отбросим правую часть рамы. Рассмотрим равновесие левой её части, обозначим расстояние от начала участка (точка C) до проведенного сечения через  $x_2$ .

Неравенство будет иметь вид  $0 \leq x_2 \leq 4\text{ м}$ .

Уравнение для продольной силы:

$$N = H_A - q \cdot 5 = 60 - 12 \cdot 5 = 0,$$

следовательно, база участка остается пустой.

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = -R_A = -8,2 \text{ кН}.$$

Ординату «8,2» откладываем снизу от базы в начале и в конце участка. Соединяем прямой.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = -R_A x_2 + H_A \cdot 5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 \Big|_{x_2=0}^{x_2=4\text{ м}} = 117,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

В начале участка откладываем ординату «150», в конце «117,2». Обе снизу от базы, поскольку в уравнении  $M_z$  нагрузка, имеющая тот же знак, что и откладываемые ординаты ( $H_A$ ) растягивает нижние (внутренние) волокна. Ординаты соединяем прямой.

Рассмотрим участок III. Проведем сечение, перпендикулярное оси стержня. Отбросим верхнюю часть рамы. Рассмотрим равновесие её нижней части, обозначив расстояние от начала участка, (точка D) до

проведенного сечения через  $x_3$ . Неравенство будет иметь вид:

$$0 \leq x_3 \leq 5 \text{ м} .$$

Уравнение для продольной и поперечной силы:

$$N = 0$$

, следовательно, базы этих эпюр на участке остаются пустыми.

$$Q = 0$$

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = -M_e = -8 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Ординаты  $\langle\langle 8 \rangle\rangle$  откладываем в начале и в конце участка слева от базы, поскольку  $M_e$  растягивает левые волокна.

Рассмотрим участок IV. Проведем сечение, перпендикулярное оси стержня. Отбросим левую часть рамы и рассмотрим равновесие правой, обозначив расстояние от начала участка (точка  $B$ ) до проведенного сечения через  $x_4$ . Неравенство будет иметь вид:  $0 \leq x_4 \leq 3 \text{ м}$ .

Уравнение для продольной силы:

$$N = 0$$
, эпюра на участке отсутствует.

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = -R_B = -28,2 \text{ кН} .$$

Ординату  $\langle\langle 28,2 \rangle\rangle$  откладываем в начале и в конце участка снизу от базы. Соединяем прямой.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = -R_B x_4 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right| = -84,6 \text{ кН} \cdot \text{м} \left| \begin{array}{l} \\ x_4 = 3 \text{ м} \end{array} \right| .$$

В начале ординат откладываем  $\langle\langle 0 \rangle\rangle$ , в конце  $\langle\langle 84,6 \rangle\rangle$  снизу от базы, поскольку  $R_B$  тянет нижние (внутренние) волокна.

Рассмотрим участок V. Проведем сечение, перпендикулярное оси стержня. Отбросим левую часть рамы и рассмотрим равновесие правой, обозначив расстояние от начала участка (точка  $K$ ) до проведенного сечения через  $x_5$ . Неравенство имеет вид:  $0 \leq x_5 \leq 3 \text{ м}$ .

Уравнение для продольной силы:

$$N=0$$
, эпюра на участке отсутствует.

Уравнение для поперечной силы:

$$Q_y = -R_B + F = -28,2 + 20 = -8,2 \text{ кН} .$$

В начале и в конце участка откладываем ординаты  $\langle\langle 8,2 \rangle\rangle$  снизу от базы. Соединяем прямой.

Уравнение для изгибающего момента:

$$M_z = -R_B(3 + x_5) + Fx_5 \left| \begin{array}{l} = -84,6 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ x_5 = 0 \end{array} \right| = -109,2 \text{ кН} \cdot \text{м} \left. \begin{array}{l} \\ x_5 = 3 \text{ м} \end{array} \right\} .$$

В начале участка откладываем  $\langle\langle 84,6 \rangle\rangle$ , в конце  $\langle\langle 109,2 \rangle\rangle$  снизу от базы, поскольку в уравнении  $M_z$  нагрузка, имеющая тот же знак, что и откладываемые ординаты ( $R_B$ ) растягивает нижние (внутренние) волокна. Эпюры  $N$ ,  $Q_y$ ,  $M_z$  представлены на рис. 1.9.

**Пример 1.8.** Построить эпюры внутренних силовых факторов в раме (рис. 1.10).

*Решение:* Как уже было отмечено ранее (пример 1.6), при наличии в статически определимой системе жесткой заделки, реакции в ней можно не определять, но все уравнения для внутренних силовых факторов записывать при движении со стороны свободного конца. В рамках данного пособия в учебных целях определим опорные реакции.

$$\sum X = H_A - F = 0, \quad H_A = 20 \text{ кН} ;$$

$$\sum Y = -R_A + q \cdot 3 = 0, \quad R_A = 36 \text{ кН} ;$$

$$\sum M_A = M_A + M_e - q \cdot 3 \cdot 1,5 + F \cdot 6 = 0, \quad M_A = -74 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Так как реакция получилась отрицательной, то следует поменять ее направление на противоположное заданному, то есть против часовой стрелки.

Проверка:

Для проверки в рамках с жесткой заделкой целесообразно использовать уравнение моментов, составленное относительно любой точки рамы, исключая саму заделку.

$$\begin{aligned} \sum M_c = F \cdot 2 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + M_e - M_A + H_A \cdot 4 - R_A \cdot 3 = 20 \cdot 2 + \\ + 12 \cdot 3 \cdot 1,5 + 8 - 74 + 20 \cdot 4 - 36 \cdot 3 = 0. \end{aligned}$$

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$ )

$N=0$ , эпюра на участке отсутствует.

$$Q_y = F = 20 \text{ кН} .$$

Ординату  $\langle\langle 20 \rangle\rangle$  откладываем в начале и в конце участка с внешней стороны. Соединяем прямой.

$$M_z = Fx_1 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right| = 40 \text{ кН} \cdot \text{м} \left. \begin{array}{l} \\ x_1 = 2 \text{ м} \end{array} \right\} .$$

В начале участка откладываем  $\langle\langle 0 \rangle\rangle$ , в конце  $\langle\langle 40 \rangle\rangle$  справа от базы, поскольку сила  $F$  растягивает правые (внешние) волокна.

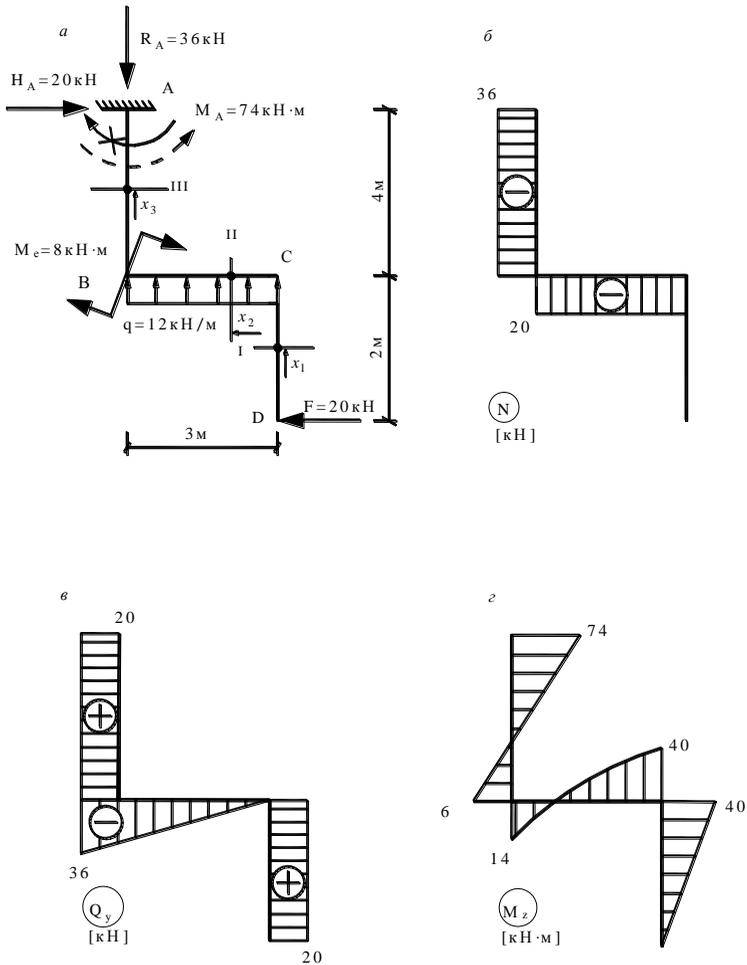


Рис. 1.10. К примеру 1.8:  
 а – схема плоской рамы, б – эпюра продольных сил,  
 в – эпюра поперечных сил, г – эпюра изгибающих моментов

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м}$ )

$$N = -F = -20 \text{ кН} .$$

Ординату <<20>> откладываем в начале и в конце участка снизу от базы (с внутренней стороны).

$$Q_y = -qx_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=3\text{ м}} = -36 \text{ кН}.$$

В начале участка откладываем <<0>>, в конце <<36>> снизу от базы. Соединяем прямой.

$$M_z = F \cdot 2 - qx_2 \frac{x_2}{2} \Big|_{x_2=0}^{x_2=3\text{ м}} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м} = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В начале участка откладываем <<40>> сверху от базы, поскольку в уравнении  $M_z$  нагрузка, имеющая тот же знак, что и ордината <<40>> ( $F$ ), растягивает верхние волокна. В конце участка откладываем <<14>> снизу от базы, поскольку в уравнении  $M_z$  нагрузка, имеющая тот же знак, что и ордината <<14>> ( $q$ ), растягивает нижние волокна. Ординаты соединяем параболой, выпуклость которой направлена вверх.

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 4 \text{ м}$ )

$$N = -q \cdot 3 = -36 \text{ кН}.$$

Ординату <<36>> откладываем в начале и в конце участка слева от базы. Соединяем прямой.

$$Q_y = F = 20 \text{ кН}.$$

Ординату <<20>> откладываем в начале и в конце участка справа от базы. Соединяем прямой.

$$M_z = M_e - q \cdot 3 \cdot 1,5 + F(2 + x_3) \Big|_{x_3=0}^{x_3=4\text{ м}} = -6 \text{ кН} \cdot \text{м} = 74 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В начале участка откладываем <<6>> слева от базы, так как в уравнении  $M_z$  нагрузка, имеющая тот же знак, что и ордината <<6>> ( $q$ ), растягивает левые волокна. В конце участка откладываем <<74>> справа от базы, так как в уравнении  $M_z$  нагрузки, имеющие тот же знак, что и ордината <<74>> ( $M_e$  и  $F$ ), растягивают правые волокна. Ординаты соединяем прямой.

Обратите внимание, что ординаты, отложенные на эпюрах в точке  $A$  полностью соответствуют найденным ранее реакциям  $H_A$ ,  $R_A$  и  $M_A$ .

## 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 2.1. Основные геометрические характеристики плоских сечений

При изучении вопросов прочности, жесткости и устойчивости конструкций приходится использовать некоторые геометрические характеристики поперечных сечений, простейшей из которых является **площадь**. Рассмотрим другие основные геометрические характеристики.

Выделим в некотором плоском сечении площадь  $A$  бесконечно малую площадку  $dA$  (рис. 2.1) и привяжем ее к системе координат  $zOy$ .

Тогда выражения

$$S_z = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A z dA$$

представляют собой **статические моменты плоского сечения** относительно осей  $z$  и  $y$ . Они измеряются в  $\text{м}^3$  или  $\text{см}^3$ .

Если известны координаты центра тяжести сечения ( $z_c$  и  $y_c$ ), то

$$S_z = A y_c; \quad S_y = A z_c. \quad (2.1)$$

Для осей, проходящих через центр тяжести сечения  $C$  (**центральные оси**)

$$S_z = S_y = 0.$$

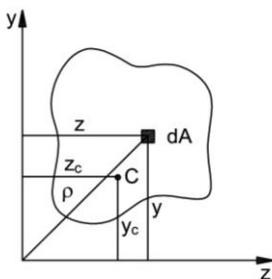


Рис. 2.1. Плоское сечение

Формулы (2.1) обычно используются для определения положения центра тяжести сечения

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\int z dA}{A}; \quad y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\int y dA}{A}. \quad (2.2)$$

При сложной форме сечение разбивается на  $n$  простейших элементов, площади и координаты центров тяжести которых легко определяются. Тогда в формулах (2.2) принимают

$$S_z = \sum_{i=1}^n A_i y_{c_i}; \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i z_{c_i}; \quad A = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (2.3)$$

Выражения

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (2.4)$$

называют соответственно **осевыми моментами инерции** (относительно осей  $z$  и  $y$ ) и **полярным моментом инерции** плоского сечения.

Поскольку из рис. 2.1 следует, что  $\rho^2 = y^2 + z^2$ , то

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_z + I_y,$$

то есть полярный момент инерции плоского сечения относительно точки пересечения двух взаимно перпендикулярных осей равен сумме осевых моментов инерции относительно этих осей.

В некоторых расчетах используются радиусы инерции, вычисляемые по формулам

$$i_z = \sqrt{I_z / A} \quad i_y = \sqrt{I_y / A} \quad (2.5)$$

**Центробежным моментом инерции** плоского сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей  $z$  и  $y$  называется выражение

$$D_{zy} = \int_A zy dA. \quad (2.6)$$

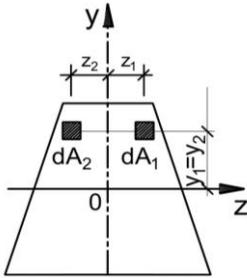


Рис. 2.2. Сечение с осью симметрии  $y$

Если хотя бы одна из указанных выше осей является осью симметрии сечения, то центробежный момент инерции равен нулю. Например, при симметрии сечения относительно оси  $y$  (рис. 2.2) центробежные моменты инерции симметрично расположенных площадок  $dA_1$  и  $dA_2$  при  $z_2 = -z_1$  в сумме дают нуль, в силу чего и для всего сечения величина  $D_{zy}$  равна нулю. Моменты инерции измеряются в  $\text{м}^4$  или  $\text{см}^4$ .

В отличие от статических моментов сечения и центробежного момента инерции, которые могут иметь любой знак или быть равными нулю, осевые и полярный моменты инерции всегда положительны. При вычислении моментов инерции сложных фигур их, как и в случае определения статических моментов сечения, разбивают на  $n$  простых частей и используют формулы

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{zi}; \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_{yi}; \quad I_p = \sum_{i=1}^n I_{pi}; \quad D_{zy} = \sum_{i=1}^n D_{zyi}. \quad (2.7)$$

Для сечений из прокатных профилей геометрические характеристики приводятся в таблицах сортамента (прил. 1).

## 2.2. Моменты инерции простейших фигур относительно центральных осей

Рассмотрим вычисление осевых моментов инерции на примере прямоугольного сечения с площадью  $A = bh$  (рис. 2.3).

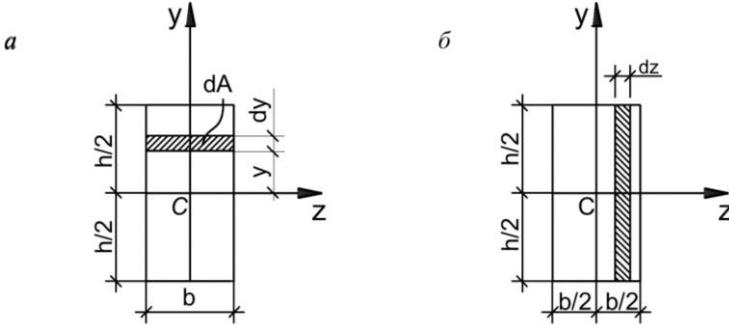


Рис. 2.3. Прямоугольное сечение:  
 а – к вычислению  $I_z$ , б – к вычислению  $I_y$

Принимая  $dA = bdy$  (рис. 2.3, а), находим

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{b \left( \frac{h}{2} \right)^3}{3} - \frac{b \left( -\frac{h}{2} \right)^3}{3} = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.8)$$

Аналогично, принимая  $dA = h dz$  (рис. 2.3, б), получаем

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 h dz = \frac{h \left( \frac{b}{2} \right)^3}{3} - \frac{h \left( -\frac{b}{2} \right)^3}{3} = \frac{hb^3}{12}. \quad (2.9)$$

Подобным образом можно вычислить моменты инерции и для других простейших фигур (рис. 2.4).

Тогда для прямоугольного треугольника (рис. 2.4, а)

$$A = \frac{bh}{2}, \quad I_z = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{hb^3}{36}; \quad (2.10)$$

для равнобедренного треугольника (рис. 2.4, б)

$$A = \frac{bh}{2}, \quad I_z = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{hb^3}{48};$$

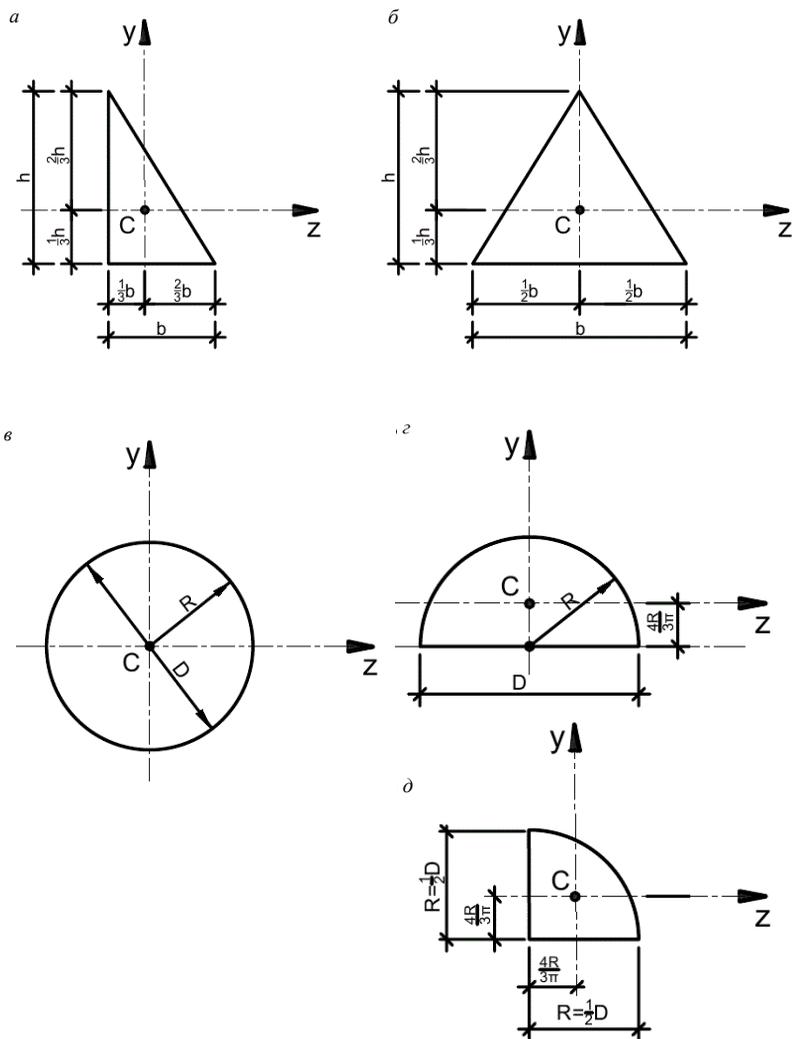


Рис. 2.4. Простейшие фигуры:  
 а – прямоугольный треугольник, б – равнобедренный треугольник,  
 в – круг, з – полукруг, д – четверть круга

для круга (рис. 2.4, в)

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \pi R^2, \quad I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}; \quad (2.11)$$

для полукруга (рис. 2.4, з)

$$A = \frac{\pi D^2}{8} = \frac{\pi R^2}{2}, \quad I_z = \frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi R^4}{8}, \quad I_y = \frac{(9\pi^2 - 64)R^4}{72\pi} \approx 0,11 R^4;$$

для четверти круга (рис. 2.4, д)

$$A = \frac{\pi D^2}{16} = \frac{\pi R^2}{4}, \quad I_z = I_y \approx 0,055 R^4. \quad (2.12)$$

### 2.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Пусть для сечения с площадью  $A$  (рис. 2.5) известны статические моменты и моменты инерции относительно осей  $z$  и  $y$ . Определим моменты инерции относительно осей  $z_1$  и  $y_1$  при условии параллельности соответствующих осей.

Из рис. 2.5 следует, что  $y_1 = y + a$ , а  $z_1 = z + b$ . Тогда

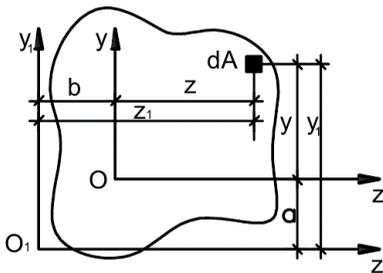
$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA = I_z + 2aS_z + a^2 A;$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = I_y + 2bS_y + b^2 A;$$

$$D_{z_1 y_1} = \int_A y_1 z_1 dA = D_{zy} + aS_y + bS_z + abA;$$

$$I_{p_1} = I_{z_1} + I_{y_1} = I_p + 2(aS_z + bS_y) + (a^2 + b^2)A.$$

Если оси  $z$  и  $y$  являются центральными, то  $S_z = S_y = 0$  и тогда



$$\left. \begin{aligned} I_{z_1} &= I_z + a^2 A; & I_{y_1} &= I_y + b^2 A; \\ D_{z_1 y_1} &= D_{zy} + abA; \\ I_{p_1} &= I_p + (a^2 + b^2)A. \end{aligned} \right\} (2.13)$$

Следовательно, моменты инерции относительно центральных осей (когда  $a=b=0$ ) имеют наименьшие значения.

Рис. 2.5. Сечение с параллельными осями

**Пример 2.1:** Определение геометрических характеристик плоских сечений.

*Задание:* Вычислить для заданного сечения (рис. 2.6) осевые моменты инерции и статические моменты относительно осей  $z$  и  $y$ .

*Решение:* Разбиваем сечение на пять простейших фигур. Используя рис. 2.3, 2.4, определяем положения их центров тяжести  $C_i$  и проводим центральные оси  $z_i$  и  $y_i$ .

Вычислим площади каждой фигуры и, используя формулы (2.8) – (2.12), находим моменты инерции относительно осей  $z_i$  и  $y_i$ :

1) для прямоугольника:

$$A_1 = 12 \cdot 4 = 48 \text{ см}^2, \quad I_{z_1} = \frac{12 \cdot 4^3}{12} = 64 \text{ см}^4, \quad I_{y_1} = \frac{12^3 \cdot 4}{12} = 576 \text{ см}^4;$$

2) для прямоугольного треугольника:

$$A_2 = \frac{1}{2} 12 \cdot 3 = 18 \text{ см}^2, \quad I_{z_2} = \frac{12 \cdot 3^3}{12} = 9 \text{ см}^4, \quad I_{y_2} = \frac{12^3 \cdot 3}{12} = 144 \text{ см}^4;$$

3) для круга:

$$A_3 = 3,14 \cdot 1^2 = 3,14 \text{ см}^2, \quad I_{z_3} = I_{y_3} = \frac{3,14 \cdot 1^4}{4} = 0,785 \text{ см}^4;$$

4) для полукруга:

$$A_4 = \frac{3,14 \cdot 2^2}{2} = 6,28 \text{ см}^2,$$

$$I_{z_4} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{8} = 6,28 \text{ см}^4, \quad I_{y_4} = 0,11 \cdot 2^4 = 1,76 \text{ см}^4;$$

5) для четверти круга:

$$A_5 = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2, \quad I_{z_5} = I_{y_5} = 0,055 \cdot 2^4 = 0,88 \text{ см}^4.$$

Определим координаты центров тяжести  $C_i$  относительно заданных осей  $z_i$  и  $y_i$ :

$$a_1 = a_3 = a_4 = 2 \text{ см}, \quad a_2 = 4 + 1 = 5 \text{ см}, \quad a_5 = 2 - 0,85 = 1,15 \text{ см},$$

$$b_1 = 1 \text{ см}, \quad b_2 = 12 - 4 - 5 = 3 \text{ см}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -(5 - 0,85) = -4,15 \text{ см},$$

$$b_5 = 12 - 5 + 0,85 = 7,85 \text{ см}.$$

Моменты инерции относительно осей  $z$  и  $y$  вычисляем, используя формулы (2.7) и (2.13), а статические моменты – по формулам (2.3). При этом геометрические характеристики отверстия и выреза принимаем со знаком «-».

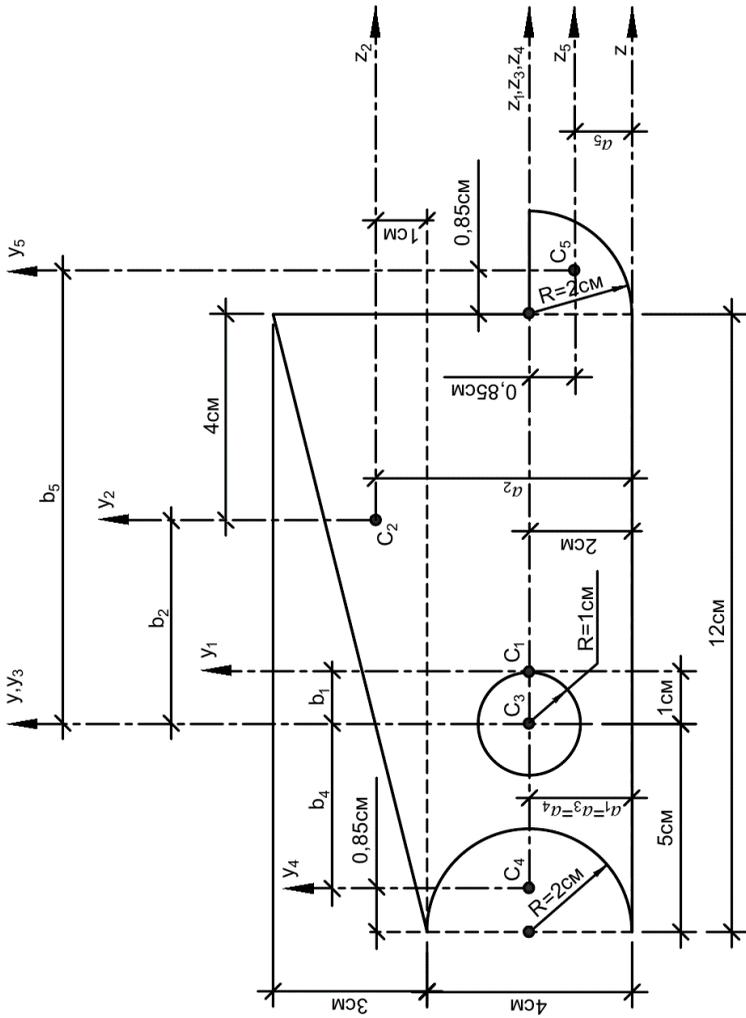


Рис. 2.6. К примеру 2.1.

$$\begin{aligned}
I_z &= \sum_{i=1}^5 (I_{z_i} + a_i^2 A_i) = (64 + 2^2 \cdot 48) + (9 + 5^2 \cdot 18) - (0,785 + 2^2 \cdot 3,14) - \\
&- (6,28 + 2^2 \cdot 6,28) + (0,88 + 1,15^2 \cdot 3,14) = 675 \text{ см}^4, \\
I_y &= \sum_{i=1}^5 (I_{y_i} + b_i^2 A_i) = (576 + 1^2 \cdot 48) + (144 + 3^2 \cdot 18) - (0,785 + 0) - \\
&- (1,76 + (-4,15)^2 \cdot 6,28) + (0,88 + 7,85^2 \cdot 3,14) = 1014 \text{ см}^4, \\
S_z &= \sum_{i=1}^5 (A_i a_i) = 48 \cdot 2 + 18 \cdot 5 - 3,14 \cdot 2 - 6,28 \cdot 2 + 3,14 \cdot 1,15 = 171 \text{ см}^3, \\
S_y &= \sum_{i=1}^5 (A_i b_i) = 48 \cdot 1 + 18 \cdot 3 - 0 - 6,28 \cdot (-4,15) + 3,14 \cdot 7,85 = 153 \text{ см}^3
\end{aligned}$$

#### 2.4. Изменение моментов инерции при повороте осей. Главные моменты инерции и главные оси

Исследуем изменение моментов инерции при повороте осей координат (рис. 2.7). Пусть известны величины моментов инерции относительно осей  $z$  и  $y$ . Определим моменты инерции относительно осей  $z_1$  и  $y_1$ , повернутых относительно заданных на угол  $\alpha$ . Выразим координаты  $z_1$  и  $y_1$  площадки  $dA$  через координаты  $z$  и  $y$

$$z_1 = OC + CD = OC + AE = z \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$y_1 = BE - DE = BE - CA = y \cos \alpha - z \sin \alpha.$$

Тогда, подставляя эти выражения в формулы (2.4) и (2.6), получаем

$$I_{z_1} = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA - \sin 2\alpha \int_A zy dA;$$

$$I_{y_1} = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + \sin 2\alpha \int_A zy dA;$$

$$D_{z_1 y_1} = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A zy dA +$$

$$+ \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left( \int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA \right).$$

ИЛИ

$$\left. \begin{aligned} I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D_{zy} \sin 2\alpha; \\ I_{y_1} &= I_y \sin^2 2\alpha + I_z \cos^2 \alpha + D_{zy} \sin 2\alpha; \\ D_{z_1 y_1} &= D_{zy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(I_z - I_y) \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

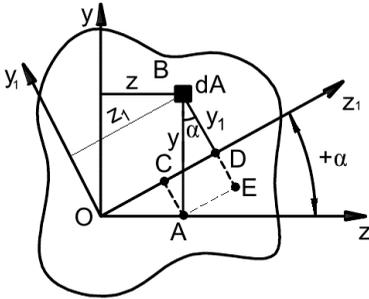


Рис. 2.7. Сечение с повернутыми осями

С изменением угла поворота  $\alpha$  каждый из моментов инерции  $I_{z_1}$  и  $I_{y_1}$  меняется, но их сумма, равная  $I_p$ , остается неизменной. Следовательно, существует такое значение  $\alpha = \alpha_0$ , при котором один из моментов инерции достигает своего максимального значения, в то время как другой принимает минимальное значение. Для нахождения угла  $\alpha_0$  приравняем нулю первую производную, например, от  $I_{z_1}$

$$\left( \frac{dI_{z_1}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -2I_z \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2I_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2D_{zy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

или, умножая на -1, получаем

$$(I_z - I_y) \sin 2\alpha_0 + 2D_{zy} \cos 2\alpha_0 = 0. \quad (2.15)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\sin 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0} = -\frac{2D_{zy}}{I_z - I_y}. \quad (2.16)$$

Поскольку из формулы (2.16) имеем два значения угла ( $\alpha_0'$  и  $\alpha_0'' = \alpha_0' + 90^\circ$ ), то получаем положения двух взаимно перпендикулярных осей, для которых, при сопоставлении формул (2.15) и третьей из формул (2.14), центробежный момент инерции становится равным нулю. Такие оси называют **главными осями инерции сечения**. На чертежах они обычно обозначаются буквами **v** (или **max**) и **u** (или **min**). Если они проходят через центр тяжести сечения, то они являются **главными центральными осями инерции**. По умолчанию все расче-

ты в сопротивлении материалов делаются именно относительно этих осей. Ось максимума всегда составляет меньший угол с той из осей ( $z$  или  $y$ ), относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение. При положительном угле  $\alpha_0$  главные оси повернуты относительно первоначальных осей против хода часовой стрелки. Плоскости, проходящие через главные центральные оси инерции, называются **главными плоскостями инерции** бруса

Моменты инерции относительно главных осей называют **главными моментами инерции**. Для определения их значений заменим в двух первых формулах (2.14) все тригонометрические функции (принимая  $\alpha = \alpha_0$ ) на  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , используя выражения

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha_0); \quad \sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha_0);$$

$$\sin 2\alpha_0 = \operatorname{tg} 2\alpha_0 \cdot \cos 2\alpha_0; \quad \cos 2\alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}.$$

Затем, используя формулу (2.16) и объединяя результаты преобразований, окончательно получаем

$$I_{\substack{v \\ u}} = I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + D_{zy}^2}. \quad (2.17)$$

**Пример 2.2.** Определение геометрических характеристик плоских сечений.

*Задание:* Для заданного сечения (рис. 2.8) определить положение главных центральных осей и вычислить относительно них главные моменты инерции.

*Решение:* Сечение состоит из двух прокатных элементов. Используя таблицы сортамента (приложение 1), записываем их геометрические характеристики (при этом следует согласовывать положения элементов в заданном сечении и в сортаменте), определяем положение центров тяжести элементов  $C_i$  и проводим центральные оси  $z_i$  и  $y_i$  (рис. 2.8).

1) **Уголок неравнополочный** № 10/6,3 (с толщиной полок – 10 мм) по ГОСТ 8510–86:

$$y_{01} = 3,4 \text{ см}; \quad z_{01} = 1,58 \text{ см}; \quad A_1 = 15,5 \text{ см}^2; \quad I_{z1} = 154 \text{ см}^4;$$

$$I_{y1} = 47,1 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = 28,3 \text{ см}^4; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,387.$$



в правой части которой принимается знак «+», если края полков уголка расположены в тех четвертях системы осей  $z_1$  и  $y_1$ , где координаты имеют одинаковые знаки (как в рассматриваемом примере), в противном случае принимается знак «-». Следовательно,

$$D_{z_1 y_1} = \frac{172,8 - 28,3}{2} \sin(2 \cdot 21^\circ) = 48,3 \text{ см}^4.$$

При вычислении центробежного момента инерции для равнополочных уголков принимается  $\alpha = 45^\circ$ .

## 2) Швеллер № 20а по ГОСТ 8240–72:

$$z_{02} = 2,28 \text{ см}; A_2 = 25,2 \text{ см}^2; I_{z_2} = 1670 \text{ см}^4; I_{y_2} = 139 \text{ см}^4; D_{z_2 y_2} = 0,$$

(так как ось  $z_2$  является осью симметрии).

Для определения положения центра тяжести всего сечения проводим вспомогательные оси  $z$  и  $y$  и вычисляем относительно них координаты центров тяжести элементов сечения  $C_i$ :

$$a_1 = 20 - y_{01} = 20 - 3,4 = 16,6 \text{ см}; a_2 = 20 / 2 = 10 \text{ см};$$

$$b_1 = 8 + z_{01} = 8 + 1,58 = 9,58 \text{ см}; b_2 = 8 - z_{02} = 8 - 2,28 = 5,72 \text{ см}.$$

Находим статические моменты относительно осей  $z$  и  $y$  и площадь сечения:

$$S_z = \sum_{i=1}^2 (A_i a_i) = 15,5 \cdot 16,6 + 25,2 \cdot 10 = 509 \text{ см}^3,$$

$$S_y = \sum_{i=1}^2 (A_i b_i) = 15,5 \cdot 9,58 + 25,2 \cdot 5,72 = 293 \text{ см}^3$$

$$A = \sum_{i=1}^2 A_i = 15,5 + 25,2 + 40,7 \text{ см}^2.$$

По формулам (2.2) вычисляем координаты центра тяжести всего сечения  $C$ :

$$z_c = \frac{293}{40,7} = 7,2 \text{ см}; \quad y_c = \frac{509}{40,7} = 12,5 \text{ см}$$

Проводим через точку  $C$  центральные оси  $z_c$  и  $y_c$  и вычисляем относительно них координаты центров тяжести элементов по формулам

$$z_{ci} = b_i - z_c, \quad y_{ci} = a_i - y_c,$$

тогда

$$z_{c1} = 9,58 - 7,2 = 2,38 \text{ см}; \quad y_{c1} = 16,6 - 12,5 = 4,1 \text{ см};$$

$$z_{c2} = 5,72 - 7,2 = -1,48 \text{ см}; \quad y_{c2} = 10 - 12,5 = -2,5 \text{ см}.$$

Используя формулы (2.13), находим моменты инерции относительно осей  $z_c$  и  $y_c$ :

$$I_{zc} = \sum_{i=1}^2 (I_{zi} + y_{ci}^2 A_i) = (154 + 4,1^2 \cdot 15,5) + (1670 +$$

$$+ (-2,5)^2 \cdot 25,2) = 2242 \text{ см}^4 ;$$

$$I_{yc} = \sum_{i=1}^2 (I_{yi} + z_{ci}^2 A_i) = (47,1 + 2,38^2 \cdot 15,5) + (139 +$$

$$+ (-1,48)^2 \cdot 25,2) = 329 \text{ см}^4 ;$$

$$D_{zcy} = \sum_{i=1}^2 (D_{ziyi} + y_{ci} z_{ci} A_i) = (48,3 + 4,1 \cdot 2,38 \cdot 15,5) +$$

$$+ 0 + (-2,5) \cdot (-1,48) \cdot 25,2) = 293 \text{ см}^4 .$$

По формуле (2.16) определяем угол поворота  $\alpha_0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2D_{zcy}}{I_{zc} - I_{yc}} = -\frac{2 \cdot 293}{2242 - 329} = -0,306 ;$$

$$2\alpha_0 = -17^\circ; \quad \alpha_0 = -8,5^\circ.$$

Поскольку  $\alpha_0 < 0$ , то для получения положения главных центральных осей поворачиваем на этот угол оси  $z_c$  и  $y_c$  по часовой стрелке. Так как  $I_{zc} > I_{yc}$ , то ось  $v$  (ось max) расположена ближе к оси  $z_c$ , а другая ось – ось  $u$  (ось min).

Величины главных моментов инерции вычисляем по формуле (2.17)

$$I_u = \frac{I_{zc} + I_{yc}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{zc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + D_{zcy}^2} = \frac{2242 + 329}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{2242 - 329}{2}\right)^2 + 293^2} = 1286 \pm 1000 ;$$

$$I_v = 2286 \text{ см}^4; \quad I_u = 286 \text{ см}^4.$$

### 3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

#### 3.1. Основные понятия в теории изгиба

**Изгибом** называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает изгибающий момент и поперечная сила. Такой изгиб называется **поперечным**. Если в поперечных сечениях стержня возникает только изгибающий момент, то такой изгиб называется **чистым**.

Изгиб называется **плоским**, или **прямым**, если внешняя нагрузка расположена в одной плоскости, совпадающей с продольной плоскостью симметрии стержня (рис. 3.1).

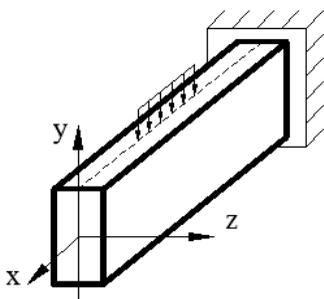


Рис. 3.1. Плоский изгиб

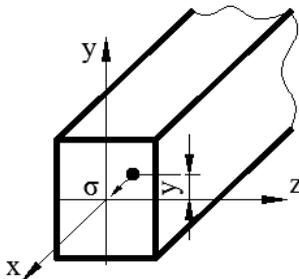


Рис. 3.2. Выделенный элемент балки

При плоском (прямом) изгибе прогиб балки происходит в плоскости действующей нагрузки.

Плоскости  $XU$  и  $XZ$ , проходящие через ось балки и одну из главных центральных осей инерции называются **главными плоскостями**.

#### 3.2. Нормальные напряжения при чистом изгибе

Теория изгиба основана на следующих гипотезах:

1. Поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси стержня после деформации. Эта гипотеза носит название **гипотезы плоских сечений** или **гипотезы Бернулли**.

2. Продольные волокна стержня не давят друг на друга.

При изгибе волокна, расположенные с одной стороны оси стержня, растягиваются, а с противоположной – сжимаются. Слой, разделя-

ющий зону сжатия и зону растяжения, называется **нейтральным слоем**, а линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения – **нейтральной линией**.

При изгибе стержня, симметричного относительно оси  $z$ , вертикальной нагрузкой (рис. 3.1) нейтральным слоем будет являться плоскость сечения  $xz$ , а нейтральной линией – ось  $z$ .

Нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения на расстоянии  $y$  от нейтральной линии (рис. 3.2) определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (3.1)$$

где  $M_z$  – изгибающий момент;  $I_z$  – момент инерции сечения.

Из этой формулы следует:

1. Нормальные напряжения распределены равномерно по ширине балки, то есть нормальные напряжения одинаковы в точках поперечного сечения, расположенных на одинаковом расстоянии от оси  $z$ .

2. Нормальные напряжения равны нулю на нейтральной линии (при  $y=0$ ).

3. Нормальные напряжения максимальны в крайних точках сечения (при  $y = y_{\max}$ ).

4. По высоте сечения напряжения изменяются по линейному закону (пропорционально  $y$ )

В точках, наиболее удаленных от оси  $z$  (при  $y = y_{\max}$ ):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max} = \frac{M_z}{I_z / y_{\max}}. \quad (3.2)$$

Обозначим  $\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z$  – осевой момент сопротивления.

Тогда  $\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \rightarrow$  основная формула в расчетах на прочность

при изгибе.

Для различных форм поперечных сечений, симметричных относительно оси  $z$  распределение нормальных напряжений по высоте является одинаковым.

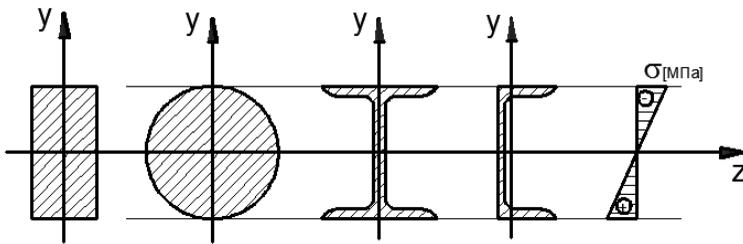


Рис. 3.3. Распределение нормальных напряжений по высоте сечения для различных форм поперечных сечений

Если сечение не имеет горизонтальной оси симметрии (рис. 3.4.), то максимальные нормальные напряжения  $\sigma_{\max}$  в наиболее удаленных точках не будут одинаковыми.

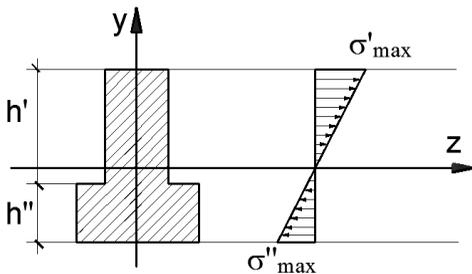


Рис. 3.4. Сечение, не имеющее горизонтальной оси симметрии

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_z}{W'_z};$$

$$\sigma''_{\max} = \frac{M_z}{W''_z},$$

где

$$W'_z = \frac{I_z}{h'};$$

$$W''_z = \frac{I_z}{h''}.$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то проверка прочности по нормальным напряжениям производится по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_{adm}, \quad (3.3)$$

где  $\sigma_{adm}$  – допускаемое нормальное напряжение, определяемое из справочной литературы.

Если материал неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию (чугун, бетон и др.), то производится проверка прочности растянутых и сжатых волокон в отдельности по формулам

$$\sigma^t_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma^t_{adm} ; \quad (3.4)$$

$$\sigma^c_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma^c_{adm} , \quad (3.5)$$

где  $\sigma^t_{\max}$ ,  $\sigma^c_{\max}$  – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие соответственно.

### 3.3. Моменты сопротивления

Момент сопротивления характеризует прочность элемента конструкции при изгибе, так как чем больше момент сопротивления, тем меньше нормальное напряжение и тем прочнее конструкция.

Для прямоугольного и круглого сечения моменты сопротивления представлены ниже (рис. 3.5, 3.6).

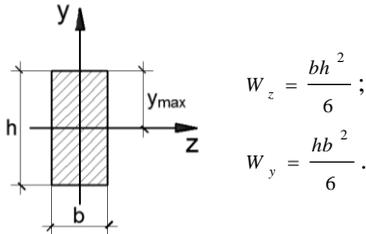


Рис. 3.5. Прямоугольное поперечное сечение

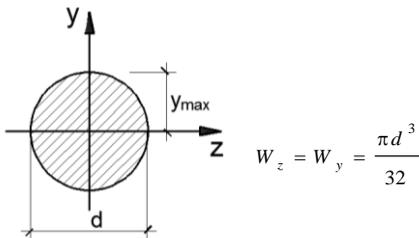


Рис. 3.6. Круглое поперечное сечение

Для прокатных профилей моменты сопротивления приведены в сортаменте.

Подбор сечения производится по формуле

$$W_z \geq \frac{M_z}{\sigma_{\max}}. \quad (3.6)$$

По величине  $W_z$  определяются поперечные размеры сечения. Если требуется подобрать прокатный профиль (швеллер, двутавр и др.), то по сортаменту выбирается такой номер профиля, у которого момент сопротивления является *ближайшим большим* к вычисленному значению  $W_z$ .

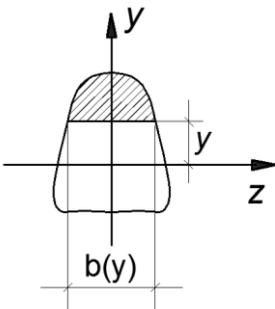
### 3.4. Нормальные напряжения при поперечном изгибе

При поперечном изгибе ( $Q_y \neq 0$ ) происходит искажение поперечных сечений от действия поперечных сил, а продольные волокна давят друг на друга. Однако это не оказывает заметного влияния на величину и характер изменения нормальных напряжений. Поэтому при поперечном изгибе нормальные напряжения определяются по тем же формулам, что и при чистом изгибе:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y \qquad \sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}. \quad (3.7)$$

### 3.5. Касательные напряжения

Касательные напряжения в поперечном сечении стержня на расстоянии  $y$  от нейтральной линии (рис. 3.6) вычисляются по формуле Журавского Д.И.



$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z}{b(y) \cdot I_z}, \quad (3.8)$$

где  $S_z$  – статический момент относительно оси  $z$  заштрихованной части сечения;  $b(y)$  – ширина сечения на расстоянии  $y$  от нейтральной линии;  $I_z$  – момент инерции сечения.

По закону парности касательные напряжения действуют также в продольных сечениях стержня.

Эпюры распределения касательных напряжений по высоте различных сече-

Рис. 3.6. Произвольное поперечное сечение

ний, приведены на рис 3.7,

где  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{A}$  – для прямоугольного поперечного сечения;

$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{A}$  – для круглого поперечного сечения;

$A$  – площадь поперечного сечения.

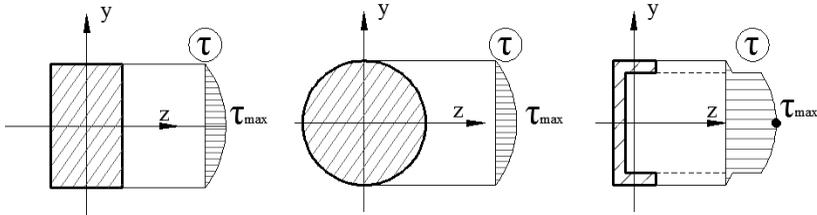


Рис. 3.7. Распределение касательных напряжений по высоте сечения для различных форм поперечных сечений

Касательные напряжения также распределены равномерно по ширине сечения, как и нормальные напряжения, но характер их распределения по высоте сечения зависит от его формы. Однако для всех форм касательные напряжения равны нулю в крайних точках сечения, наиболее удалённых от нейтральной линии.

Проверка прочности по касательным напряжениям производится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} \cdot S_z}{b(y) \cdot I_z} \leq \tau_{adm}, \quad (3.9)$$

где  $\tau_{adm}$  – допускаемое касательное напряжение.

### 3.6. Главные напряжения

*Главными* называются напряжения, которые действуют на главных площадках, а *главными площадками* – площадки, на которых касательные напряжения равны нулю.

Величина и направления главных напряжений при изгибе определяются по следующим формулам:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}; \quad (3.10)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma}, \quad (3.11)$$

где нормальные напряжения определяются по формуле  $\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$ , а

$$\text{касательные } \tau = \frac{Q_y \cdot S_z}{b(y) \cdot I_z}.$$

На нейтральной линии, где  $\sigma = 0$ , главные напряжения равны касательным, то есть

$$\sigma_{\max} = +\tau, \sigma_{\min} = -\tau$$

и направлены к оси стержня под углом  $\pm 45^\circ$ .

Условие прочности по главным напряжениям имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \leq \sigma_{adm}. \quad (3.12)$$

Проверка прочности по главным напряжениям производится в тех сечениях стержня, в которых изгибающий момент  $M_z$  и поперечная сила  $Q_y$  имеют одновременно большие значения. При этом по высоте сечения следует найти такие точки, в которых нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения имеют одновременно большие значения. Как правило, такими точками являются места резкого изменения сечения тонкостенных стержней, наиболее удалённых от оси  $z$ .

### 3.7. Дифференциальное уравнение упругой линии

Перемещение центра тяжести сечения в направлении, перпендикулярном оси балки называется **прогибом** и обозначается  $v_{\max}$ . Максимальный прогиб ( $v_{\max}$ ) называется **стрелой прогиба**, а изогнутая ось балки – **упругой линией** (рис. 3.8).

При изгибе центр тяжести поперечного сечения перемещается в горизонтальном направлении. В большинстве случаев эти перемещения малы и ими пренебрегают.

**Углом поворота** сечения  $\theta$  называется угол, на который поворачивается сечение относительно первоначального положения.

Система координат выбирается следующая: начало координат в крайнем левом сечении балки, ось  $X$  – направлена вправо, ось  $Y$  – вверх.

Прогиб балки положителен, если перемещение происходит вверх.

Угол поворота считают положительным при повороте сечения против часовой стрелки.

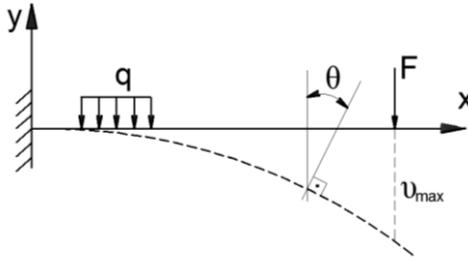


Рис. 3.8. Изогнутая ось стержня

Основное дифференциальное уравнение упругой линии при малых перемещениях

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (3.13)$$

### 3.8. Метод непосредственного интегрирования. Граничные условия

Используя обе части дифференциального уравнения упругой линии, получим формулу для определения углов поворота сечения:

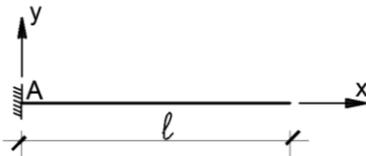
$$\vartheta = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C \quad (3.14)$$

Интегрируя второй раз, получим формулу для определения прогибов балки:

$$v = \int dx \int \frac{M_z}{EI_z} dx + Cx + D \quad (3.15)$$

где  $C$  и  $D$  – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий, которые учитывают закрепление балки:

1. Жесткое закрепление (заделка)



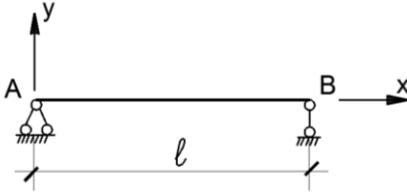
В заделке равны нулю прогиб и угол поворота:  
 $v = 0, \vartheta = 0$

Граничные условия:

$$v_A = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$\vartheta_A = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

## 2. Шарнирное опирание.



На шарнирных опорах равен нулю только прогиб:  $v = 0$

Граничные условия:

- 1)  $v_A = 0$  при  $x = 0$ ;
- 2)  $v_B = 0$  при  $x = l$ .

**Недостаток метода** непосредственного интегрирования – необходимость определения большого количества произвольных постоянных при большом количестве участков балки.

Если стержень имеет  $n$  участков, то необходимо определить  $2n$  произвольные постоянные из граничных условий и условий сопряжения линейных и угловых перемещений на границах смежных участков.

### 3.9. Универсальное уравнение упругой линии (Метод начальных параметров)

В методе начальных параметров (МНП) независимо от количества участков необходимо определить две произвольные постоянные из граничных условий.

Для стержня постоянной жесткости  $EI_z$  и положительных направлений внешних нагрузок и опорных реакций, представленных на рис. 3.9, метод дает следующую формулу для определения прогибов, которая называется *универсальным уравнением упругой линии*:

$$EI_z v = EI_z v_0 + EI_z \vartheta_0 x + \sum M_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum F_i \frac{(x - b_i)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(x - c_i)^4}{4!} - \sum q_i \frac{(x - d_i)^4}{4!}, \quad (3.16)$$

где  $M_i$ ,  $F_i$ ,  $q_i$  – внешние нагрузки, включая опорные реакции, расположенные между началом координат и сечением, в котором определяется перемещение;  $a_i, b_i, c_i, d_i$  – расстояние от начала координат до точек приложения внешних нагрузок и опорных реакций;  $x$  – расстояние от начала координат до сечения, в котором определяется перемещение;  $v_0$  и  $\vartheta_0$  – начальные параметры (прогиб и угол поворота сечения в начале координат), определяемые из граничных условий (см. п. 3.8).

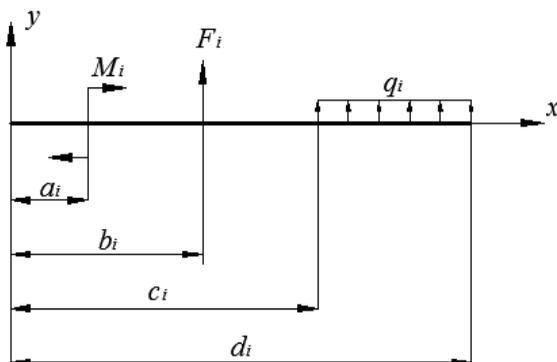


Рис. 3.9. К методу начальных параметров

Если какая-либо из внешних нагрузок или опорных реакций имеет обратное направление, то перед соответствующим слагаемым в формуле следует изменить знак на обратный.

Дифференцируя универсальное уравнение упругой линии, получим формулу для определения углов поворота сечений:

$$EI_z \vartheta = EI_z \vartheta_0 + \sum M_i (x - a_i) + \sum F_i \frac{(x - b_i)^2}{2!} + \sum q_i \frac{(x - c_i)^3}{3!} - \sum q_i \frac{(x - d_i)^3}{3!}. \quad (3.17)$$

**Недостаток метода:** невозможность определить перемещение для балок переменного сечения.

**Пример 3.1.** Расчет статически определимой стальной балки на прочность и жесткость при изгибе.

*Задание:*

1. Из полученных в примере 1.5 раздела 1 эпюр внутренних силовых факторов выбрать значения максимального изгибающего момента  $M_z^{\max}$  и максимальной поперечной силы  $Q_y^{\max}$ ;

2. Определить необходимый момент сопротивления сечения;

3. Подобрать заданные сечения (рис. 3.10) по нормальным напряжениям, полагая  $\sigma_{adm} = 160$  МПа и построить эпюры нормальных напряжений. Проверить прочность заданных сечений по касательным напряжениям, полагая  $\tau_{adm} = 0,6\sigma_{adm} = 0,6 \cdot 160$  МПа = 96 МПа;

4. Определить рациональное сечение балки;

5. Вычислить прогибы балки рационального сечения методом начальных параметров, полагая  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , и построить упругую линию;

6. Проверить жесткость балки, полагая  $v_{adm} = 0,01 l$ , где  $l$  – полная длина балки.

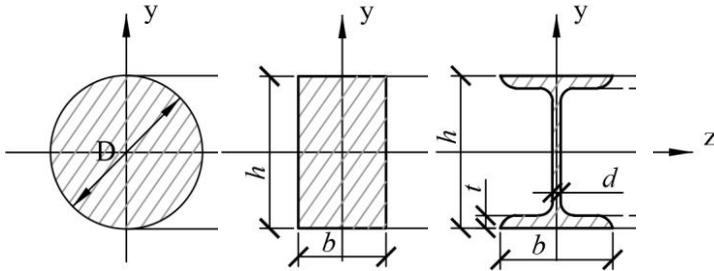


Рис. 3.10. Заданные сечения

*Решение:*

1.  $M_z^{\max} = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $Q_y^{\max} = 42,57 \text{ кН}$ .

2. Необходимый момент сопротивления сечений:

$$W_z \geq \frac{50 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{см}}{160 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}} = 312,5 \text{ см}^3.$$

3. Расчет на прочность балки круглого поперечного сечения.

а) Определение размеров поперечного сечения.

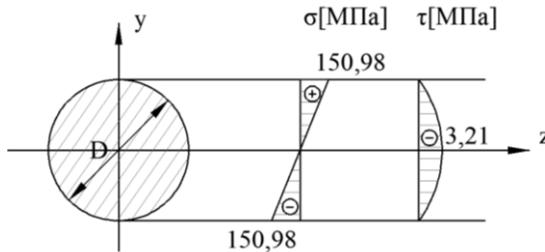


Рис. 3.11. Эпюры нормальных и касательных напряжений для балки круглого поперечного сечения

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} \geq 312,5 \text{ см}^3 \rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{312,5 \cdot 32}{\pi}} = 14,7 \text{ см}.$$

Принимаем  $D = 15$  см.

б) Проверка прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{50 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{\pi \cdot 15^3 / 32} = 15098 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 150,98 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа} ,$$

условие прочности удовлетворяется.

в) Проверка прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y^{\max}}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{42,57 \cdot 10^3 \text{ Н}}{176,63 \text{ см}^2} = 321 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 3,21 \text{ МПа} < \tau_{\text{adm}} = 96 \text{ МПа},$$

где  $A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15^2}{4} = 176,63 \text{ см}^2$  — площадь поперечного сечения.

Условие прочности удовлетворяется.

*Расчет на прочность балки прямоугольного поперечного сечения при условии  $h=3b$ .*

а) Определение размеров прямоугольного поперечного сечения.

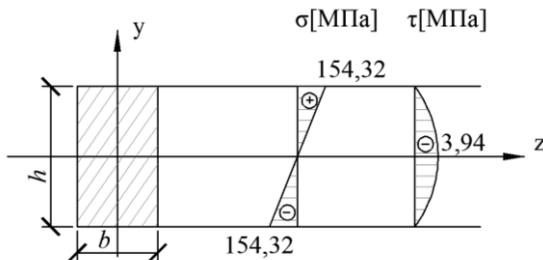


Рис. 3.12. Эпюры нормальных и касательных напряжений для балки прямоугольного поперечного сечения

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{9}{6}b^3 = 1,5b^3 \geq 312,5 \text{ см}^2 \rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{312,5}{1,5}} = 5,93 \text{ см} .$$

Принимаем  $b = 6$  см, тогда  $h=3b=3 \cdot 6=18$  см.

б) Проверка прочности по нормальным напряжениям.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{50 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{\frac{6 \text{ см} \cdot 18^2 \text{ см}}{6}} = 15432 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 154,32 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа} ,$$

условие прочности удовлетворяется.

в) Проверка прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y^{\max}}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{42,57 \cdot 10^3 \text{ Н}}{108 \text{ см}^2} = 394 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 3,94 \text{ МПа} < \tau_{\text{adm}} = 96 \text{ МПа} ,$$

где  $A=bh=6\text{см} \cdot 18\text{см}=108\text{см}^2$ .

Условие прочности удовлетворяется.

*Расчет на прочность балки двутаврового поперечного сечения.*

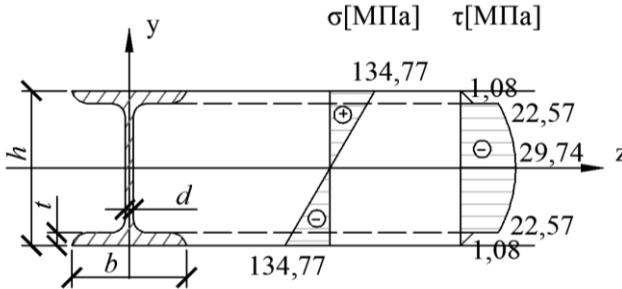


Рис. 3.13. Эпюры нормальных и касательных напряжений для балки двутаврового поперечного сечения

а) Определение размеров двутаврового поперечного сечения.

По сортаменту (прил. 1) принимаем балку №27, у которой  $W_z=371\text{см}^3 > 312,5\text{см}^3$ ,  $h=27\text{см}$ ,  $b=12,5\text{см}$ ,  $d=0,6\text{см}$ ,  $t=0,98\text{см}$ ,  $A=40,2\text{см}^2$ , масса  $1\text{м}=31,5\text{кг}$ ,  $I_z=5010\text{см}^4$ ,  $S_z=210\text{см}^3$ .

б) Проверка прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} = \frac{50 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{371 \text{ см}^3} = 13477 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 134,77 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа} ,$$

условие прочности удовлетворяется.

в) Проверка прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} \cdot S_z}{b(y) \cdot I_z} = \frac{42,57 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 210 \text{ см}^3}{0,6 \text{ см} \cdot 5010 \text{ см}^4} = 2974 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 29,74 \text{ МПа} < \tau_{\text{adm}} = 96 \text{ МПа} ,$$

где  $b(y)=d=0,6\text{см}$ .

Определим касательные напряжения в месте перехода полки в стенку. Статический момент сечения будет равен:

$$S_z = b \cdot t \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 12,5 \text{ см} \cdot 0,98 \text{ см} \left( \frac{27 \text{ см}}{2} - \frac{0,98 \text{ см}}{2} \right) = 159,37 \text{ см}^3 .$$

Тогда при  $b(y)=b=12,5\text{см}$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} \cdot S_z}{b(y) \cdot I_z} = \frac{42,57 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 159,37 \text{ см}^3}{12,5 \text{ см} \cdot 5010 \text{ см}^4} = 108 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 1,08 \text{ МПа} ;$$

при  $b(y)=d=0,6\text{см}$

$$\tau = \frac{42,57 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 159,37 \text{ см}^3}{0,6 \text{ см} \cdot 5010 \text{ см}^4} = 2257 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 22,57 \text{ МПа} .$$

4. Определим рациональное сечение балки. Для этого определим массу каждого сечения.

$$m^{\circ} = l \cdot A \cdot \gamma = 1200 \text{ см} \cdot 176,63 \text{ см}^2 \cdot 7,8 \text{ г/см}^3 = 1653257 \text{ г} = 1653,2 \text{ кг};$$

$$m^{\square} = l \cdot A \cdot \gamma = 1200 \text{ см} \cdot 108 \text{ см}^2 \cdot 7,8 \text{ г/см}^3 = 1010880 \text{ г} = 1010,9 \text{ кг};$$

$$m^{\text{I}} = l \cdot \text{масса} 1\text{м} = 12 \text{ м} \cdot 31,5 \text{ кг} = 378 \text{ кг},$$

где  $l$  – длина балки;  $A$  – площадь поперечного сечения;  $\gamma$  – удельный вес металла.

Наиболее рациональным является двутавровое поперечное сечение, так как в этом случае балка имеет наименьшую массу.

5. Определим прогибы балки рационального сечения методом начальных параметров (МНП).

Граничные условия:

1)  $v_A = 0$  при  $x=0$ ;

2)  $v_B = 0$  при  $x=7\text{м}$ .

В соответствии с этими граничными условиями приравниваем нулю универсальное уравнение упругой линии (формула (3.16)):

$$1) EI_z v_A = EI_z v_0 + EI_z \vartheta_0 \cdot 0 = 0 \rightarrow EI_z v_A = 0;$$

$$2) EI_z v_B = EI_z v_0 + EI_z \vartheta_0 \cdot 7 + \frac{R_A(7-0)^3}{6} - \frac{q(7-3)^4}{24} + \frac{M_e(7-3)^2}{2} = 0 \rightarrow EI_z \vartheta_0 = -35,2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Прогиб балки при  $x=3\text{м}$ :

$$EI_z v_c = EI_z v_0 + EI_z \vartheta_0 \cdot 3 + \frac{R_A(3-0)^3}{6} = -81,17 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$v_c = \frac{-81,17 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EI_z} = \frac{-81,17 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \cdot 5010 \text{ см}^4} = -0,81 \text{ см},$$

где  $E$  – модуль упругости стали,  $I_z$  – момент инерции рационального сечения.

Прогиб балки при  $x=12\text{м}$ :

$$EI_z v_D = EI_z v_0 + EI_z \vartheta_0 \cdot 12 + \frac{R_A(12-0)^3}{6} - \frac{q(12-3)^4}{24} + \frac{R_B(12-7)^3}{6} + \frac{M_e(12-3)^3}{2} =$$

$$= -94,85 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$v_D = \frac{-94,85 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \cdot 5010 \text{ см}^4} = -0,95 \text{ см} .$$

Линия прогибов представлена на рис. 3.14.

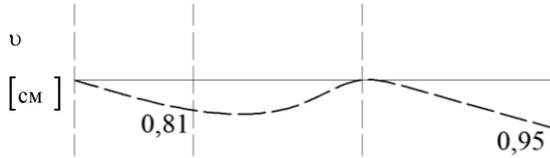


Рис. 3.14. Линия прогибов балки

#### 6. Проверка жесткости балки.

Максимальный прогиб балка имеет на конце консоли  $v_{\max}=0,95\text{см}$ . Допускаемый прогиб  $v_{adm}=0,01l=0,01\cdot 1200\text{см}=12\text{см}$ . Условие жесткости выполняется, так как  $v_{\max}<v_{adm}$ .

### 4. РАСЧЕТ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

#### 4.1. Общие сведения

Для расчета конструкций на упругом основании используются разнообразные методы расчета. Например, для вычисления напряжений в основании массивных абсолютно жестких сооружений (рис. 4.1) можно применить формулы сопротивления материалов:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z},$$

где следует принять:  $N = -F$ ,  $M_z = Fa$ ,  
 $W_z = bh^2/6$ .

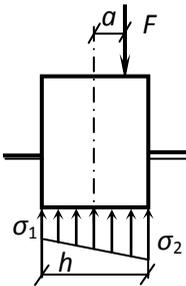


Рис. 4.1. Конструкция на упругом основании

Напряжения в основании можно определить по формулам теории упругости, как для жесткого штампа.

Рассмотрим расчет балок на упругом основании с применением гипотезы о пропорциональной зависимости между реакцией и осадкой основания. Эта гипотеза относительно свойств грунта была предложена Н.И. Фуссом в 1801 г. и применена Винклером в 1867 г. к балкам на упругом основании.

Согласно гипотезе Фусса – Винклера, реакция упругого основания в каждой точке пропорциональна прогибу балки:

$$q_R = -kb v(x) = -k_0 v(x),$$

где  $b$  – ширина сечения балки;  $v(x)$  – просадка основания;  $k$  – коэффициент податливости основания (*коэффициент постели*).

Дифференциальное уравнение упругой линии балки имеет вид:

$$d^2 v / dx^2 = M / (EI),$$

дифференцируя которое два раза, получаем

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{d^2 M}{dx^2} = q. \quad (4.1)$$

Для ненагруженного участка балки единственной распределенной нагрузкой будет отпор упругого основания, то есть

$$q = q_R = -k_0 v(x). \quad (4.2)$$

Подставляя значение (4.2) в формулу (4.1), получим

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + k_0 v(x) = 0. \quad (4.3)$$

Введем обозначение  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}} \begin{bmatrix} 1 \\ M \end{bmatrix}$  и приведем уравнение (4.3)

к виду

$$v^{IV}(x) + 4\alpha^4 v(x) = 0. \quad (4.4)$$

Общее решение уравнения (4.4) имеет вид:

$$v(x) = e^{\alpha x} (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (C \cos \alpha x + D \sin \alpha x). \quad (4.5)$$

Произвольные постоянные  $A, B, C, D$  определяются из граничных условий. Коэффициент  $\alpha$  является *основной характеристикой жесткости балки на упругом основании*.

## 4.2. Расчет бесконечной балки на упругом основании

Балка считается бесконечно длинной, если расстояние от края нагрузки до ближайшего его конца составляет более  $1,5\pi/\alpha$  (рис. 4.2). Упругая линия бесконечно длинной балки симметрична относительно точки приложения груза  $F$ , поэтому будем рассматривать одну половину балки с началом координат в точке приложения груза.

В длинных балках влияние сосредоточенного груза с расстоянием затухает. Так как при  $x \rightarrow \infty$  прогиб и кривизна оси балки равны нулю, то решение (4.5) можно упростить

$$v = e^{-\alpha x} (C \cos \alpha x + D \sin \alpha x). \quad (4.6)$$

Для определения постоянных интегрирования, поставим граничные условия:  $v' = 0$  при  $x = 0$  и  $Q = dM / dx = EI v''' = -F / 2$  также при  $x = 0$  (в середине балки, но справа от оси  $y$ , рис. 4.2).

Из первого граничного условия получаем  $-C + D = 0$ , или  $C = D$ . Второе граничное условие принимает вид:

$$EI (4\alpha^3 C e^{-\alpha x} \cos \alpha x)_{x=0} = -F / 2 \text{ и тогда } C = -F / (8\alpha^3 EI).$$

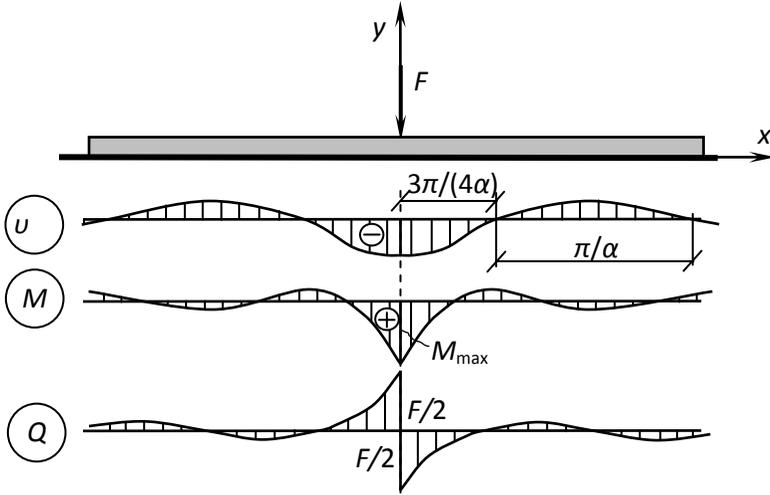


Рис. 4.2. Бесконечная балка на упругом основании

Окончательно формула (4.6) принимает вид:

$$v = -\frac{F}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x), \quad (4.7)$$

кроме того

$$M = EI v'' = -\frac{F}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x),$$

$$Q = EI v''' = -\frac{F}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x. \quad (4.8)$$

На рис. 4.2 представлены эпюры, построенные по формулам (4.7) – (4.8). Длина, через которую появляются нулевые значения  $v$ ,  $M$ ,  $Q$ , будет определяться равенством  $x = \pi/\alpha$ . По формулам (4.7), (4.8) строятся эпюры для правой половины балки. Эпюры  $v$  и  $M$  – симметричны, а эпюра  $Q$  – кососимметрична относительно начала координат.

Если на балку действуют несколько сосредоточенных сил, то момент в соответствующем сечении равен сумме моментов, вызываемых каждой силой.

При нагружении равномерно распределенной нагрузкой  $q$  по закону независимости действия сил можно написать (рис. 4.3)

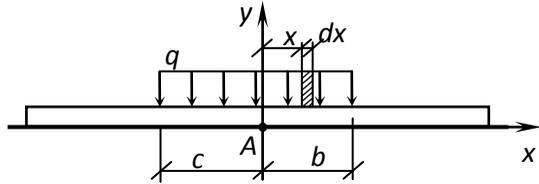


Рис. 4.3. Балка, нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой

$$d v_A = - \frac{q dx}{8 \alpha^3 EI} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x),$$

$$v_A = \int_0^b d v_A + \int_0^c d v_A = - \frac{q}{2k} (2 - e^{-\alpha b} \cos \alpha b - e^{-\alpha c} \sin \alpha c). \quad (4.9)$$

### 4.3. Расчет коротких балок на упругом основании

К коротким относятся балки, у которых расстояние от сосредоточенного воздействия до ближайшего края балки меньше, чем длина затухания краевого эффекта  $\ell_{кз} = \pi/\alpha$ , где  $\alpha$  – параметр, определяемый по формуле:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{kb}{4 EI_z}},$$

где  $k$  – коэффициент постели,  $b$  – ширина сечения балки,  $E$  – модуль упругости балки,  $I_z$  – момент инерции поперечного сечения балки.

Следует отметить, что **краевым эффектом** называются затухающие с удалением от мест приложения сосредоточенных воздействий возмущения прогибов и внутренних усилий.

Под действием приложенной нагрузки балка на упругом основании будет прогибаться, причем в зоне сжатия осадка основания равна прогибу балки  $v(x)$ . В действительности основание получает не только упругие, но и остаточные деформации, но мы будем считать, что грунт работает лишь в пределах упругих деформаций. Зависимость между интенсивностью давления  $q_R$  и осадкой  $v(x)$  принимают линейной

$$q_R = -kb v(x),$$

где коэффициенты постели  $k$  приводятся в справочниках и зависит от вида грунта (табл. 4.1).

Таблица 4.1

**Значения коэффициента постели для различных грунтов**

№	Вид грунта	$k, \text{Н/см}^3$
1	Песок свеженасыпной; глина мокрая, размягченная	1...5
2	Грунты средней плотности: песок слежавшийся; гравий насыпной; глина влажная	5...50
3	Грунты плотные: песок и гравий, плотно слежавшиеся; щебень; глина влажная	50...100
4	Грунты весьма плотные: грунт песчано-глинистый, искусственно уплотненный; глина твердая	100...200
5	Известняк, песчаник, мерзлота	200...1000
6	Твердая скала	1000...15000

Обозначим внешнюю нагрузку через  $q_0$ , то уравнение упругой оси балки будет иметь вид:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{d^2 M}{dx^2} = q_R + q_0 = -k_0 v(x) + q_0,$$

или

$$EI v^{IV}(x) + k_0 v(x) = q_0. \quad (4.10)$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид (формула (4.5)):

$$v(x) = e^{\alpha x} (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (C \cos \alpha x + D \sin \alpha x)$$

А.Н. Крылов предложил вместо этого интеграла принимать решение в форме:

$$v(x) = AY_1(\xi) + BY_2(\xi) + CY_3(\xi) + DY_4(\xi), \quad (4.11)$$

где  $Y_1(\xi), Y_2(\xi), Y_3(\xi), Y_4(\xi)$  – функции А.Н.Крылова, имеющие вид:

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= ch \xi \cos \xi; \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2} (ch \xi \sin \xi + sh \xi \cos \xi); \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2} sh \xi \sin \xi; \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4} (ch \xi \sin \xi - sh \xi \cos \xi); \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\xi = \alpha x.$$

Для определения четырех постоянных  $A, B, C, D$  сформулируем граничные условия при  $x = 0$

$$v(0) = v_0; \quad v'(0) = \vartheta_0; \quad M(0) = -EI v''(0) = M_0; \quad Q(0) = EI v'''(0) = Q_0. \quad (4.13)$$

Подставив (4.5) в равенства (4.13), получим систему четырех уравнений относительно постоянных  $A, B, C, D$ , решив которую выразим эти постоянные через начальные параметры  $v_0, \vartheta_0, M_0$  и  $Q_0$ :

$$A = v_0, \quad B = \frac{\vartheta_0}{\alpha}, \quad C = \frac{M_0}{\alpha^2 EI}, \quad D = \frac{Q_0}{\alpha^3 EI}.$$

После подстановки этих постоянных обратно в (4.5) и группировки слагаемых по соответствующим начальным параметрам решение (4.5) получит вид

$$v(\xi) = v_0 Y_1(\xi) + \frac{\vartheta_0}{\alpha} Y_2(\xi) - \frac{4M_0 \alpha^2}{k_0} Y_3(\xi) - \frac{4Q_0 \alpha}{k_0} Y_4(\xi) + \frac{1}{k_0} \sum \left\{ -4M_i \alpha^2 Y_3(\xi - \xi_{M_i}) + 4F_i \alpha Y_4(\xi - \xi_{F_i}) + q_i \left( (1 - Y_1(\xi - \xi_{q_i}^n)) + (-1 + Y_1(\xi - \xi_{q_i}^k)) \right) \right\}, \quad (4.14)$$

где  $v_0, \vartheta_0, M_0, Q_0$  – прогиб, угол поворота сечения, изгибающий момент и поперечная сила в начале координат (начальные параметры);  $M_i, F_i, q_i$  – внешние нагрузки;  $\xi_{M_i}, \xi_{F_i}, \xi_{q_i}^n, \xi_{q_i}^k$  – безразмерные координаты точек приложения внешних нагрузок и произвольного сечения, определяемые как произведение коэффициента  $\alpha$  на расстояние до соответствующей нагрузки (рис. 4.4).

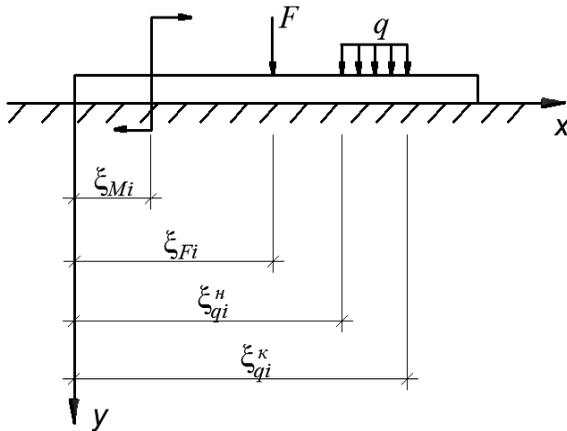


Рис. 4.4. Положительное направление внешних нагрузок

Продифференцировав функцию прогибов (4.14), переходим к углам поворота и далее по формулам  $M = -EI v''$  и  $Q = -EI v'''$  к внутренним усилиям:

$$\vartheta(\xi) = -4v_0\alpha Y_4(\xi) + \vartheta_0 Y_1(\xi) - \frac{4M_0\alpha^3}{k_0} Y_2(\xi) - \frac{4Q_0\alpha^2}{k_0} Y_3(\xi) + \quad (4.15)$$

$$+ \frac{4}{k_0} \sum \left( -M_i \alpha^3 Y_2(\xi - \xi_{M_i}) + F_i \alpha^2 Y_3(\xi - \xi_{F_i}) - q_i \alpha (-Y_4(\xi - \xi_{q_i}^n) + Y_4(\xi - \xi_{q_i}^k)) \right)$$

$$M(\xi) = \frac{v_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(\xi) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^3} Y_4(\xi) + M_0 Y_1(\xi) + \frac{Q_0}{\alpha} Y_2(\xi) + \quad (4.16)$$

$$+ \sum \left( M_i Y_1(\xi - \xi_{M_i}) - \frac{F_i}{\alpha} Y_2(\xi - \xi_{F_i}) + \frac{q_i}{\alpha^2} (-Y_3(\xi - \xi_{q_i}^n) + Y_3(\xi - \xi_{q_i}^k)) \right)$$

$$Q(\xi) = \frac{v_0 k_0}{\alpha} Y_2(\xi) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(\xi) - 4M_0 \alpha Y_4(\xi) + Q_0 Y_1(\xi) + \quad (4.17)$$

$$+ \sum \left( -4M_i \alpha Y_4(\xi - \xi_{M_i}) - F_i Y_1(\xi - \xi_{F_i}) + \frac{q_i}{\alpha} (-Y_2(\xi - \xi_{q_i}^n) + Y_2(\xi - \xi_{q_i}^k)) \right)$$

Отпор грунта находится по формуле

$$q_R = -k_0 v(x).$$

Как и в обычной балке, в начале координат часть начальных параметров всегда известна, а остальные определяются из граничных условий, формулируемых для противоположного конца стержня.

Все возможные случаи опирания концов балки и их граничные условия представлены в табл. 4.2. Для определения функций А.Н. Крылова следует использовать табл. 4.3.

Таблица 4.2

**Балки с различными условиями опирания**

Условия закрепления		Неизвестные начальные параметры	Граничные условия для определения неизвестных параметров
Левого конца	Правого конца		
1	2	3	4
Свободен	Свободен	$M_0 = 0 \quad v_0 = ?$ $Q_0 = 0 \quad \vartheta_0 = ?$	$M_\ell = 0$ $Q_\ell = 0$
Свободен	Шарнирно оперт	$M_0 = 0 \quad v_0 = ?$ $Q_0 = 0 \quad \vartheta_0 = ?$	$M_\ell = 0$ $v_\ell = 0$

Окончание табл. 4.2

1	2	3	4
Свободен	Заделан	$M_0 = 0 \quad v_0 = ?$ $Q_0 = 0 \quad \vartheta_0 = ?$	$\vartheta_\ell = 0$ $v_\ell = 0$
Шарнирно оперт	Свободен	$M_0 = 0 \quad Q_0 = ?$ $v_0 = 0 \quad \vartheta_0 = ?$	$M_\ell = 0$ $Q_\ell = 0$
Шарнирно оперт	Шарнирно оперт	$M_0 = 0 \quad Q_0 = ?$ $v_0 = 0 \quad \vartheta_0 = ?$	$M_\ell = 0$ $v_\ell = 0$
Шарнирно оперт	Заделан	$M_0 = 0 \quad Q_0 = ?$ $v_0 = 0 \quad \vartheta_0 = ?$	$\vartheta_\ell = 0$ $v_\ell = 0$
Заделан	Свободен	$\vartheta_0 = 0 \quad Q_0 = ?$ $v_0 = 0 \quad M_0 = ?$	$M_\ell = 0$ $Q_\ell = 0$
Заделан	Шарнирно оперт	$\vartheta_0 = 0 \quad Q_0 = ?$ $v_0 = 0 \quad M_0 = ?$	$M_\ell = 0$ $v_\ell = 0$
Заделан	Заделан	$\vartheta_0 = 0 \quad Q_0 = ?$ $v_0 = 0 \quad M_0 = ?$	$\vartheta_\ell = 0$ $v_\ell = 0$

Таблица 4.3

## Функции А.Н. Крылова

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
1	2	3	4	5
0,0	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,99998	0,10000	0,00500	0,00017
0,2	0,99973	0,19999	0,02000	0,00113
0,3	0,99865	0,29992	0,04500	0,00450
0,4	0,99573	0,39966	0,07998	0,01067
0,5	0,98958	0,49896	0,12491	0,02083
0,6	0,97841	0,59741	0,17974	0,03598
0,7	0,96001	0,69440	0,24435	0,05710
0,8	0,93180	0,78908	0,31854	0,08517
0,9	0,89082	0,88033	0,40205	0,12112
1,0	0,83373	0,96671	0,49445	0,16587
1,1	0,75683	1,04642	0,59517	0,22029
1,2	0,65611	1,11728	0,70344	0,28516
1,3	0,52722	1,17670	0,81824	0,36119
1,4	0,36559	1,22163	0,93829	0,44898
1,5	0,16641	1,24857	1,06197	0,54897
1,6	-0,07525	1,25350	1,18727	0,66143
1,7	-0,36440	1,23193	1,31178	0,78640
1,8	-0,70601	1,17887	1,43261	0,92366
1,9	-1,10489	1,08882	1,54632	1,07268

Продолжение табл. 4.3

1	2	3	4	5
2,0	-1,56560	0,95583	1,64894	1,23256
2,1	-2,09220	0,77351	1,73585	1,40195
2,2	-2,68818	0,53508	1,80177	1,57902
2,3	-3,35613	0,23348	1,84076	1,76140
2,4	-4,09760	-0,38590	1,84612	1,94605
2,5	-4,91277	-0,58850	1,81044	2,12926
2,6	-5,80020	-1,12355	1,72558	2,30650
2,7	-6,75646	-1,75083	1,58266	2,47243
2,8	-7,77579	-2,47694	1,37212	2,62078
2,9	-8,84976	-3,30780	1,08378	2,74427
3,0	-9,96678	-4,24832	0,70691	2,83458
3,1	-11,11174	-5,30208	0,23035	2,88232
3,2	-12,26555	-6,47096	-0,35734	2,87695
3,3	-13,40466	-7,75469	-1,06767	2,80677
3,4	-14,50060	-9,15044	-1,91201	2,65895
3,5	-15,51959	-10,65224	-2,90128	2,41954
3,6	-16,42200	-12,25045	-4,04566	2,07352
3,7	-17,16206	-13,93121	-5,35412	1,60494
3,8	-17,68738	-15,67569	-6,83401	0,99598
3,9	-17,93874	-17,45953	-8,49055	0,23225
4,0	-17,84988	-19,25209	-10,32620	-0,70708
4,1	-17,34740	-21,01572	-12,34000	-1,83892
4,2	-16,35074	-22,70508	-14,52686	-3,18084
4,3	-14,77248	-24,26646	-16,87674	-4,74971
4,4	-12,51866	-25,63705	-19,37376	-6,56109
4,5	-9,48947	-26,74434	-21,99536	-8,62861
4,6	-5,58017	-27,50562	-24,71109	-10,96328
4,7	-0,68225	-27,82742	-27,48181	-13,57264
4,8	5,31494	-27,60542	-30,25844	-16,45981
4,9	12,52229	-26,72411	-32,98090	-19,62250
5,0	21,04843	-25,05701	-35,57704	-23,05176
5,1	30,99695	-22,46703	-37,96153	-26,73083
5,2	42,46286	-18,80707	-40,03477	-30,63367
5,3	55,52875	-13,92115	-41,68205	-34,72356
5,4	70,26004	-7,64583	-42,77269	-38,95151
5,5	86,69986	0,18776	-43,15929	-43,25461
5,6	104,86311	9,75149	-42,67741	-47,55434
5,7	124,72997	21,21712	-41,14558	-51,75505
5,8	146,23854	34,75215	-38,36505	-55,74184
5,9	169,27682	50,51569	-34,12090	-59,37926
6,0	193,67418	68,65266	-28,18283	-62,50952
6,1	219,19243	89,28773	-20,30711	-64,95117
6,2	245,51564	112,51785	-10,23885	-66,49780
6,3	272,23999	138,40381	2,28489	-66,91705
6,4	298,86401	166,96228	17,53091	-65,95013
6,5	324,77710	198,15283	35,76495	-63,31128
6,6	349,24854	231,86938	57,24554	-58,68893
6,7	371,41870	267,92554	82,21671	-51,74588
6,8	390,28784	306,04272	110,89922	-42,12189

Продолжение табл. 4.3

1	2	3	4	5
6,9	404,70801	345,83472	143,48083	-29,43616
7,0	413,37549	386,79248	180,10474	-13,29114
7,1	414,82495	428,26880	220,85645	6,72223
7,2	407,42651	469,46216	265,74878	31,01801
7,3	389,38501	509,39917	314,70654	60,00739
7,4	358,74194	546,91895	367,54785	94,08862
7,5	313,38550	580,65698	423,96387	133,63586
7,6	251,06020	609,03027	483,50000	178,98505
7,7	169,38672	630,22388	545,53052	230,41870
7,8	65,88669	642,17993	609,23657	288,14673
7,9	-61,98471	642,58887	673,58105	352,28662
8,0	-216,79695	628,88525	737,28345	422,84106
8,1	-401,09277	598,24707	798,79321	499,66992
8,2	-617,32666	547,60229	856,26563	582,46436
8,3	-867,79053	473,64087	907,53613	670,71558
8,4	-1154,52612	372,83569	950,09888	763,68091
8,5	-1479,22705	241,47119	981,08472	860,34912
8,6	-1843,12061	75,68481	997,24512	959,40259
8,7	-2246,84375	-128,47961	994,94214	1059,18164
8,8	-2690,28833	-375,00635	970,13770	1157,64063
8,9	-3172,44678	-667,82544	918,39771	1252,31055
9,0	-3691,23755	-1010,71460	834,90405	1340,26074
9,1	-4243,29688	-1407,17871	714,46948	1418,05859
9,2	-4823,79688	-1860,31860	551,57959	1481,73828
9,3	-5426,19922	-2372,66406	340,43384	1526,76660
9,4	-6042,03516	-2946,00195	75,01526	1548,01563
9,5	-6660,67188	-3581,16016	-250,82520	1539,75488
9,6	-7269,05469	-4277,78906	-643,26343	1495,63184
9,7	-7851,46484	-5034,10156	-1108,36987	1408,68066
9,8	-8389,27734	-5846,58984	-1651,95313	1271,34277
9,9	-8860,73047	-6709,73438	-2279,37109	1075,49707
10,0	-9240,71875	-7615,67969	-2995,32227	812,51858

**Пример 4.1.** Расчет балки на упругом основании.

*Задание:* Для заданной балки (рис. 4.5, а) построить эпюры прогибов  $v$ , реакции основания  $q_R$ , углов поворота сечения  $\vartheta$ , изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ .

*Исходные данные:* модуль упругости материала балки  $E = 1 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$ ; поперечное сечение балки  $b \times h = 30 \times 30 \text{ см}$ ; коэффициент постели  $k = 50 \text{ Н/см}^3$ , внешняя нагрузка  $q = 150 \text{ Н/см}$ ,  $F = 35 \text{ кН}$ ,  $M = 17 \text{ кН} \cdot \text{см}$ .

*Решение:*

Вычислим параметр  $\alpha$ :

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_0}{4EI_z}} = \sqrt[4]{\frac{1500 \text{ Н/см}^2}{4 \cdot 1 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2 \cdot 67500 \text{ см}^4}} = 0,00863 \text{ см}^{-1},$$

где  $k_0 = kb = 50 \text{ Н/см}^3 \cdot 30 \text{ см} = 1500 \text{ Н/см}^2$ ;

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \text{ см} \cdot (30 \text{ см})^3}{12} = 67500 \text{ см}^4.$$

Из граничных условий на левом конце балки при  $x = 0$  (табл. 4.2) имеем:  $M_0 = 0$ ;  $Q_0 = 0$ .

Неизвестные начальные параметры  $v_0$  и  $Q_0$  найдем из граничных условий на правом конце балки при  $x=4\text{м}$  (табл. 4.2):  $M_\ell = 0$ ,  $Q_\ell = 0$ , приравняв к нулю уравнения (4.16) и (4.17) при  $\xi = 400 \alpha = 3,533$ .

Но сначала для удобства решения, используя табл. 4.3, определим функции А.Н. Крылова и сведем их в табл. 4.4.

Таблица 4.4

**Функции А.Н.Крылова**

$x$	$\xi = \alpha x$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
0	0	1	0	0	0
100	0,863	0,9059826	0,8465675	0,3711513	0,1078185
200	1,726	-0,4566347	1,2176038	1,3444041	0,8234602
250	2,158	-2,4378684	0,6352206	1,7740836	1,5046506
300	2,589	-5,711457	-1,070045	1,734066	2,288776
350	3,021	-10,2072216	-4,4696096	0,6068324	2,8446054
400	3,452	-15,0406647	-9,946394	-2,4363231	2,5320627

Безразмерные координаты точек приложения внешней нагрузки:

$$\xi_M = \alpha \cdot 200 \text{ см} = 1,726,$$

$$\xi_F = \alpha \cdot 300 \text{ см} = 2,589,$$

$$\xi_q'' = \alpha \cdot 0 = 0,$$

$$\xi_q^k = \alpha \cdot 200 \text{ см} = 1,726.$$

Таким образом, используя функции А.Н. Крылова и учитывая всю внешнюю нагрузку, получим:

$$\begin{aligned}
M(3,452) &= \frac{v_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(3,452) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^3} Y_4(3,452) + M Y_1(3,452 - 1,726) - \\
&- \frac{F}{\alpha} Y_2(3,452 - 2,589) + \frac{q}{\alpha^2} (-Y_3(3,452 - 0) + Y_3(3,452 - 1,726)) = \\
&= \frac{v_0 \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} \cdot (-2,4363231) + \frac{\vartheta_0 \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^3} \cdot 2,5320627 + \\
&+ 17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot (-0,4566347) - \frac{35 \cdot 10^3 \text{ Н}}{0,00863 \text{ см}^{-1}} \cdot 0,8465675 + \frac{150 \text{ Н/см}}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} \cdot \\
&\cdot (2,4363231 + 1,3444041) = -4,90687 \cdot 10^7 v_0 + 5,90926 \cdot 10^9 \vartheta_0 + 4173441 = 0 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(3,452) &= \frac{v_0 k_0}{\alpha} Y_2(3,452) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(3,452) - 4 M \alpha Y_4(3,452 - 1,726) - \\
&- F Y_1(3,452 - 2,589) + \frac{q}{\alpha} (-Y_2(3,452 - 0) + Y_2(3,452 - 1,726)) = \frac{v_0 \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{0,00863 \text{ см}^{-1}} \cdot \\
&\cdot (-9,946394) + \frac{\vartheta_0 \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} (-2,4363231) - 4 \cdot 17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} \cdot \\
&\cdot 0,8234602 - 35 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 0,9059826 + \frac{150 \text{ Н/см}}{0,00863 \text{ см}^{-1}} (9,946394 + 1,2176038) = \\
&= -1,7288 \cdot 10^6 v_0 - 4,90687 \cdot 10^7 \vartheta_0 + 161851,36 = 0 ,
\end{aligned}$$

где

$$\xi_M = \alpha \cdot 200 \text{ см} = 1,726;$$

$$\xi_F = \alpha \cdot 300 \text{ см} = 2,589 ;$$

$$\xi_q'' = \alpha \cdot 0 = 0;$$

$$\xi_q^k = \alpha \cdot 200 \text{ см} = 1,726 .$$

Решив полученную систему уравнений

$$\begin{cases} -4,90687 \cdot 10^7 v_0 + 5,90926 \cdot 10^9 \vartheta_0 + 4173441 = 0 \\ -1,7288 \cdot 10^6 v_0 - 4,90687 \cdot 10^7 \vartheta_0 + 161851,36 = 0 \end{cases} ,$$

получим искомые начальные параметры:

$$v_0 = 0,09222 \text{ см} \quad \vartheta_0 = 0,00006 \text{ рад}.$$

Для построения эпюр  $v$ ,  $q_R$ ,  $\vartheta$ ,  $M$  и  $Q$  определим их значения на границах участков.

При  $x = 0 \rightarrow \xi = \alpha x = 0$ .

$$v(0) = v_0 Y_1(0) + \frac{\vartheta_0}{\alpha} Y_2(0) = 0,09222 \text{ см} \cdot 1 = 0,09222 \text{ см} ;$$

$$q_R(0) = -k_0 v(0) = -1500 \text{ Н/см}^2 \cdot 0,09222 \text{ см} = -138,4 \text{ Н/см} ;$$

$$\vartheta(0) = -4 v_0 \alpha Y_4(0) + \vartheta_0 Y_1(0) = 0,00006 \text{ рад} \cdot 1 = 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ;$$

$$M(0) = \frac{v_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(0) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^3} Y_4(0) = 0;$$

$$Q(0) = \frac{v_0 k_0}{\alpha^2} Y_2(0) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(0) = 0.$$

При  $x = 200 \text{ см} \rightarrow \xi = \alpha x = 1,726$ .

$$\begin{aligned} v(1,726) &= v_0 Y_1(1,726) + \frac{\vartheta_0}{\alpha} Y_2(1,726) + \frac{1}{k_0} [q(1 - Y_1(1,726 - 0))] = \\ &= 0,09222 \text{ см} \cdot (-0,4566347) + \frac{0,00006 \text{ рад}}{0,00863 \text{ см}^{-1}} \cdot 1,2176038 + \\ &+ \frac{1}{1500 \text{ Н/см}^2} \left[ 150 \frac{\text{Н}}{\text{см}} (1 + 0,4566347) \right] = 0,112 \text{ см}; \end{aligned}$$

$$q_R(1,726) = -k_0 v(1,726) = -1500 \text{ Н/см}^2 \cdot 0,112 \text{ см} = -168 \text{ Н/см} .$$

$$\begin{aligned} \vartheta(1,726) &= -4 v_0 \alpha Y_4(1,726) + \vartheta_0 Y_1(1,726) + \frac{4}{k_0} [-q \alpha (-Y_4(1,726 - 0))] = \\ &= -4 \cdot 0,09222 \text{ см} \cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} \cdot 0,8234602 + 0,00006 \text{ рад} \cdot (-0,4566347) + \\ &+ \frac{4}{1500 \text{ Н/см}^2} \left[ -150 \frac{\text{Н}}{\text{см}} \cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} \cdot (-0,8234602) \right] = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ рад} . \end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом сечении приложен момент  $M = 17 \text{ кН} \cdot \text{см}$ , то следует рассчитать значения на эпюре слева и справа от  $M$ .

$$\begin{aligned} M(1,726)^{лев} &= \frac{v_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(1,726) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^3} Y_4(1,726) + \frac{q}{\alpha^2} (-Y_3(1,726 - 0)) = \\ &= \frac{0,09222 \text{ см} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{\left( 0,00863 \text{ см}^{-1} \right)^2} \cdot 1,3444041 + \frac{0,00006 \text{ рад} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{\left( 0,00863 \text{ см}^{-1} \right)^3} \cdot 0,8234602 + \\ &+ \frac{150 \text{ Н/см}}{\left( 0,00863 \text{ см}^{-1} \right)^2} (-1,3444041) = -95352 \text{ Н} \cdot \text{см}; \end{aligned}$$

$$M(1,726)^{\text{np}} = M(1,726)^{\text{лсв}} + M = -78352 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$\begin{aligned} Q(1,726) &= \frac{v_0 k_0}{\alpha} Y_2(1,726) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(1,726) + \frac{q}{\alpha} (-Y_2(1,726)) = \\ &= \frac{0,09222 \text{ см} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{0,00863 \text{ см}^{-1}} 1,2176038 + \frac{0,00006 \text{ рад} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} 1,344041 + \\ &+ \frac{150 \text{ Н/см}}{0,00863 \text{ см}^{-1}} (-1,2176038) = -21,9 \text{ Н}. \end{aligned}$$

При  $x = 300 \text{ см} \rightarrow \xi = \alpha x = 2,589$ .

$$\begin{aligned} v(2,589) &= v_0 Y_1(2,589) + \frac{\vartheta_0}{\alpha} Y_2(2,589) + \frac{1}{k_0} [-4M\alpha^2 Y_3(2,589 - 1,726) + \\ &+ q((1 - Y_1(2,589 - 0)) + (-1 + Y_1(2,589 - 1,726)))] = \\ &= 0,09222 \text{ см} \cdot (-5,711457) + \frac{0,00006 \text{ рад}}{0,00863 \text{ см}^{-1}} \cdot (-1,070045) + \frac{1}{1500 \text{ Н/см}^2} \cdot \\ &\cdot [-4 \cdot 17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot (0,00863 \text{ см}^{-1})^2 \cdot 0,3711513 + 150 \text{ Н/см} (1 + 5,71145 - \\ &- 1 + 0,9059826)] = 0,126 \text{ см}; \\ q_R(2,589) &= -k_0 v(2,589) = -189 \text{ Н/см}; \\ \vartheta(2,589) &= -4v_0 \alpha Y_4(2,589) + \vartheta_0 Y_1(2,589) + \frac{4}{k_0} [-M\alpha^3 Y_2(2,589 - 1,726) - \\ &- q\alpha(-Y_4(2,589 - 0) + Y_4(2,589 - 1,726))] = -4 \cdot 0,09222 \text{ см} \cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} \cdot \\ &\cdot 2,288776 + 0,0006 \text{ рад} \cdot (-5,711457) + \frac{4}{1500 \text{ Н/см}^2} [-17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot \\ &\cdot (0,00863 \text{ см}^{-1})^3 \cdot 0,8465675 - 150 \text{ Н/см} \cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} (-2,288776 + 0,1078185)] = \\ &= -0,00012 \text{ рад} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(2,589) &= \frac{v_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(2,589) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^3} Y_4(2,589) + M Y_1(2,589 - 1,726) + \\ &+ \frac{q}{\alpha^2} (-Y_3(2,589 - 0) + Y_3(2,589 - 1,726)) = \frac{0,09222 \text{ см} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} \cdot 1,734066 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{0,00006 \text{ рад} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^3} \cdot 2,288776 + 17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot 0,9059826 +$$

$$+ \frac{150 \text{ Н/см}}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} \cdot (-1,734066 + 0,3711513) = 811691 \text{ Н} \cdot \text{см} .$$

Поскольку в рассматриваемом сечении приложена сосредоточенная сила  $F = 35 \text{ кН}$ , то следует рассчитать значения на эпюре слева и справа от  $F$ .

$$Q(2,589)_{\text{лев}} = \frac{v_0 k_0}{\alpha} Y_2(2,589) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(2,589) - 4 M \alpha Y_4(2,589 - 1,726) +$$

$$+ \frac{q}{\alpha} (-Y_2(2,589 - 0) + Y_2(2,589 - 1,726)) = \frac{0,0922 \cdot 2 \text{ см} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{0,00863 \text{ см}^{-1}} \cdot$$

$$\cdot (-1,070045) + \frac{0,00006 \text{ рад} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} \cdot 1,734066 - 4 \cdot 17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot$$

$$\cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} \cdot 0,1078185 + \frac{150 \text{ Н/см}}{0,00863 \text{ см}^{-1}} (1,070045 + 0,8465675) = 1819 \text{ Н};$$

$$Q(2,589)_{\text{пр}} = Q(2,589)_{\text{лев}} - F = 1819 \text{ Н} - 35000 \text{ Н} = -16807 \text{ Н} .$$

При  $x = 400 \text{ см} \rightarrow \xi = \alpha x = 3,452$  .

$$v(3,452) = v_0 Y_1(3,452) + \frac{\vartheta_0}{\alpha} Y_2(3,452) + \frac{1}{k_0} [-4 M \alpha^2 Y_3(3,452 - 1,726) +$$

$$+ 4 F \alpha \cdot Y_4(3,452 - 2,589) + q((1 - Y_1(3,452)) + (-1 + Y_1(3,452 - 1,726)))] =$$

$$= 0,09222 \text{ см} \cdot (-15,0406647) + \frac{0,00006 \text{ рад}}{0,00863 \text{ см}^{-1}} (-9,946394) + \frac{1}{1500 \text{ Н/см}^2} \cdot$$

$$\cdot [-4 \cdot 17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot (0,00863 \text{ см}^{-1})^2 \cdot 1,3444041 + 4 \cdot 35 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} \cdot$$

$$\cdot 0,1078185 + 150 \text{ Н/см} (1 + 15,0406647 - 1 - 0,4566347)] = 0,085 \text{ см};$$

$$q_R(3,452) = -k_0 v(3,452) = -1500 \text{ Н/см}^2 \cdot (0,085 \text{ см}) = -127,5 \text{ Н/см} ;$$

$$\begin{aligned}
\vartheta(3,452) &= -4 v_0 \alpha Y_4(3,452) + \vartheta_0 Y_1(3,452) + \frac{4}{k_0} [-M \alpha Y_2(3,452 - 1,726) + \\
&+ F \alpha^2 Y_3(3,452 - 2,589) - q \alpha (-Y_4(3,452) + Y_4(3,452 - 1,726))] = \\
&= -4 \cdot 0,09222 \text{ см} \cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} \cdot 2,5230627 + 0,00006 \text{ рад} \cdot (-15,0406647) + \\
&+ \frac{4}{1500 \text{ Н/см}^2} \cdot \left[ -17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot (0,00863 \text{ см}^{-1})^3 \cdot 1,2176038 + 35 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \right. \\
&\cdot (0,00863 \text{ см}^{-1})^2 \cdot 0,3711513 - 150 \frac{\text{Н}}{\text{см}} \cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} \cdot (-2,5320627 + 0,8234602) \left. \right] = \\
&= -0,00052 \text{ рад};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(3,452) &= \frac{v_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(3,452) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^3} Y_4(3,452) + M Y_1(3,452 - 1,726) - \\
&- \frac{F}{\alpha} Y_2(3,452 - 2,589) + \frac{q}{\alpha^2} (-Y_3(3,452) + Y_3(3,452 - 1,726)) = \\
&= \frac{0,09222 \text{ см} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} (-2,4363231) + \frac{0,00006 \text{ рад} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^3} \cdot \\
&\cdot 2,5320627 + 17 \cdot 10^3 \text{ Н/см} \cdot (-0,4566347) - \frac{35 \cdot 10^3 \text{ Н}}{0,00863 \text{ см}^{-1}} \cdot 0,8465675 + \\
&+ \frac{150 \text{ Н/см}}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} (2,4363231 + 1,3444041) = 2885 \text{ Н} \cdot \text{см};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(3,452) &= \frac{v_0 k_0}{\alpha} Y_2(3,452) + \frac{\vartheta_0 k_0}{\alpha^2} Y_3(3,452) - 4 M \alpha Y_4(3,452 - 1,726) - \\
&- F Y_1(3,452 - 2,589) + \frac{q}{\alpha} (-Y_2(3,452) + Y_2(3,452 - 1,726)) = \\
&= \frac{0,09222 \text{ см} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{0,00863 \text{ см}^{-1}} \cdot (-9,946394) + \frac{0,00006 \text{ рад} \cdot 1500 \text{ Н/см}^2}{(0,00863 \text{ см}^{-1})^2} \cdot \\
&\cdot (-2,4363231) - 4 \cdot 17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot 0,00863 \text{ см}^{-1} \cdot 0,8234602 - 35 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \\
&0,9059826 + \frac{150 \text{ Н/см}}{0,00863 \text{ см}^{-1}} (9,946394 + 1,2176038) = -523,2 \text{ Н}.
\end{aligned}$$

Аналогично следует просчитать значения  $v$ ,  $q$ ,  $\vartheta$ ,  $M$  и  $Q$  в середине каждого участка для получения более полной картины. По результатам расчета на рис. 4.5, б–е построены эпюры.

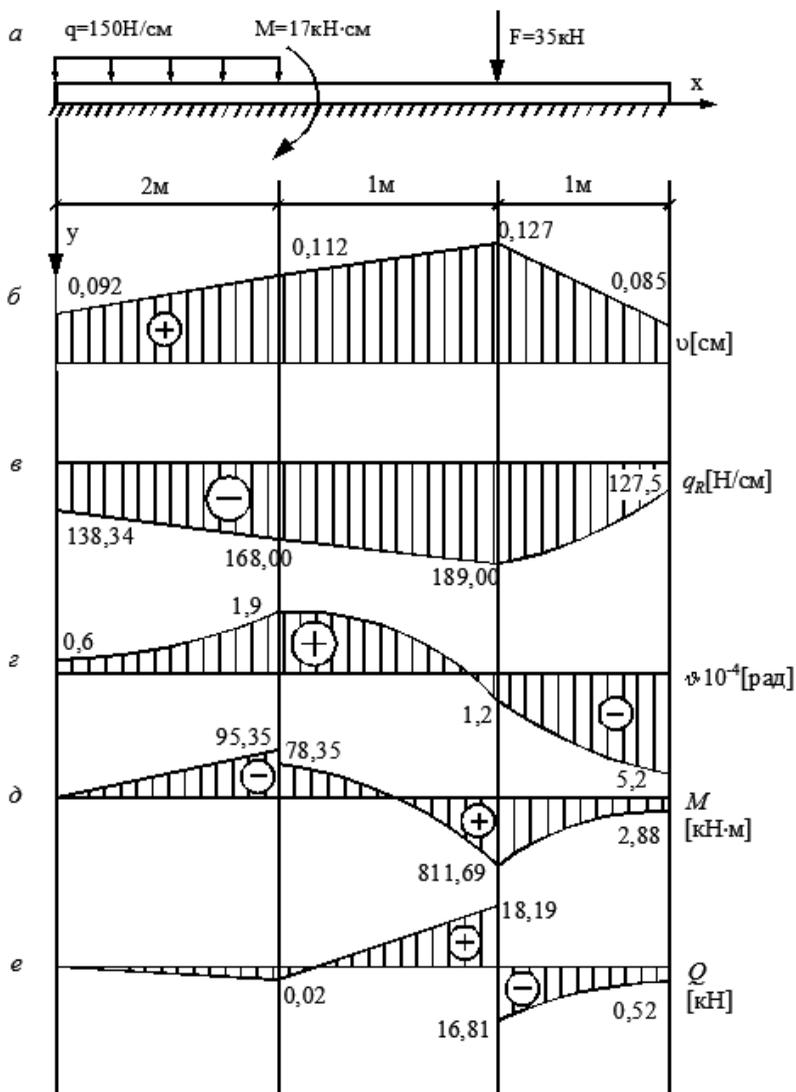


Рис. 4.5. Балка на упругом основании:

$a$  – схема балки,  $b$  – эпюра прогибов,  $в$  – эпюра реакции основания,  $г$  – эпюра углов поворота сечений,  $д$  – эпюра изгибающих моментов,  $е$  – эпюра поперечных сил.

## 5. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 5.1. Особенности расчетов элементов конструкций на прочность и жесткость при сложном сопротивлении

**Сложным сопротивлением (сложной деформацией)** называется такой вид деформации бруса, при котором в поперечных сечениях одновременно отличны от нуля не менее двух внутренних усилий.

Расчеты на прочность и жесткость бруса при сложном сопротивлении в пределах действия закона Гука производятся обычно, основываясь на принципе независимости действия сил (принцип суперпозиции). При этом каждый из простых видов сопротивления (растяжение-сжатие, сдвиг, изгиб, кручение), создающих в совокупности сложное сопротивление, рассматривают независимо от остальных. Полные же напряжения и перемещения, возникающие в рассматриваемом элементе, определяют путем геометрического сложения напряжений и перемещений, соответствующих простым видам сопротивления.

Расчеты на прочность выполняются в следующем порядке:

- а) строятся эпюры всех внутренних усилий (в большинстве случаев поперечные силы не учитываются);
- б) по эпюрам определяется опасное сечение (с наиболее неблагоприятным сочетанием внутренних усилий);
- в) в опасном сечении находят опасную точку (с наиболее неблагоприятным сочетанием напряжений);
- г) для опасной точки составляется условие прочности, которое может использоваться, как для проверочных или проектировочных расчетов, так и для определения допускаемой нагрузки.

Если в опасной точке имеет место линейное напряженное состояние, то оценку прочности проводят по условию  $\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}$ . Здесь  $\sigma_{max}$  представляет собой алгебраическую сумму напряжений от всех простых видов сопротивления. При более сложном напряженном состоянии (плоском или объемном) условие прочности принимают по соответствующей теории (гипотезе) прочности.

Рассмотрим некоторые виды сложного сопротивления.

### 5.2. Косой изгиб

**Косым изгибом** называется деформация бруса, при которой все нагрузки действуют в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей. Если при этом возникают и поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ ,

то их влиянием на прочность и жесткость при расчете длинных брус-ев обычно пренебрегают ввиду их малости.

Брус находится в условиях косо́го изгиба при приложении к нему нагрузки в двух главных плоскостях инерции (рис. 5.1, а) или, когда нагрузка действует в одной плоскости (**силовая плоскость**), содержащей ось бруса, но не совпадающей ни с одной из главных плоскостей инерции (рис. 5.1, б). Такой вид загрузки также называют **сложным изгибом**, а второй можно свести к первому, раскладывая нагрузку на составляющие, действующие в главных плоскостях инерции.

Косой изгиб можно рассматривать как одновременное действие двух плоских изгибов в главных плоскостях инерции  $xOy$  и  $xOz$ . При этом в поперечных сечения действуют нормальные напряжения, кото-рые можно вычислить по формуле

$$\sigma = \sigma_{(M_z)} + \sigma_{(M_y)} = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z . \quad (5.1)$$

В формуле (5.1) знаки перед слагаемыми принимаются в зависи-мости от того, в какой четверти сечения находится рассматриваемая точка (рис. 5.1, в). Разложим действующий в силовой плоскости сум-марный изгибающий момент  $M_{tot}$  на составляющие  $M_z$  и  $M_y$ , действу-ющие в главных плоскостях инерции

$$M_z = M_{tot} \cos \alpha, \quad M_y = M_{tot} \sin \alpha . \quad (5.2)$$

В рассматриваемом случае моменты представлены в виде векторов по следующему правилу: вектор направляется перпендикулярно к плос-кости действия момента таким образом, чтобы при взгляде с острия вектора момент был направлен против часовой стрелки.

Поскольку при плоских изгибах в главных плоскостях инерции нейтральная линия (**н.л.**) проходит через центр тяжести сечения, то и при косом изгибе она должна проходить через эту же точку. Так как эта линия делит сечение на зоны растяжения и сжатия, то нейтральная линия не проходит через четверти сечения, в которых расположен след силовой плоскости (**с.с.п.** на рис. 5.1, в). Тогда для произвольной точки  $K$ , принадлежащей нейтральной линии, по формуле (5.1), с учетом выражений (5.2), при  $y = y_K$  и  $z = -z_K$  получаем

$$\sigma = M_{tot} \left( \frac{\cos \alpha}{I_z} y_K - \frac{\sin \alpha}{I_y} (-z_K) \right) = 0 .$$

Поскольку  $M_{tot} \neq 0$ , то  $\frac{\cos \alpha}{I_z} y_K + \frac{\sin \alpha}{I_y} z_K = 0$ . Тогда  $\frac{y_K}{z_K} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{I_z}{I_y}$

или

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y} = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} . \quad (5.3)$$

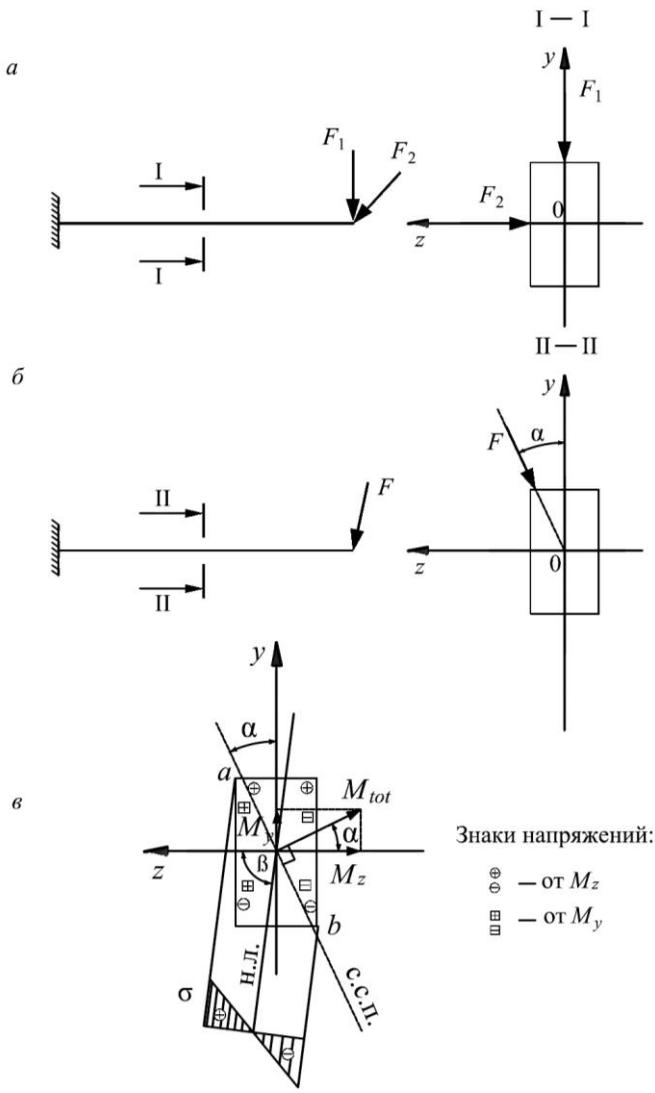


Рис. 5.1. Косой изгиб:

*a* - при нагрузке в двух главных плоскостях инерции, *б* - при нагрузке в одной плоскости, *в* - напряжения в поперечном сечении

Формула (5.3) используется для построения нейтральной линии. При этом угол  $\beta$  откладывается от оси  $z$  в ту же сторону, что и угол  $\alpha$  от оси  $y$ . Если  $I_z \neq I_y$ , то  $\text{tg } \beta \neq -\text{tg } \alpha$ . Следовательно, нейтральная линия не перпендикулярна следу силовой плоскости, как при плоскоизгибе. Для сечений, у которых  $I_z = I_y$  (круг, квадрат и т.п.),  $\beta = \alpha$  и косою изгиб не имеет места.

Как и при плоском изгибе, величина нормальных напряжений при косом изгибе прямо пропорциональна расстоянию от нейтральной линии. Опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной линии (точки  $a$  и  $b$  на рис. 5.1,  $\epsilon$ ). Для определения их положения проводятся две касательных к сечению параллельно нейтральной линии.

Условие прочности при косом изгибе имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\text{оп}} + \frac{M_y}{I_y} z_{\text{оп}} \leq \sigma_{\text{adm}}, \quad (5.4)$$

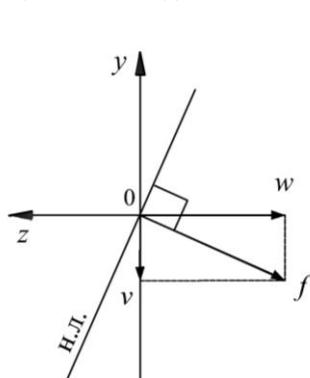
где  $y_{\text{оп}}$  и  $z_{\text{оп}}$  - координаты опасной точки, а  $M_z$  и  $M_y$  - изгибающие моменты в опасном сечении.

Для хрупких материалов выражение (5.4) рассматривается отдельно для опасных точек с наибольшими растягивающими и наибольшими сжимающими напряжениями.

Для сечений с двумя осями симметрии опасными являются точки одновременно наиболее удаленны от этих осей. Тогда условие (5.4) принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{\text{adm}}. \quad (5.5)$$

Перемещения сечений  $f$  находят как геометрическую сумму перемещений  $v$  и  $w$  вдоль главных осей  $y$  и  $z$  (рис. 5.2)



$$f = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

Величины  $v$  и  $w$  можно найти из решения дифференциальных уравнений упругой линии балки:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y}.$$

Нейтральная линия при косом изгибе перпендикулярна вектору  $f$ .

Рис. 5.2. Определение перемещений сечений

**Пример 5.1:** Расчет статически определимой балки прямоугольного поперечного сечения на прочность при косом изгибе.

*Задание:*

1. Для заданной статически определимой балки (рис. 5.3, а) построить эпюры внутренних силовых факторов в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

2. Определить сечение с наиболее невыгодным сочетанием моментов и рассчитать размеры прямоугольного поперечного сечения из условия прочности при косом изгибе, если  $b = a$ ,  $h = 3a$ ,  $\sigma_{adm} = 160$  МПа.

3. Определить положение нейтральной линии при косом изгибе для наиболее опасного сечения.

4. Определить нормальные напряжения в крайних точках наиболее опасного сечения, сделать проверку прочности и построить эпюры нормальных напряжений.

*Решение:*

1. В вертикальной плоскости к балке приложены равномерно-распределенная нагрузка  $q$  и изгибающий момент  $M_e$ . Схема нагружения представлена на рис. 5.3, б.

Опорные реакции:

$$\sum M_A = q \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 8 - M_e = 0 \quad R_B = 8,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -q \cdot 4 \cdot 6 + R_A \cdot 8 - M_e = 0 \quad R_A = 39,75 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y = -q \cdot 4 + R_A + R_B = -12 \cdot 4 + 39,75 + 8,25 = 0$ .

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 2$  м)

$$Q_y = 0;$$

$$M_z = -M_e = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 4$  м)

$$Q_y = -R_B = -8,25 \text{ кН};$$

$$M_z = -R_B \cdot x_2 - M_e \left| \begin{array}{l} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ x_2 = 0 \end{array} \right| = -63 \text{ кН} \cdot \text{м} \left| \begin{array}{l} \\ x_2 = 4 \text{ м} \end{array} \right|.$$

Участок III ( $0 \leq x_3 \leq 4$  м)

$$Q_y = R_A - qx_3 \left| \begin{array}{l} = 39,75 \text{ кН} \\ x_3 = 0 \end{array} \right| = -8,25 \text{ кН} \left| \begin{array}{l} \\ x_3 = 4 \text{ м} \end{array} \right|;$$

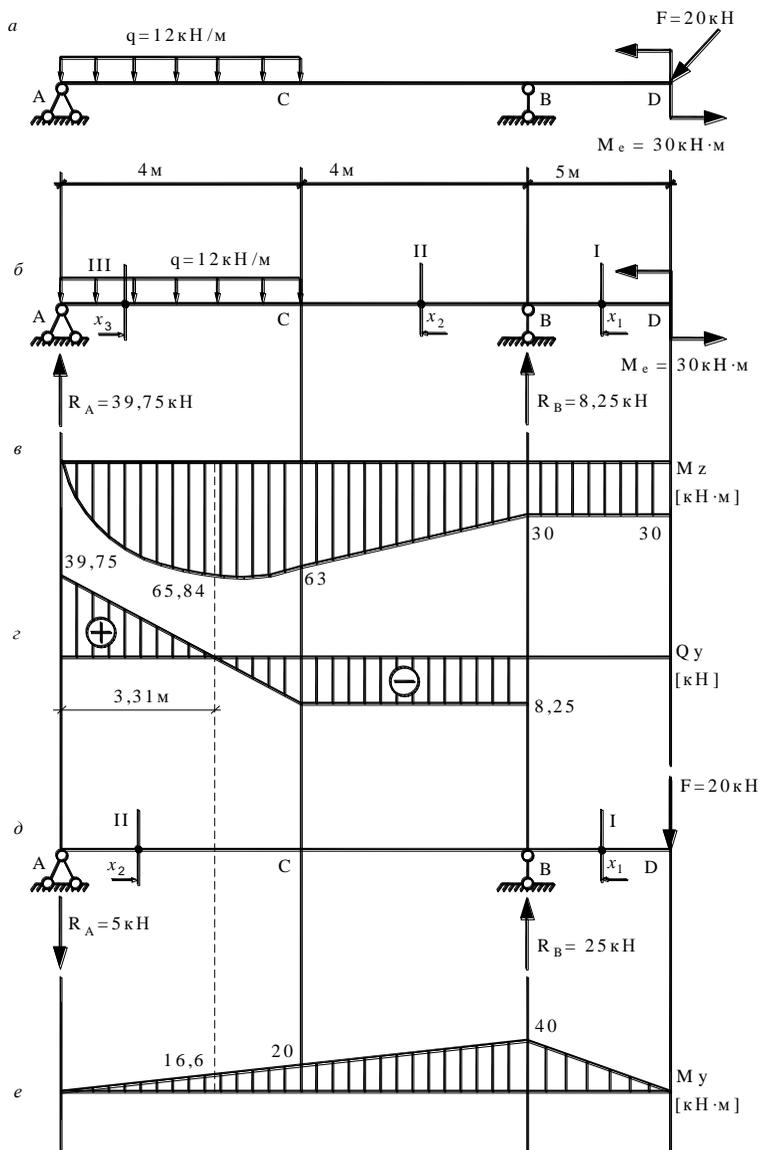


Рис.5.3. К расчету на прочность при косом изгибе:  
 а – расчетная схема балки, б, в, г – схема нагружения и эпюры в вертикальной плоскости, д, е – схема нагружения и эпюра в горизонтальной плоскости

$$M_z = R_A x_3 - qx_3 \frac{x_3}{2} \Big|_{x_3=0}^{x_3=4 \text{ м}} = 63 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Экстремум:

$$Q_y = 0 \quad R_A - qx_3 = 0 \quad x_3 = R_A/q = 39,75/12 = 3,31 \text{ м};$$

$$M_z^{\text{экстр}} = 39,75 \cdot 3,31 - 12 \frac{3,31^2}{2} = 65,84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  представлены на рис. 5.3, в, г.

В горизонтальной плоскости к балке приложена сосредоточенная сила  $F$ . В данной плоскости достаточно построить только эпюру моментов, поскольку не возникает экстремум. Схема нагружения представлена на рис. 5.3, д.

Опорные реакции:

$$\sum M_A = -R_B \cdot 8 + F \cdot 10 = 0 \quad R_B = 25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 8 + F \cdot 2 = 0 \quad R_A = 5 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = -R_A + R_B - F = -5 + 25 - 20 = 0.$$

Участок I ( $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$ )

$$M_y = Fx_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=2 \text{ м}} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II ( $0 \leq x_2 \leq 8 \text{ м}$ )

$$M_y = -R_A \cdot x_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=8 \text{ м}} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра  $M_y$  представлена на рис. 5.3, е.

2. Наиболее невыгодное сочетание моментов наблюдается в сечениях С и В.

**Рассмотрим сечение С.**

$$M_z^c = 63 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_y^c = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Наиболее опасной точкой прямоугольного поперечного сечения является точка 1, поскольку в ней возникают наибольшие нормальные напряжения

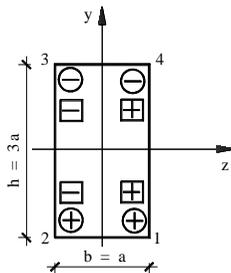


Рис. 5.4. Прямоугольное поперечное сечение

(рис. 5.4). Ее координаты:  $z_1 = 0,5a$  ,  $y_1 = -1,5a$  .

Моменты инерции сечения:

$$I_z = \frac{a(3a)^3}{12} = 2,25 a^4 ; \quad I_y = \frac{3a \cdot a^3}{12} = 0,25 a^4 .$$

Размеры поперечного сечения определяем из условия прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^c}{I_z} |y_1| + \frac{M_y^c}{I_y} |z_1| \leq \sigma_{adm}$$

$$\frac{63 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2,25 a^4} 1,5a + \frac{20 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{0,25 a^4} 0,5a \leq 16000 \text{ Н/см}^2$$

$$\frac{1}{a^3} (8,2 \cdot 10^6) \leq 16000$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{8,2 \cdot 10^6}{16000}} = 8 \text{ см.}$$

**Рассмотрим сечение В.**

$$M_z^B = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_y^B = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Здесь наиболее опасной является также точка 1, поэтому ее координаты и моменты инерции не меняются.

Размеры поперечного сечения определяем из условия прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^B}{I_z} |y_1| + \frac{M_y^B}{I_y} |z_1| \leq \sigma_{adm}$$

$$\frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2,25 a^4} 1,5a + \frac{40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{0,25 a^4} 0,5a \leq 16000 \text{ Н/см}^2$$

$$\frac{1}{a^3} (10 \cdot 10^6) \leq 16000$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 10^6}{16000}} = 8,5 \text{ см.}$$

Наиболее невыгодным будем считать сочетание моментов в сечении В, поскольку здесь размер «а» получился наибольшим. Тогда размеры поперечного сечения балки:

$$b = a = 8,5 \text{ см}, \quad h = 3a = 3 \cdot 8,5 \text{ см} = 25,5 \text{ см} .$$

Моменты инерции поперечного сечения:

$$I_z = 2,25 a^4 = 2,25 \cdot 8,5^4 = 11745 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 0,25 a^4 = 0,25 \cdot 8,5^4 = 1305 \text{ см}^4.$$

3. Положение нейтральной линии:

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{30 \text{ кН} \cdot \text{м}} \cdot \frac{11745 \text{ см}^4}{1305 \text{ см}^4} = 12 \rightarrow \beta = 85,2^\circ$$

Угол  $\beta$  откладываем от оси  $z$  таким образом, чтобы нейтральная линия проходила через знакопеременные четверти, то есть через первую и третью (рис. 5.5).

4. Напряжения в крайних точках сечения:

$$\sigma_1 = \frac{M_z}{I_z} |y_1| + \frac{M_y}{I_y} |z_1| = \frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{11745 \text{ см}^4} 1,5 \cdot 8,5 \text{ см} +$$

$$+ \frac{40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{1305 \text{ см}^4} 0,5 \cdot 8,5 \text{ см} = 16284 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 162,84 \text{ МПа} > \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$$

Перенапряжение составляет  $\frac{162,84 - 160}{160} 100\% = 1,8\% < 5\%$ , прочность обеспечена.

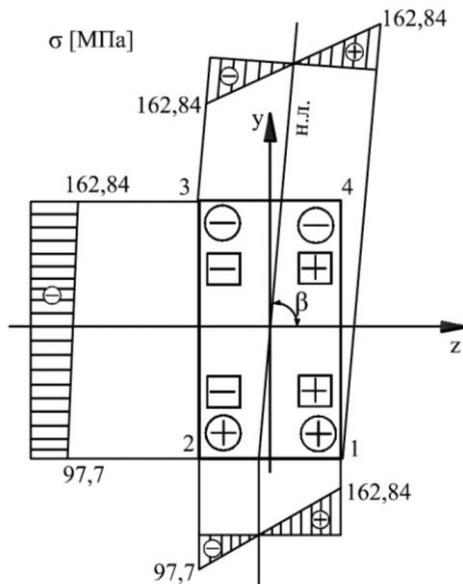


Рис. 5.5. Эпюры нормальных напряжений

$$\sigma_2 = \frac{M_z}{I_z} |y_2| - \frac{M_y}{I_y} |z_2| = \frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{11745 \text{ см}^4} 1,5 \cdot 8,5 \text{ см} -$$

$$- \frac{40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{1305 \text{ см}^4} 0,5 \cdot 8,5 \text{ см} = -9770 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = -97,7 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = - \frac{M_z}{I_z} |y_3| - \frac{M_y}{I_y} |z_3| = - \frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{11745 \text{ см}^4} 1,5 \cdot 8,5 \text{ см} -$$

$$- \frac{40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{1305 \text{ см}^4} 0,5 \cdot 8,5 \text{ см} = -16284 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = -162,84 \text{ МПа}$$

$$\sigma_4 = - \frac{M_z}{I_z} |y_4| + \frac{M_y}{I_y} |z_4| = - \frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{11745 \text{ см}^4} 1,5 \cdot 8,5 \text{ см} +$$

$$+ \frac{40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{1305 \text{ см}^4} 0,5 \cdot 8,5 \text{ см} = 9770 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 97,7 \text{ МПа} .$$

Эпюры нормальных напряжений представлены на рис. 5.5.

**Пример 5.2.** Расчет статически определимой балки двутаврового поперечного сечения на прочность при косом изгибе.

*Задание:*

1. Подобрать двутавровое поперечное сечение для балки, рассмотренной в примере 5.1.
2. Определить положение нейтральной линии при косом изгибе для наиболее опасного сечения.
3. Определить нормальные напряжения в крайних точках наиболее опасного сечения, сделать проверку прочности и построить эпюры нормальных напряжений.

*Решение:*

1. Подбор двутаврового поперечного сечения делается из условия прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{adm} .$$

Выразим момент сопротивления  $w_z$  через коэффициент  $K$ , который для прокатных профилей (двутавров) принимается в пределах  $6 \div 14$ . Примем  $K=10$ , тогда

$$K = \frac{W_z}{W_y} = 10 \rightarrow W_z = KW_y.$$

Условие прочности будет иметь вид:

$$\frac{M_z}{KW_y} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{adm};$$

$$\frac{1}{W_y} \left( \frac{M_z}{K} + M_y \right) \leq \sigma_{adm};$$

$$W_y \geq \frac{M_z/K + M_y}{\sigma_{adm}}.$$

**Рассмотрим сечение С.**

$$W_y \geq \frac{63 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см} / 10 + 20 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{16000 \text{ Н} / \text{см}^2} = 164,4 \text{ см}^3.$$

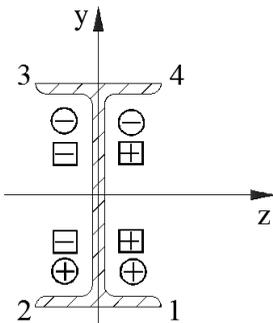


Рис. 5.6. Двутавровое поперечное сечение

По сортаменту принимаем 2 двутавра № 40:

$$W_y = 86,1 \text{ см}^3 > \frac{164,4 \text{ см}^3}{2} = 82,2 \text{ см}^3$$

**Рассмотрим сечение В.**

$$W_y \geq \frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см} / 10 + 40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{16000 \text{ Н} / \text{см}^2} = 268,75 \text{ см}^3$$

По сортаменту принимаем 2 двутавра № 55:

$$W_y = 151 \text{ см}^3 > \frac{268,75 \text{ см}^3}{2} = 134,4 \text{ см}^3.$$

Наиболее невыгодным будем считать сочетание моментов в сечении В, поскольку здесь получился двутавр большего размера.

Таким образом, окончательно принимаем поперечное сечение из 2-х двутавров

№55 со следующими параметрами:  $W_y = 151 \text{ см}^3$ ,  $W_z = 2035 \text{ см}^3$ ,

$$I_z = 55962 \text{ см}^4, I_y = 1356 \text{ см}^4.$$

2. Положение нейтральной линии:

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{30 \text{ кН} \cdot \text{м}} \cdot \frac{55962 \text{ см}^4}{1356 \text{ см}^4} = 55 \rightarrow \beta = 88,96^\circ.$$

Угол  $\beta$  откладываем от оси  $z$  таким образом, чтобы нейтральная линия проходила через знакопеременные четверти, то есть через первую и третью (рис. 5.6).

3. Напряжения в крайних точках сечения:

$$\sigma_1 = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2 \cdot 2035 \text{ см}^4} + \frac{40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2 \cdot 151 \text{ см}^4} = 13982 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 139,82 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}, \text{ прочность обеспечена.}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} = \frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2 \cdot 2035 \text{ см}^4} - \frac{40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2 \cdot 151 \text{ см}^4} = -12508 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = -125,08 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = -\frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2 \cdot 2035 \text{ см}^4} - \frac{40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2 \cdot 151 \text{ см}^4} = -13982 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = -139,82 \text{ МПа}$$

$$\sigma_4 = -\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{30 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2 \cdot 2035 \text{ см}^4} + \frac{40 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{2 \cdot 151 \text{ см}^4} = 12508 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 125,08 \text{ МПа}$$

Эпюры нормальных напряжений представлена на рис. 5.7.

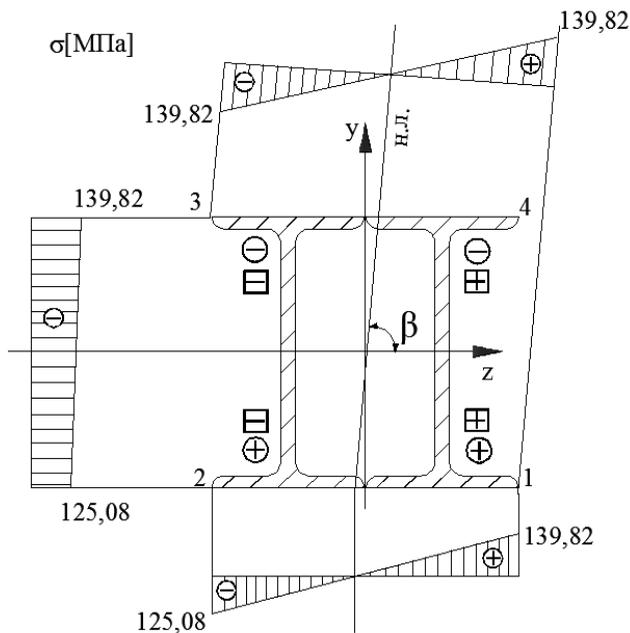


Рис. 5.7. Эпюры нормальных напряжений

### 5.3. Внецентренное растяжение (сжатие)

**Внецентренным растяжением (сжатием)** называется деформация бруса, при которой в поперечных сечениях одновременно отличны от нуля продольная сила  $N$ , а также изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$ . В частном случае один из изгибающих моментов может быть равен нулю. Следовательно, внецентренное растяжение (сжатие) можно рассматривать как сочетание центрального растяжения (сжатия) и двух плоских изгибов в главных плоскостях инерции.

В таких условиях находится, например, брус, когда равнодействующая внешних сил  $F$  параллельна оси бруса, но не совпадает с ней (рис. 5.8). След линии действия равнодействующей в поперечном сечении (точка  $f$ ) называется **полюсом**.

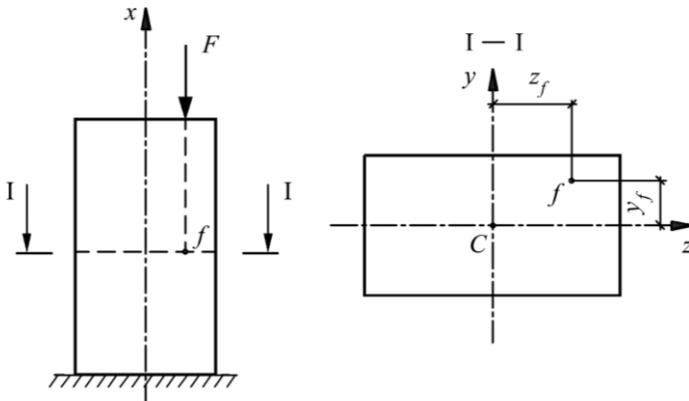


Рис. 5.8. Загрузка бруса при внецентренном растяжении

При переносе равнодействующей внутренних сил  $R = F$  в центр тяжести сечения (рис. 5.9) получаем

$$N = F, \quad M_z = F \cdot y_f, \quad M_y = F \cdot z_f. \quad (5.6)$$

При такой деформации в поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения, которые можно определить по формуле

$$\sigma = \sigma_{(N)} + \sigma_{(M_z)} + \sigma_{(M_y)} = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z. \quad (5.7)$$

А так как  $I_z = i_z^2 \cdot A$ ,  $I_y = i_y^2 \cdot A$ , то с учетом выражений (5.6) получаем

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_f}{i_z^2} y + \frac{z_f}{i_y^2} z \right). \quad (5.8)$$

В формуле (5.8) перед дробью  $\frac{F}{A}$  принимается знак «+», если сила  $F$  растягивающая и знак «-», если - сжимающая.

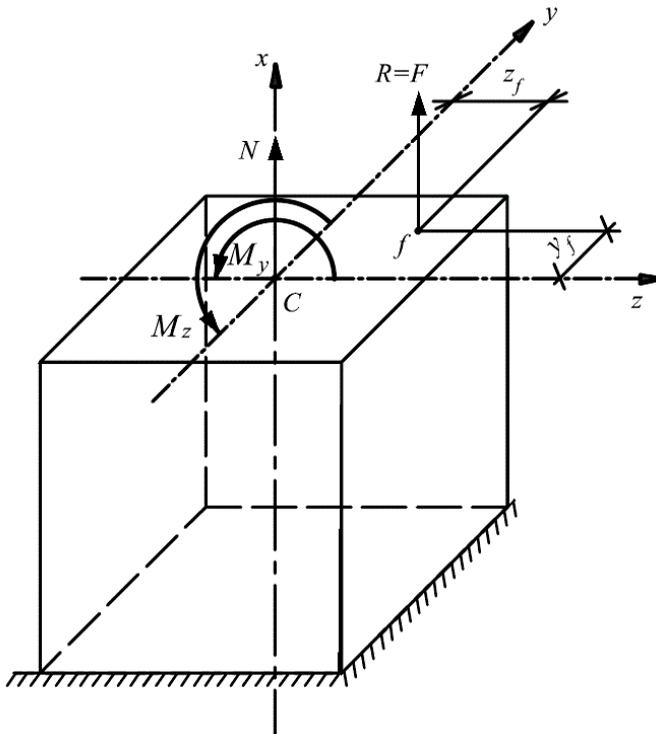


Рис. 5.9. Внутренние усилия при внецентренном растяжении

Приравниваю к нулю выражение (5.8) и учитывая, что  $\frac{F}{A} \neq 0$ , получаем уравнение нейтральной линии

$$\left(1 + \frac{y_f}{i_y^2} y + \frac{z_f}{i_z^2} z\right) = 0. \quad (5.9)$$

Из формулы (5.9) следует, что при внецентренном растяжении (сжатии) нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения. Ее положение определяется отрезками  $a_y$  и  $a_z$ , отсекаемыми нейтральной линией на главных осях инерции сечения (рис. 5.10). Величины этих отрезков определяются из выражения (5.9) при последовательной подстановке в него значений  $z = 0$  и  $y = 0$ :

$$y = a_y = -\frac{i_z^2}{y_f}, \quad z = a_z = -\frac{i_y^2}{z_f}. \quad (5.10)$$

Знаки «-» в формулах (5.10) означают, что нейтральная линия не пересекает ту четверть системы координат, в которой расположен полюс.

Опасными будут точки  $a$  и  $b$ , наиболее удаленные от нейтральной линии (рис. 5.10). А эпюра напряжений  $\sigma$  ограничивается касательными, проведенными к сечению в этих точках.

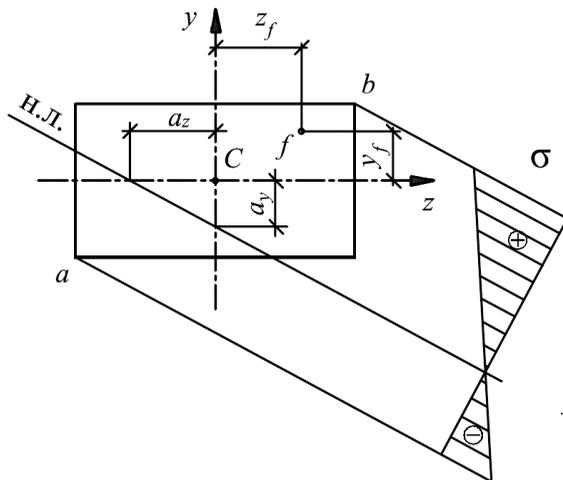


Рис. 5.10. Нейтральная линия, опасные точки и эпюра напряжений в сечении

Условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии) принимается в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_{\text{оп}} + \frac{M_y}{I_y} z_{\text{оп}} \leq \sigma_{\text{adm}}, \quad (5.11)$$

где  $y_{\text{оп}}$  и  $z_{\text{оп}}$  - координаты опасной точки, наиболее удаленной от нейтральной линии.

Для хрупких материалов выражение (5.11) рассматривается отдельно для опасных точек с наибольшими растягивающими и наибольшими сжимающими напряжениями.

Для сечений с двумя осями симметрии условие (5.11) можно использовать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{\text{adm}}. \quad (5.12)$$

Из формул (5.10) следует, что в зависимости от положения полюса нейтральная линия может пересекать сечение, быть касательной к нему или находиться за его пределами. В двух последних случаях по всему сечению действуют напряжения одного и того же знака. Это происходит, если полюс находится в пределах некоторой области сечения, включающей центр тяжести и называемой **ядром сечения**.

Для получения границ ядра сечения необходимо располагать нейтральную линию по касательной в различных точках контура сечения, каждый раз определяя с помощью формул (5.10) соответствующие координаты полюса.

Определим, например, границы ядра сечения для круглого сечения с радиусом  $R$  (рис. 5.11, а). Если нейтральная линия занимает положения 1-1 (параллельно оси  $z$ ), то  $a_y = -R$ ,  $a_z = \infty$ . Тогда  $z_f = 0$ , а, учитывая, что  $i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\pi R^4/4}{\pi R^2} = \frac{R^2}{4}$ , получаем  $y_f = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{R^2/4}{-R} = \frac{R}{4}$ , и полюс находится в точке 1. При положении 2-2 (параллельно оси  $y$ )  $a_y = \infty$ ,  $a_z = R$ . Тогда  $y_f = 0$ , а  $z_f = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{R^2/4}{R} = -\frac{R}{4}$ , и полюс располагается в точке 2. Очевидно, что аналогичные результаты будут получены при других вариантах расположения касательных, а ядро сечения будет представлять собой круг с радиусом  $\frac{R}{4}$ . Если нейтральная линия будет занимать положения 3-3 и 4-4, то полюс будет находиться соответственно в точках 3 и 4.

Подобным же образом определяются границы ядра сечения и для сечений любой формы. Например, для прямоугольного сечения ядро сечения представляет собой симметричный относительно осей координат параллелограмм, длины осей которого равны  $\frac{b}{3}$  и  $\frac{h}{3}$  (рис. 5.11, б).

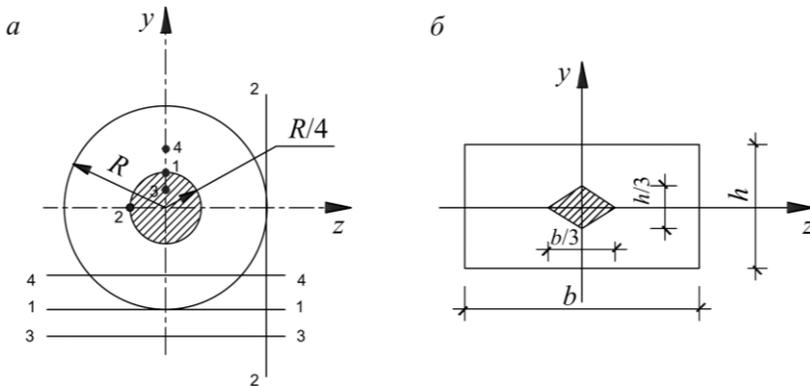


Рис. 5.11. Ядро сечения:  
 $a$  - для круглого сечения,  $b$  - для прямоугольного сечения

Зная границы ядра сечения, можно определить, будут ли напряжения при заданном положении силы  $F$  иметь одинаковые или разные знаки в пределах поперечного сечения бруса. Это важно знать для материалов, не обладающих одинаковой прочностью на растяжение и сжатие. Такими являются, например, бетон, чугун, кирпичная кладка и др.

**Пример 5.3:** Расчет стержней на прочность при внецентренном растяжении (сжатии).

*Задание:* Для короткого чугунного стержня, сжимаемого силой  $F = 100$  кН, приложенной в точке  $f$  требуется (рис. 5.12):

1. Определить положение нейтральной линии;
2. Построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении;
3. Проверить условия прочности, если  $\sigma_{adm}^t = 50$  МПа,  $\sigma_{adm}^c = 150$  МПа;
4. Построить ядро сечения.

*Решение:* Ось симметрии  $z_c$  является одной из главных центральных осей инерции. Вторая ось  $y_c$  перпендикулярна к оси  $z_c$  и проходит через центр тяжести сечения (точка  $C$ ). Для определения положения этой точки проводим вспомогательную ось  $y$  и представляем заданное сечение, как прямоугольник (с центром тяжести в точке  $C_1$ ), имеющий прямоугольный вырез (с центром тяжести в точке  $C_2$ ).

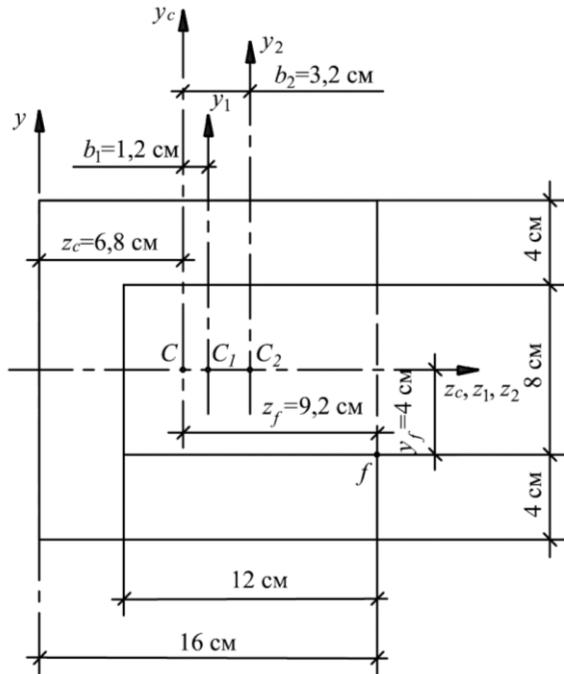


Рис. 5.12. К примеру 5.3

Используя такую разбивку, находим площадь сечения

$$A = 16 \cdot 16 - 12 \cdot 8 = 160 \text{ см}^2$$

и вычисляем статический момент относительно оси  $y$

$$S_y = 16 \cdot 16 \cdot 8 - 12 \cdot 8 \cdot 10 = 1088 \text{ см}^3.$$

Тогда, по формулам (2.2),

$$z_c = \frac{1088}{160} = 6,8 \text{ см}.$$

По формулам (2.13) вычисляем главные моменты инерции сечения

$$I_z = \frac{16 \cdot 16^3}{12} - \frac{12 \cdot 8^3}{12} = 4949 \text{ см}^4;$$

$$I_{yc} = \left( \frac{16^3 \cdot 16}{12} + 16 \cdot 16 \cdot 1,2^2 \right) - \left( \frac{12^3 \cdot 8}{12} + 12 \cdot 8 \cdot 3,2^2 \right) = 3695 \text{ см}^4,$$

а затем – квадраты радиусов инерции

$$i_{zc}^2 = \frac{I_{zc}}{A} = \frac{4949}{160} = 30,9 \text{ см}^2; \quad i_{yc}^2 = \frac{I_{yc}}{A} = \frac{3695}{160} = 23,1 \text{ см}^2.$$

Учитывая, что координаты полюса  $z_f = 9,2 \text{ см}$ ,  $y_f = -4 \text{ см}$  (рис. 5.12), по формулам (5.10) определяем положение нейтральной линии в сечении (рис. 5.13)

$$a_y = -\frac{30,9}{-4} = 7,73 \text{ см}; \quad a_z = -\frac{23,1}{9,2} = -2,51 \text{ см}.$$

Проводя касательные к сечению параллельно нейтральной линии, получаем опасные точки сечения (точки  $B$  и  $D$ ) и строим эпюру нормальных напряжений (рис. 5.13).

Используя формулу (5.8), вычисляем наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения

$$\sigma_{\max}^t = \sigma_B = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_f}{i_{zc}^2} y_B + \frac{z_f}{i_{yc}^2} z_B \right) = -\frac{100 \cdot 10^3}{160} \left( 1 + \frac{(-4)}{30,9} \cdot 8 + \frac{9,2}{23,1} \cdot (-6,8) \right) = 1715 \text{ Н/см}^2 = 17,15 \text{ МПа} < \sigma_{adm}^t = 50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^c = \sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_f}{i_{zc}^2} y_D + \frac{z_f}{i_{yc}^2} z_D \right) = -\frac{100 \cdot 10^3}{160} \left( 1 + \frac{(-4)}{30,9} \cdot (-8) + \frac{9,2}{23,1} \cdot 9,2 \right) = -3562 \text{ Н/см}^2 = -35,62 \text{ МПа}.$$

$$\text{и } |\sigma_{\max}^c| = 35,62 \text{ МПа} < \sigma_{adm}^c = 150 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условия прочности и по растягивающим, и по сжимающим напряжениям выполняются.

Для построения ядра сечения используем зависимости (5.10). Пусть нейтральная линия занимает положение 1–1 (рис. 5.13). Тогда  $a_y = \infty$ ;  $a_z = -6,8 \text{ см}$ , а соответствующие координаты полюса (точка 1) составляют

$$y_{f1} = -\frac{30,9}{\infty} = 0; \quad z_{f1} = -\frac{23,1}{-6,8} = 3,4 \text{ см}.$$

Если нейтральной линией является касательная 2–2, то  $a_y = -8 \text{ см}$ ;  $a_z = \infty$  и координаты полюса (точка 2)

$$y_{f2} = -\frac{30,9}{-8} = 3,86 \text{ см}; \quad z_{f2} = -\frac{23,1}{\infty} = 0.$$

Если нейтральная линия занимает положение 3–3,  $a_y = \infty$ ;  $a_z = 9,2 \text{ см}$  и

$$y_{f3} = -\frac{30,9}{\infty} = 0; \quad z_{f3} = -\frac{23,1}{9,2} = -2,51 \text{ см}.$$

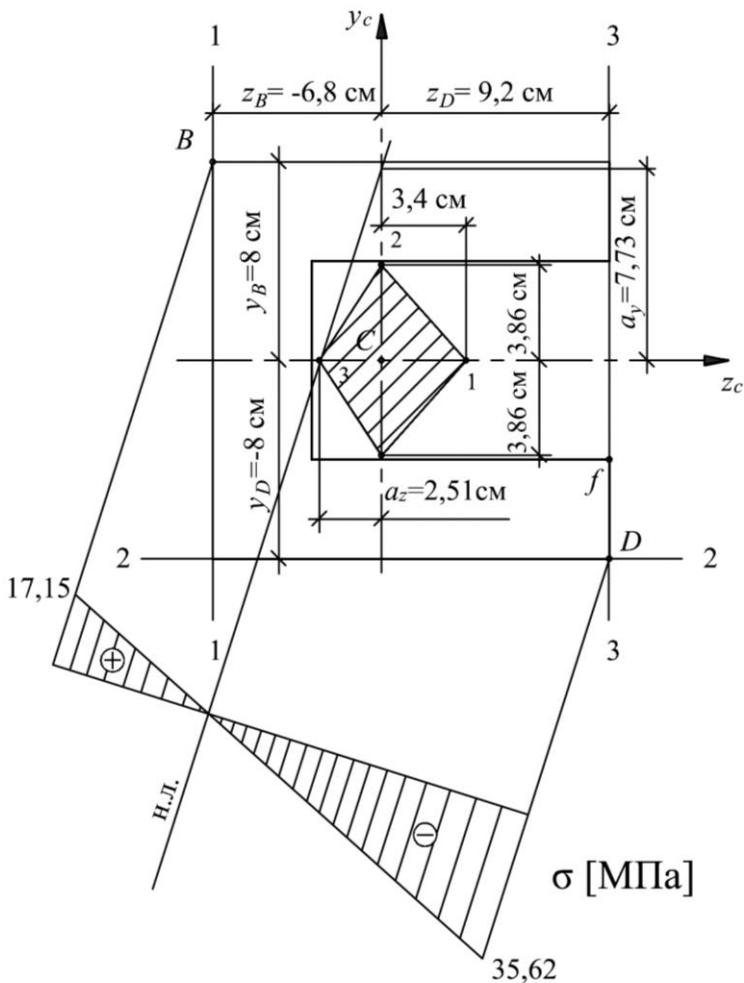


Рис. 5.13. Эпюра нормальных напряжений и ядро сечения

Построение ядра сечения (рис. 5.13) производим, учитывая симметрию сечения, а, также принимая во внимание, что при повороте касательной вокруг точки (например, при переходе из положения 1–1 в положение 2–2) полюс перемещается по прямой линии (в данном случае – от точки 1 к точке 2).

## 5.4. Общий случай сложного сопротивления

При таком виде деформации в поперечных сечениях бруса одновременно могут быть отличны от нуля все шесть внутренних усилий. Рассмотрим порядок расчетов в этом случае на примере бруса круглого поперечного сечения.

Поскольку при такой форме сечения кривой изгиб не имеет места, брус испытывает сочетание следующих видов деформации: прямого поперечного изгиба, кручения и центрального растяжения (сжатия), а материал находится в условиях плоского напряженного состояния. Пренебрегая влиянием поперечных сил, строим эпюры крутящих моментов  $T$ , изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ , а также продольных сил  $N$ . Используя эпюры  $M_z$  и  $M_y$ , строим эпюру суммарных изгибающих моментов  $M_{tot}$ , ординаты которой определяем по формуле

$$M_{tot} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Эпюра  $M_{tot}$  строится без использования правила «растянутых волокон» по одну сторону от нулевой оси эпюры. При этом на участках, где прямолинейные эпюры  $M_z$  и  $M_y$  имеют нулевые значения в одном и том же сечении, эпюра  $M_{tot}$  – прямолинейная. В противном случае эпюра – криволинейная, с выпуклостью, направленной к оси эпюры.

По эпюрам  $T$  и  $M_{tot}$  определяется опасное сечение. Опасные точки  $a$  и  $b$  в этом сечении находятся на концах диаметра  $D$ , лежащего в плоскости действия момента  $M_{tot}$  (рис. 5.14), так как в этих точках возникают наибольшие нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{tot}}{W}; \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}, \quad (5.13)$$

где  $W = \frac{\pi D^3}{32}$  – осевой момент сопротивления сечения;

$W_p = \frac{\pi D^3}{16} = 2W$  – полярный момент сопротивления сечения.

При этом должны выполняться условия прочности по третьей или четвертой теории прочности, имеющие, с учетом формул (5.13), вид:

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \sqrt{\frac{M_{tot}^2}{W^2} + 4\frac{T^2}{4W^2}} = \frac{\sqrt{M_{tot}^2 + T^2}}{W} \leq \sigma_{adm}, \quad (5.13)$$

$$\sigma_{red}^{IV} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{\frac{M_{tot}^2}{W^2} + 3\frac{T^2}{4W^2}} = \frac{\sqrt{M_{tot}^2 + 0,75T^2}}{W} \leq \sigma_{adm}. \quad (5.14)$$

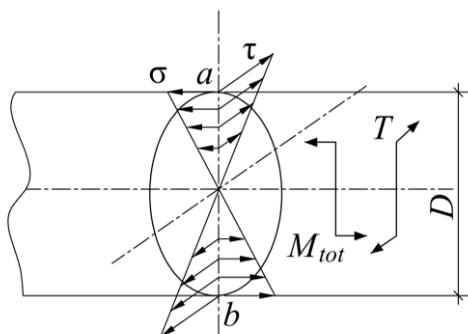


Рис. 5.14. Опасные точки в поперечном сечении

Выражая момент сопротивления  $W$  через диаметр и объединяя формулы (5.13) и (5.14), получаем выражение для подбора размеров сечения бруса

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\pi\sigma_{adm}}},$$

где  $M_{red}$  – приведенный момент, принимаемый равным

$$M_{red} = \sqrt{M_{tot}^2 + T^2} \text{ – по третьей теории прочности}$$

и

$$M_{red} = \sqrt{M_{tot}^2 + 0,75T^2} \text{ – по четвертой теории прочности.}$$

При наличии продольной силы в рассмотренном сечении производится проверка условия (5.13) или (5.14) с учетом изменения нормальных напряжений

$$\sigma_{max} = \frac{|N|}{A} + \frac{M_{tot}}{W},$$

где  $A = \frac{\pi D^2}{4}$  – площадь выбранного сечения.

## 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 6.1. Применение принципа возможных перемещений к упругим системам

Одной из важных задач сопротивления материалов является оценка жесткости конструкции, то есть степени ее изменения под действием нагрузки, изменения температуры, смещения связей. Для решения этой задачи необходимо определить перемещения нагруженной упругой системы (балки, рамы, фермы и так далее). Та же задача возникает при раскрытии статической неопределимости системы.

Для теории упругих систем принцип возможных перемещений можно сформулировать следующим образом: если система находится в равновесии под действием приложенной нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях точек системы равна нулю:

$$\sum F_i \cdot \Delta_{im} + \tilde{U}_{im} = 0, \quad (6.1)$$

где  $F_i$  – внешние силы;  $\Delta_{im}$  – возможные перемещения этих сил;

$\sum F_i \cdot \Delta_{im}$  – работа внешних сил;  $\tilde{U}_{im}$  – работа внутренних сил.

В качестве возможных перемещений можно принимать упругие перемещения, вызванные любым видом нагрузки и происходящие без нарушения связей. Работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях называется возможной или виртуальной работой.

Рассмотрим два состояния системы, находящейся в равновесии (рис. 6.1). В состоянии «*m*» система деформируется обобщенной силой  $F_m$  (рис. 6.1, *a*), в состоянии «*n*» – силой  $F_n$  (рис. 6.1, *б*).

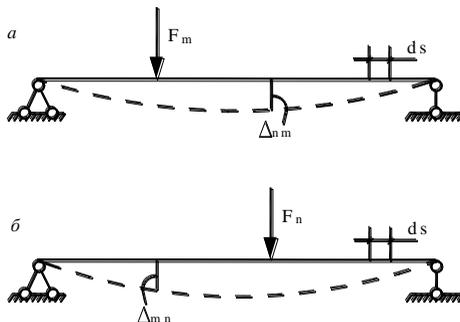


Рис. 6.1. Два состояния равновесия системы:  
*a* – состояние «*m*», *б* – состояние «*n*»

Перемещения состояния « $n$ » можно рассматривать как возможные для состояния « $m$ » и наоборот.

Поэтому работа сил состояния « $m$ » на перемещениях состояния « $n$ »  $w_{mn}$  будет возможной. Аналогично  $w_{nm}$ .

$$W_{mn} = F_m \cdot \Delta_{mn}, \quad W_{nm} = F_n \cdot \Delta_{nm}. \quad (6.2)$$

Вычислим возможную работу внутренних сил состояния « $m$ » на перемещениях, вызванных нагрузкой состояния « $n$ ». Рассмотрим элемент стержня длиной  $ds$  в обоих состояниях (рис. 6.2). Для плоского изгиба действие удаленных частей на элемент выражается системой усилий  $M_m, Q_m, N_m$  (рис. 6.2, *a*) и  $M_n, Q_n, N_n$  (рис. 6.2, *б*).

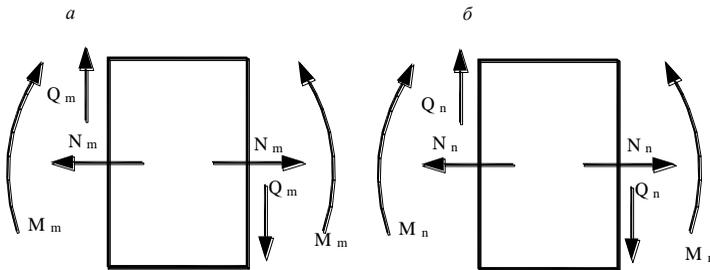


Рис. 6.2. Схема усилий, действующих на элементы:  
*a* – система усилий  $M_m, Q_m, N_m$ , *б* – система усилий  $M_n, Q_n, N_n$

Деформации элемента, вызванные усилиями состояния « $n$ », показаны на рис. 6.3.

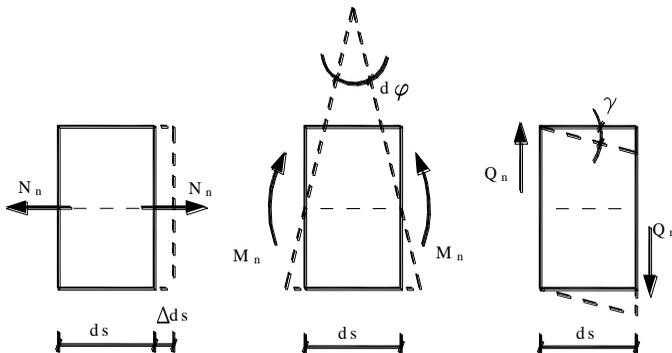


Рис. 6.3. Деформации элемента

Удлинение элемента  $ds$ , вызванное усилиями  $N_n$ :

$$(\Delta ds)_n = \frac{N_n ds}{EA}.$$

Работа внутренних сил  $N_m$  на этом возможном перемещении:

$$d\tilde{U}_n = -N_m (\Delta ds)_n = -\frac{N_m N_n}{EA} ds. \quad (6.3)$$

Взаимный угол поворота граней элемента, вызванный моментами  $M_n$ :

$$(d\varphi)_n = \frac{M_n ds}{EI}.$$

Работа внутренних изгибающих моментов  $M_m$  на этом перемещении:

$$d\tilde{U}_m = -M_m (d\varphi)_n = -\frac{M_m M_n}{EI} ds. \quad (6.4)$$

Взаимный сдвиг граней элемента, вызванный поперечными силами  $Q_n$ :

$$(\gamma ds)_n = k \frac{Q_n ds}{GA}.$$

Работа внутренних поперечных сил  $Q_m$  на этом перемещении:

$$d\tilde{U}_Q = -Q_m (\gamma ds)_n = -k \frac{Q_m Q_n}{GA} ds. \quad (6.5)$$

здесь  $k$  – коэффициент формы поперечного сечения.

Просуммировав выражения (6.3), (6.4), (6.5), получим возможную работу внутренних сил, приложенных к элементу  $ds$  стержня, на перемещениях, вызванных другой произвольной нагрузкой.

$$d\tilde{U} = -N_m (\Delta ds)_n - M_m (d\varphi)_n - Q_m (\gamma ds)_n.$$

Просуммировав элементарные работы по всем стержням системы, получим значение возможной работы внутренних сил:

$$\tilde{U} = - \left[ \sum_s \int M_m (d\varphi)_n + \sum_s \int Q_m (\gamma ds)_n + \sum_s \int N_m (\Delta ds)_n \right] \quad (6.6)$$

или

$$\tilde{U} = - \left[ \sum_s \int \frac{M_m M_n}{EI} ds + \sum_s k \int \frac{Q_m Q_n}{GA} ds + \sum_s \int \frac{N_m N_n}{EA} ds \right]. \quad (6.7)$$

Внеся в уравнение (6.1) выражения для возможной работы внешних сил (первую формулу (6.2)) и внутренних сил (6.6), получим об-

щее выражение принципа возможных перемещений для плоской стержневой системы:

$$\sum F_m \cdot \Delta_{mn} - \left[ \sum_s \int M_m (d\varphi)_n + \sum_s \int Q_m (\gamma ds)_n + \sum_s \int N_m (\Delta ds)_n \right] = 0. \quad (6.8)$$

Если упругая система находится в равновесии, то работа внешних и внутренних сил в состоянии «*m*» на возможных перемещениях, вызванных нагрузкой состояния «*n*» равна нулю.

## 6.2. Общая формула для определения перемещений. Метод Мора

Рассмотрим плоскую стержневую систему, нагруженную заданными силами  $F$ . Усилия в произвольном сечении системы обозначим через  $M_F, Q_F, N_F$ . Необходимо определить перемещение любой точки  $k$  по направлению  $i-i$  (рис. 6.4, *a*).

В качестве вспомогательного состояния рассмотрим заданную систему, нагруженную единичной силой  $F_i = 1$ , приложенную по направлению искомого перемещения (рис. 6.4, *б*). Усилия в произвольном сечении вспомогательного состояния обозначим через  $M_i, Q_i, N_i$ .

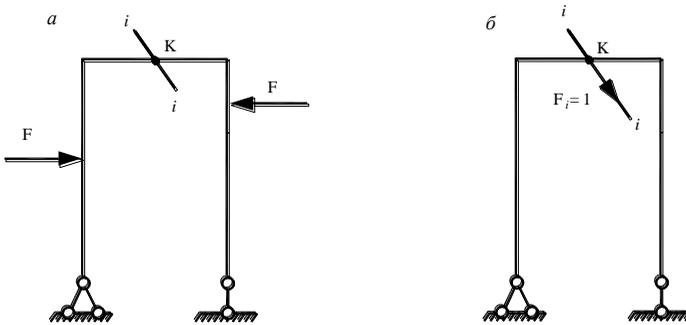


Рис. 6.4. Плоская рама:

*a* – заданное состояние, *б* – вспомогательное состояние

Из выражения принципа возможных перемещений для вспомогательного состояния согласно формуле (6.8) представим общую формулу для упругого перемещения:

$$1 \cdot \Delta_{iF} = \sum_s \int M_i (d\varphi)_F + \sum_s \int Q_i (\gamma ds)_F + \sum_s \int N_i (\Delta ds)_F \quad (6.9)$$

В случае действия сил:

$$\Delta_{iF} = \sum \int_s \frac{M_i M_F}{EI} ds + \sum k \int_s \frac{Q_i Q_F}{GA} ds + \sum \int_s \frac{N_i N_F}{EA} ds. \quad (6.10)$$

Определение перемещений по этим формулам называют методом Мора. Например, при определении перемещений в балках, рамах пренебрегают влиянием продольных деформаций и деформаций сдвига, поэтому формула (6.10) может быть представлена, как

$$\Delta_{iF} = \sum \int_s \frac{M_i M_F}{EI} ds.$$

При этом порядок определения перемещений следующий:

1. Для каждого участка системы записывают выражение изгибающего момента  $M_F$  от внешней нагрузки.

2. Строят вспомогательную систему, которую нагружают единичной нагрузкой в направлении искомого перемещения: силой при определении линейного перемещения, моментом – при определении углового перемещения.

3. Вычисляют интегралы Мора по участкам в пределах всей системы.

Если величина  $\Delta_{iF}$  оказывается положительной, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, если отрицательной, то противоположно заданному направлению.

### 6.3. Вычисление интегралов Мора по способу Верещагина

В 1925 году студент Московского института инженеров железнодорожного транспорта А.Н. Верещагин предложил упрощение вычисления перемещений по формуле Мора для стержней, состоящих из прямолинейных участков с постоянной в пределах каждого участка жесткостью. Упрощение основано на том, что эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках стержня оказываются линейными.

Представим выражение интеграла Мора  $\int M_i M_F dx$  для случая, когда эпюра от заданной нагрузки имеет произвольное очертание (рис. 6.5). Обозначим через  $\Omega$  площадь эпюры  $M_F$ ,  $C$  – ее центр тяжести,  $y_c$  – ордината единичной эпюры под центром тяжести грузовой.

Тогда искомым интеграл:

$$\int_{\ell} M_i M_F dx = \Omega y_c. \quad (6.11)$$

Следовательно, интеграл Мора равен произведению площади одной из эпюр (обязательно криволинейной, если таковая имеется) на ординату второй (линейной) эпюры под центром тяжести первой.

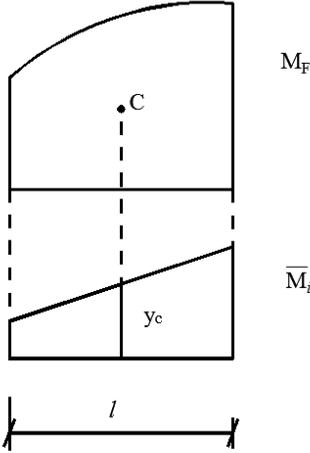


Рис. 6.5. Фрагмент грузовой и единичной эпюр

Встречающиеся на практике эпюры могут быть разбиты на простейшие фигуры: прямоугольник, треугольник и параболу  $n$ -й степени (рис. 6.6).

Предположим, что перемножаемые эпюры имеют вид (рис. 6.7, а, б).

Грузовая эпюра ограничена параболой (рис. 6.7, а). Ее необходимо разбить на прямоугольник, треугольник и параболический сегмент площадью

$\Omega = \frac{2}{3} \ell h = \frac{2}{3} \ell \frac{q \ell^2}{8}$ , где  $q$  – интенсивность распределенной нагрузки. Эти площади эпюры  $M_F$  необходимо умножить на ординаты  $y_i$  эпюры  $M_i$ , расположенные под центром тяжести  $C_i$ .

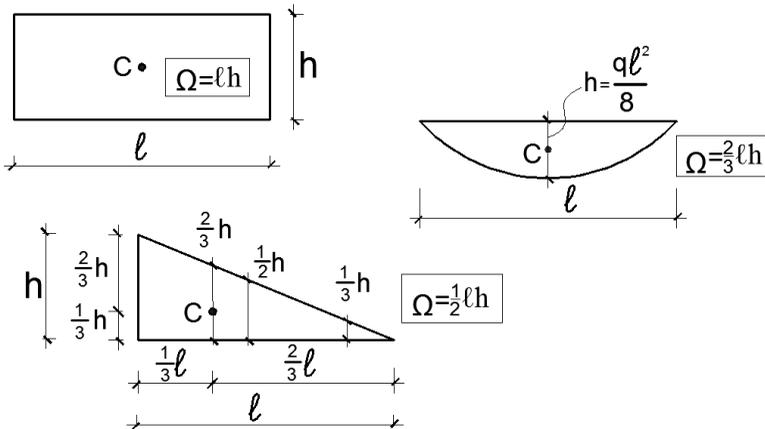


Рис. 6.6. Площади и ординаты простейших фигур

Если перемноженные эпюры линейны (рис. 6.7, б), то «перемножение» эпюр произвольное. При этом также необходимо производить разбивку на простые фигуры.

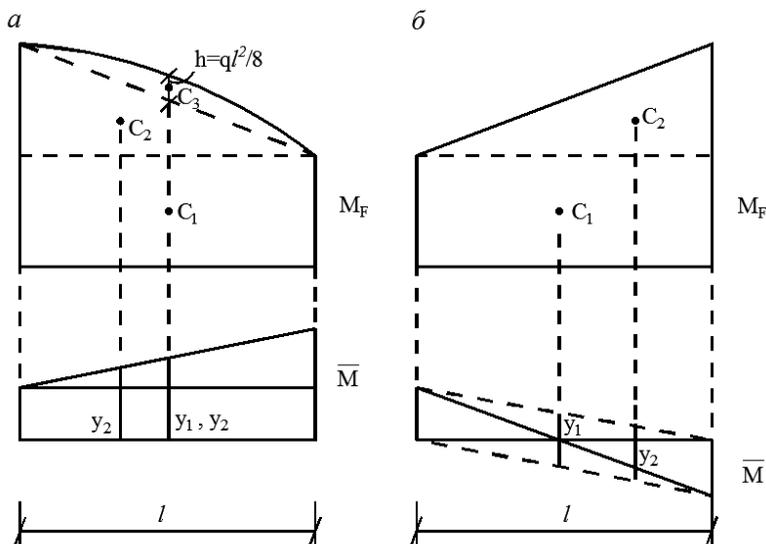


Рис. 6.7. «Перемножение» эпюр по правилу Верещагина

В обоих случаях результаты перемножения суммируются. При этом если эпюры расположены по одну сторону от оси, слагаемые берутся со знаком «+», если по разные стороны, то со знаком «-».

**Пример 6.1.** Определение перемещений в статически определимых стержневых системах.

*Задание:* Для заданной балки (рис. 6.8) требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, определив при этом экстремальные значения моментов.
2. Определить вертикальное перемещение сечение  $D$ .
3. Определить угол поворота сечения  $C$ .

*Решение:*

1. Балка статически определимая. Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от внешней нагрузки (рис. 6.8, б, в).

Вычислим значения опорных реакций:

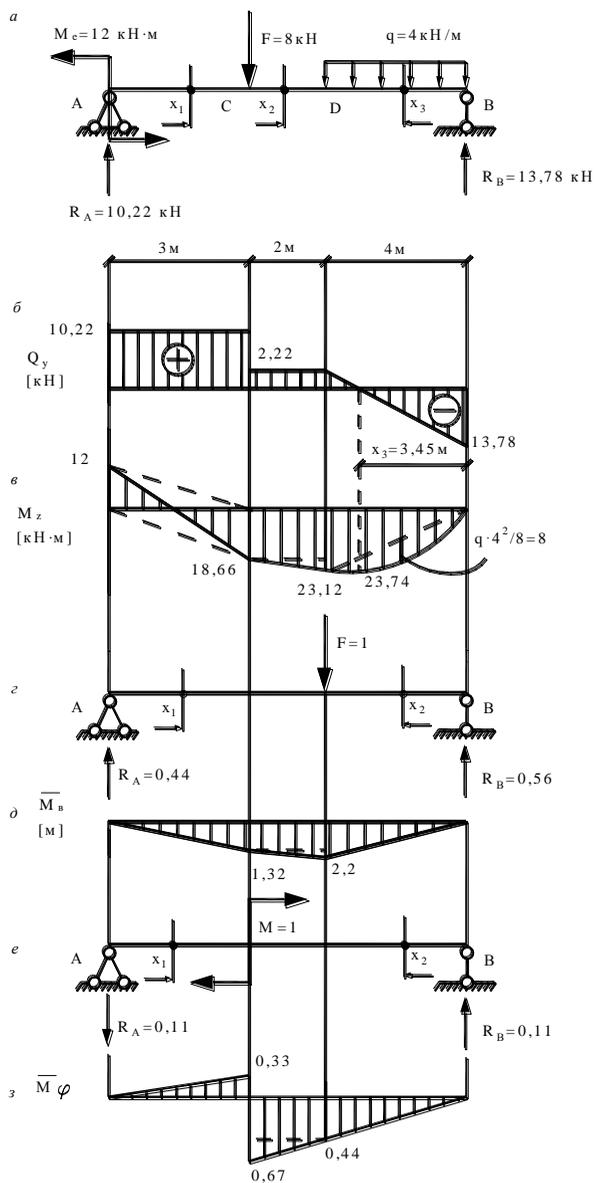


Рис. 6.8. К расчету балки на постоянную и единичные нагрузки:  
 а – расчетная схема; б – эпюра поперечных сил; в – эпюра изгибающих моментов; д, з – эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий

$$1) \sum M_B = R_A \cdot 9 - M_e - F \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0; R_A = 10,22 \text{ кН};$$

$$2) \sum M_A = -R_B \cdot 9 + q \cdot 4 \cdot 7 + F \cdot 3 - M_e = 0; R_B = 13,78 \text{ кН};$$

$$3) \text{Проверка: } \sum Y = R_A - F - q \cdot 4 + R_B = 10,22 - 8 - 4 \cdot 4 + 13,78 = 0.$$

Балка имеет три участка:

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 3 \text{ м}$ )

$$Q_y = R_A = 10,22 \text{ кН};$$

$$M_z = R_A \cdot x_1 - M_e \left| \begin{array}{l} = -12 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ x_1 = 0 \end{array} \right| = 18,66 \text{ кН} \cdot \text{м} \left| \begin{array}{l} \\ x_1 = 3 \text{ м} \end{array} \right|.$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$ )

$$Q_y = R_A - F = 10,22 - 8 = 2,22 \text{ кН};$$

$$M_z = R_A(3 + x_2) - M_e - Fx_2 \left| \begin{array}{l} = 18,66 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ x_2 = 0 \end{array} \right| = 23,12 \text{ кН} \cdot \text{м} \left| \begin{array}{l} \\ x_2 = 2 \text{ м} \end{array} \right|.$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 4 \text{ м}$ )

$$Q_y = -R_B + qx_3 \left| \begin{array}{l} = -13,78 \text{ кН} \\ x_3 = 0 \end{array} \right| = 2,22 \text{ кН} \left| \begin{array}{l} \\ x_3 = 4 \text{ м} \end{array} \right|;$$

$$M_z = -R_B x_3 + q \frac{x_3^2}{2} \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right| = -23,12 \text{ кН} \cdot \text{м} \left| \begin{array}{l} \\ x_3 = 4 \text{ м} \end{array} \right|.$$

Определим экстремальное значение момента.

$$Q_y = -R_B + qx_3 = 0, x_3 = \frac{R_B}{q} = \frac{13,78}{4} = 3,45 \text{ м};$$

$$M_z^{\text{экстр}} = -13,78 \cdot 3,45 + 4 \frac{3,45^2}{2} = -23,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Построим эпюру изгибающих моментов  $\overline{M}_B$  (рис.6.8, д) от силы  $F = 1$ , приложенной в направлении искомого перемещения (рис. 6.8, з).

Реакции:

$$R_A = \frac{4}{9} F = 0,44, R_B = \frac{5}{9} F = 0,56.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = R_A + R_B - F = 0,44 + 0,56 - 1 = 0.$$

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 5 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_B = R_A x_1 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right| = 1,32 \text{ м} \left| \begin{array}{l} = 2,2 \text{ м} \\ x_1 = 3 \text{ м} \end{array} \right| = 5 \text{ м}.$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_B = -R_B x_2 = -0,56 x_2 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right| = -2,2 \text{ м} \left| \begin{array}{l} \\ x_2 = 4 \text{ м} \end{array} \right|.$$

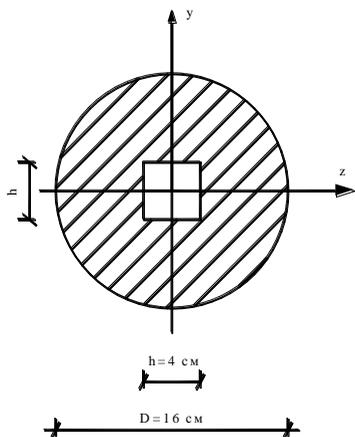
Для определения линейного перемещения «перемножим» по правилу Верещагина эпюры  $M_z$  (рис. 6.8, в) и  $\overline{M}_B$  (рис. 6.8, д).

$$\begin{aligned} v_D = \frac{1}{EI_z} & \left[ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,32 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 18,66 - \frac{1}{3} \cdot 12 \right) + 18,66 \cdot 2 \cdot \left( 1,32 + \frac{1}{2} \cdot 0,88 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4,46 \cdot \right. \\ & \left. \cdot 2 \left( 1,32 + \frac{2}{3} \cdot 0,88 \right) + \frac{1}{2} \cdot 23,12 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,2 + \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,2 \right] = \frac{182,18 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EI_z}, \end{aligned}$$

следовательно, сечение  $D$  перемещается в направлении, соответствующему заданному, то есть вниз.

Если поперечное сечение балки имеет вид, показанный на (рис. 6.9), а  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , то жесткость составляет:

$$\begin{aligned} EI_z = E \left( \frac{\pi D^4}{64} - \frac{h^4}{12} \right) & = E \left( \frac{\pi \cdot 16^4}{64} - \frac{4^4}{12} \right) = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2 \cdot 3194,03 \text{ см}^4 = \\ & = 6,388 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{см}^2. \end{aligned}$$



Тогда искомое перемещение равно:

$$v_D = \frac{182,18 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{см}^3}{6,388 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{см}^2} = 2,85 \text{ см}.$$

Допускаемый прогиб составляет:

$$v_{\text{adm}} = 0,01 L = 0,01 \cdot 900 \text{ см} = 9 \text{ см} > v_D.$$

Следовательно, условие жесткости удовлетворяется.

Рис. 6.9. Поперечное сечение балки

3. Построим эпюру изгибающих моментов  $\overline{M}_\varphi$  (рис. 6.8, з) от единичного момента, приложенного в сечении С (рис. 6.8, е).

$$\text{Реакции: } R_A = R_B = \frac{1}{9} = 0,11.$$

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 3 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_\varphi = -R_A x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=3 \text{ м}} = 0 \Big|_{x_1=0}^{x_1=3 \text{ м}} = -0,33.$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 6 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_\varphi = -R_B x_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=4 \text{ м}} \Big|_{x_2=6 \text{ м}} = 0 \Big|_{x_2=0}^{x_2=4 \text{ м}} \Big|_{x_2=6 \text{ м}} = -0,44 = -0,67.$$

Для определения угла поворота сечения «перемножим» эпюры  $M_z$  (рис. 6.8, в) и  $\overline{M}_\varphi$  (рис. 6.8, з).

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,33 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 12 - \frac{2}{3} \cdot 18,66 \right) + 18,66 \cdot 2 \cdot \left( 0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,23 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \right. \\ &\cdot 4,46 \cdot \left( 0,44 + \frac{1}{3} \cdot 0,23 \right) + \frac{1}{2} \cdot 23,12 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,44 + \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,44 \left. \right] = \frac{37,08}{EI_z} = \\ &= \frac{37,08 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{см}^2}{6,388 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{см}^2} = 0,0058 \text{ рад}, \end{aligned}$$

следовательно, сечение поворачивается в направлении, соответствующему заданному, то есть по часовой стрелке.

**Пример 6.2.** Определение перемещений статически определимых стержневых систем.

*Задание:* Для заданной рамы (рис. 6.10) требуется:

1. Построить эпюры внутренних усилий.
2. Определить горизонтальное перемещение сечения С.
3. Определить угол поворота сечения А.

*Решение:*

1. Вычислим значения опорных реакций:

$$1) \sum X = q_1 \cdot 4 - q_2 \cdot 3 - H_A = 0; H_A = 9 \text{ кН};$$

$$2) \sum M_B = R_A \cdot 6 + q_1 \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 2 - q_2 \cdot 3 \cdot 2,5 = 0; R_A = 2,25 \text{ кН};$$

$$3) \sum M_A = -R_B \cdot 6 + F \cdot 4 - q_2 \cdot 3 \cdot 2,5 + q_1 \cdot 4 \cdot 2 = 0; R_B = 9,75 \text{ кН};$$

$$4) \text{Проверка: } \sum Y = R_A - F + R_B = 0.$$

Рама имеет 5 участков.

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 4$  м)

$$Q_y = H_A - q_1 x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=4 \text{ м}} = -15 \text{ кН};$$

$$M_z = H_A x_1 - q_1 \frac{x_1^2}{2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=4 \text{ м}} = -12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим экстремальное значение момента:

$$Q_y = H_A - q_1 x_1 = 0; x_1 = \frac{H_A}{q_1} = \frac{9}{6} = 1,5 \text{ м}.$$

$$M_z^{\text{экстр}} = 9 \cdot 1,5 - 6 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 6,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$N = -R_A = -2,25 \text{ кН}.$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 4$  м)

$$Q_y = R_A = 2,25 \text{ кН};$$

$$M_z = H_A \cdot 4 - q_1 \cdot 4 \cdot 2 + R_A x_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=4 \text{ м}} = -12 \text{ кН} \cdot \text{м} = -3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

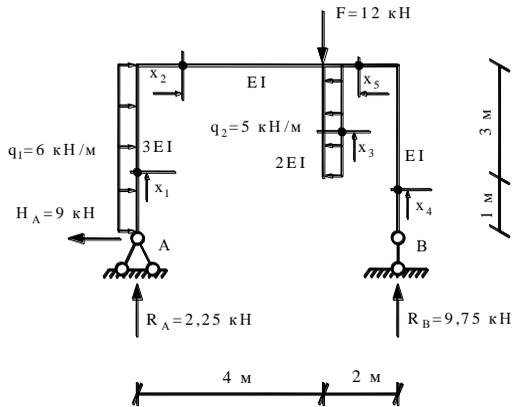


Рис. 6.10. Расчетная схема рамы

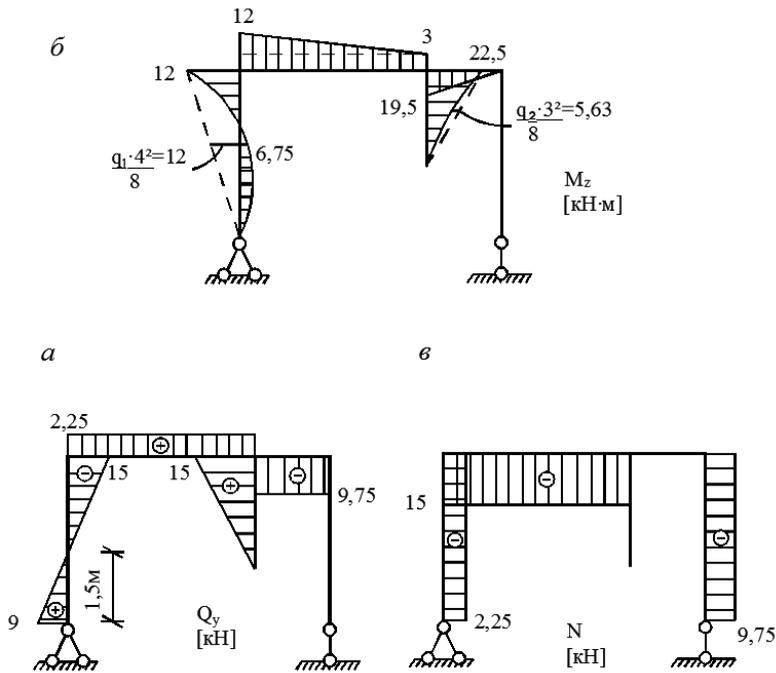


Рис. 6.11. Эпюры внутренних силовых факторов:  
*a* – поперечных сил, *б* – изгибающих моментов, *в* – продольных сил

$$N = H_A - q \cdot 4 = 9 - 6 \cdot 4 = -15 \text{ кН} .$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$ )

$$Q_y = q_2 x_3 \Big|_{x_3=0}^0 = 0 \Big|_{x_3=0}^{15 \text{ кН}} ;$$

$$M_z = q_2 \frac{x_3^2}{2} \Big|_{x_3=0}^0 = 0 \Big|_{x_3=0}^{22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}} ;$$

$$N = 0 .$$

Участок 4 ( $0 \leq x_4 \leq 4 \text{ м}$ )

$$Q_y = 0 ;$$

$$M_z = 0 ;$$

$$N = -R_B = -9,75 \text{ кН} .$$

Участок 5 ( $0 \leq x_5 \leq 2$  м)

$$Q_y = -R_B = -9,75 \text{ кН};$$

$$M_z = -R_B x_5 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right| = -19,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N = 0.$$

Эпюры внутренних усилий представлены на рис. 6.11.

2. Построим эпюру изгибающих моментов  $\overline{M}_\Gamma$  (рис. 6.12, б) от единичной силы, приложенной в сечении С (рис. 6.12, а).

Реакции:

$$\sum X = H_A - F = 0; \quad H_A = 1. \quad R_A = R_B = \frac{F \cdot 1}{6} = 0,17.$$

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 4$  м)

$$\overline{M}_\Gamma = -H_A x_1 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right| = -4 \text{ м}.$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 4$  м)

$$\overline{M}_\Gamma = -H_A \cdot 4 + R_A \cdot x_2 \left| \begin{array}{l} = -4 \text{ м} \\ x_2 = 0 \end{array} \right| = -3,33 \text{ м}.$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 3$  м)

$$\overline{M}_\Gamma = F x_3 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right| = 3 \text{ м}.$$

Участок 4 ( $0 \leq x_4 \leq 2$  м)

$$\overline{M}_\Gamma = R_B x_4 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right| = 0,33 \text{ м}.$$

Для определения горизонтального перемещения «перемножим» по правилу Верещагина эпюры  $M_z$  (рис. 6.11, б) и  $\overline{M}_\Gamma$  (рис. 6.12, б):

$$\begin{aligned} \Delta_\Gamma &= \frac{1}{3EI_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) + \frac{1}{EI_z} \left[ 3 \cdot 4 \cdot \left( 3,33 + \frac{1}{2} \cdot 0,67 \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 \cdot \left( 3,33 + \frac{2}{3} \cdot 0,67 \right) - \frac{1}{2} \cdot 19,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,33 \right] + \\ &+ \frac{1}{2EI_z} \left( \frac{1}{2} \cdot 22,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 5,63 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = \frac{132,98}{EI_z}. \end{aligned}$$

Направление перемещения совпадает с заданным, то есть влево.

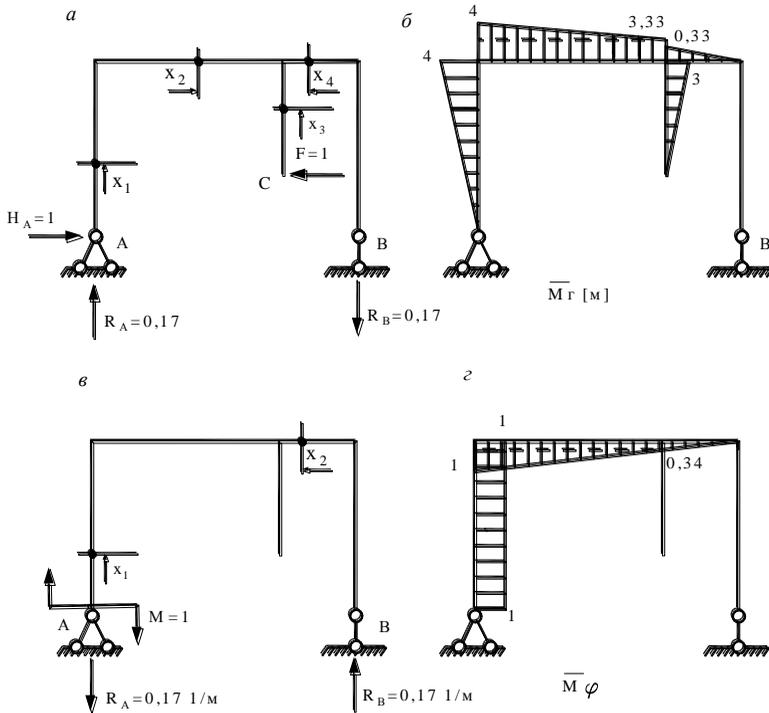


Рис. 6.12. К расчету рам на единичные воздействия:

*a, в* – расчетные схемы; *б, г* – эпюры моментов от единичных воздействий

Из условия прочности при изгибе и при  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$  необходимый момент сопротивления:

$$W_z \geq \frac{M_{z \max}}{\sigma_{adm}} = \frac{22,5 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{160 \cdot 10^2 \text{ Н/см}^2} = 140,62 \text{ см}^3.$$

По таблицам сортамента (прил. 1) выбираем швеллер №20, у которого  $W_z = 152 \text{ см}^3$ ,  $I_z = 1520 \text{ см}^4$ .

Значение жесткости при  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  для принятого сечения равно  $EI_z = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2 \cdot 1520 \text{ см}^4 = 3,04 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{см}^2$ .

Искомое значение перемещения

$$\Delta_{\Gamma} = \frac{132,98 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{см}^3}{3,04 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{см}^2} = 4,37 \text{ см}.$$

3. Построим эпюру изгибающих моментов  $\overline{M}_{\phi}$  (рис. 6.12, з) от единичного момента на опоре А (рис. 6.12, в).

Реакции:

$$R_A = R_B = \frac{M}{6} = \frac{1}{6} = 0,17 \frac{1}{\text{м}}.$$

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 4 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_{\phi} = M = 1.$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 6 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_{\phi} = -R_B x_2 \left|_{x_2=0} \right| = 0 \left|_{x_2=2 \text{ м}} \right| = -0,34 \left|_{x_2=6 \text{ м}} \right| = -1.$$

Для определения угла поворота сечения «перемножим» эпюры  $M_z$  (рис.6.11, б) и  $\overline{M}_{\phi}$  (рис.6.12, з).

$$\phi = \frac{1}{3EI_z} \left( -\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 4 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EI_z} \left[ -3 \cdot 4 \cdot \left( 0,34 + \frac{1}{2} \cdot 0,66 \right) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \cdot \left( 0,34 + \frac{2}{3} \cdot 0,66 \right) + \frac{1}{2} \cdot 19,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,34 \right] = -\frac{15}{EI_z} = -\frac{15 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{см}^2}{3,04 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{см}^2} =$$

$= -0,00493$  рад, следовательно сечение А повернется в направлении, противоположном заданному, то есть против часовой стрелки.

#### 6.4. Перемещения, вызванные действием температуры

Допустим, что элемент  $ds$  стержня рамы нагрет внутри до температуры  $t_n$ , с наружи – до  $t_b$ . Предполагается, что по высоте сечения температура изменяется по линейному закону (рис. 6.13, а, б).

Удлинения наружного и внутреннего волокон соответственно:

$$\Delta s_n = \alpha t_n ds, \quad \Delta s_b = \alpha t_b ds,$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения.

Удлинение по оси бруса (среднее)

$$\Delta ds_0 = \alpha \frac{t_n + t_b}{2} ds = \alpha t_0 ds, \tag{6.12}$$

где  $t_0$  – температура на уровне центра тяжести.

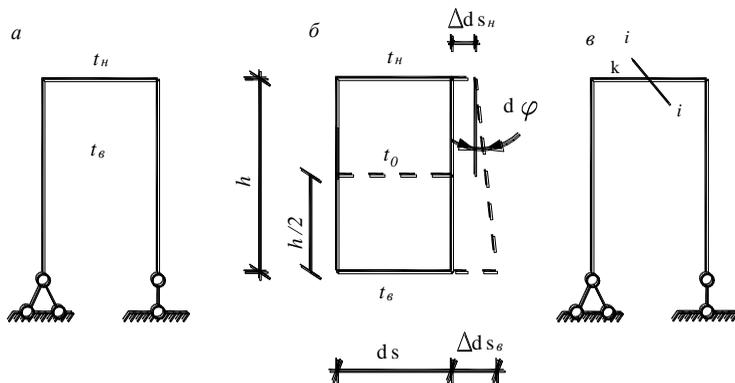


Рис. 6.13. Плоская рама:  
*a* – исходное состояние, *б* – поперечное сечение под воздействием температуры, *в* – вспомогательное состояние

Взаимный угол поворота сечений элемента  $ds$ , вызванный неравномерным нагревом элемента

$$d\varphi = \frac{\Delta ds_n - \Delta ds_b}{h} = \alpha \frac{t_n - t_b}{h} ds = \alpha \frac{\Delta t}{h} ds . \quad (6.13)$$

Необходимо определить перемещение точки  $k$  в направлении  $i-i$ . Тогда нагружаем вспомогательные состояния системы силой  $F_i = 1$  (рис. 6.13, *в*). Применяя принцип возможных перемещений для вспомогательного состояния и считая возможными действительные перемещения, вызванные действием температуры, на основании формулы (6.9) находим

$$\Delta_{ii} = \sum_s \int M_i (d\varphi)_i + \sum_s \int N_i (\Delta ds)_0 . \quad (6.14)$$

Сдвиг сечений  $\gamma$  при изменении температуры равен нулю. После подстановки формул (6.13) и (6.12) получим

$$\Delta_{ii} = \sum_s \int M_i \alpha \frac{t_n - t_b}{h} ds + \sum_s \int N_i \alpha \frac{t_n + t_b}{2} ds \quad (6.14)$$

или

$$\Delta_{ii} = \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \Omega_{M_i} + \sum \alpha t_0 \Omega_{N_i} . \quad (6.15)$$

где  $\Omega_{M_i}$  и  $\Omega_{N_i}$  – площади эпюр  $M_i$  и  $N_i$ .

**Пример 6.3.** Определение перемещений в раме от температурного воздействия.

*Задание:* Для заданной рамы определить горизонтальное перемещение опоры  $B$  и угол поворота сечения  $C$  от температурного воздействия.

*Исходные данные:* коэффициент линейного расширения  $\alpha = 1,18 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{град}}$ ; высота поперечного сечения стержней рамы  $h = 0,28 \text{ м}$ ; температура внутреннего волокна  $t_{\text{в}} = 15^{\circ} \text{ С}$ , наружного –  $t_{\text{н}} = -22^{\circ} \text{ С}$ .

*Решение:* Заданная рама (рис. 6.14, *а*) статически определимая.

1. Для определения горизонтального перемещения сечения  $B$  приложим единичную силу в направлении перемещения. Вспомогательная система показана на рис. 6.14, *б*. Здесь же показаны значения опорных реакций. Согласно формуле (6.15) необходимо построить эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  и продольных сил  $\bar{N}_1$  (рис. 6.15, *а, б*).

Вычислим значения опорных реакций:

- 1)  $\sum X = -H_A + F = 0$ ;  $H_A = F = 1$ ;
- 2)  $\sum M_B = H_A \cdot 1 - R_A \cdot 2 = 0$ ;  $R_A = 0,5$ ;
- 3)  $\sum M_A = -R_B \cdot 2 + F \cdot 1 = 0$ ;  $R_B = 0,5$ ;
- 4) Проверка:  $\sum Y = -R_A + R_B = -0,5 + 0,5 = 0$ .

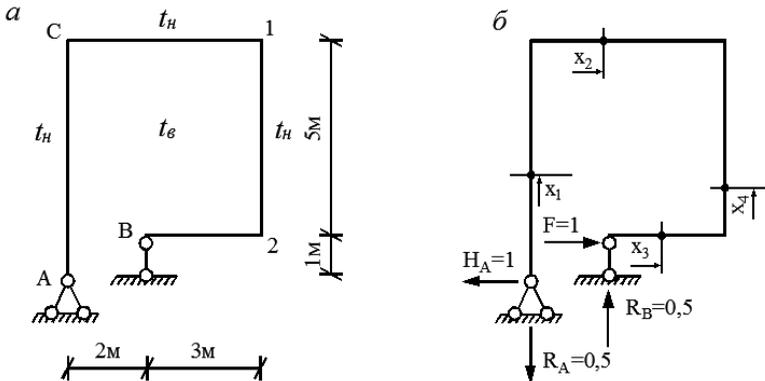


Рис. 6.14. Плоская рама:  
*а* – под воздействием температуры;  
*б* – расчетная схема от единичного воздействия

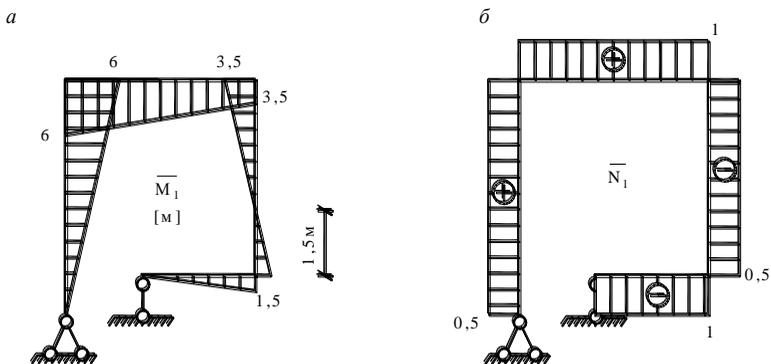


Рис. 6.15. Единичные эпюры:  
 а – изгибающих моментов; б – продольных сил

Рама имеет четыре участка.

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 6 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_1 = H_A x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=6 \text{ м}} = 6 \text{ м};$$

$$\overline{N}_1 = R_A = 0,5.$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 5 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_1 = H_A \cdot 6 - R_A \cdot x_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=5 \text{ м}} = 3,5 \text{ м};$$

$$\overline{N}_1 = H_A = 1.$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_1 = R_B x_3 \Big|_{x_3=0}^{x_3=3 \text{ м}} = 1,5 \text{ м};$$

$$\overline{N}_1 = -F = -1.$$

Участок 4 ( $0 \leq x_4 \leq 5 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_1 = R_B \cdot 3 - F x_4 \Big|_{x_4=0}^{x_4=5 \text{ м}} = -3,5 \text{ м};$$

Найдем точку пересечения эпюрой  $\overline{M}_1$  оси стержня.

$$\overline{M}_1 = R_B \cdot 3 - Fx_4 = 0, \quad x_4 = \frac{R_B \cdot 3}{F} = \frac{0,5 \cdot 3}{1} = 1,5 \text{ м}.$$

$$\overline{N}_1 = -R_B = -0,5.$$

Перемещение от температурных воздействий:

$$\begin{aligned} \Delta_{Br}^{\Gamma} &= \sum \alpha \left( t_0 \Omega_{N_1} + \frac{\Delta t}{h} \Omega_{M_1} \right) = \alpha \left[ -22 + 15 \right] \cdot (-0,5 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 0,5 \cdot 5 + 1 \cdot 3) + \\ &+ \left| \frac{-22 - 15}{0,28} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 + \frac{6 + 3,5}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 3,5 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5 - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 \right) \right] \right| = 1,18 \cdot 10^{-5} \cdot 5862,86 = 0,0692 \text{ м} = 6,92 \text{ см}. \end{aligned}$$

*Примечание.* Температура оси стержня  $t_0 = \frac{t_n + t_b}{2} = -3,5^\circ \text{С}$  —

стержни укорачиваются. От силы  $F = 1$  стержни  $AC$  и  $C1$  растягиваются, несогласование деформаций. Поэтому первые два слагаемых в первой скобке со знаком «-». Стержни  $1-2$  и  $2B$  от единичного воздействия сжимаются, согласование деформаций, следовательно, третье и четвертое слагаемые в первой скобке со знаком «+».

От неравномерного действия температуры растягиваются внутренние волокна. От изгиба силой  $F = 1$  и внутренние и наружные волокна. Там, где растянуты наружные волокна, кривизны имеют разные знаки и два последних слагаемых во второй скобке со знаком «-».

2. Для определения угла поворота в сечении  $C$  приложим единичный момент (рис. 6.16, а).

$$\text{Значения опорных реакций } R_A = R_B = \frac{M}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Построим эпюры изгибающих моментов  $M_2$  и продольных сил  $N_2$  (рис. 6.16, б, в).

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 6 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_2 = 0 \quad \overline{N}_2 = R_A = 0,5.$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 5 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_2 = M - R_A x_2 \left| \begin{array}{l} = 1 \\ x_2 = 0 \end{array} \right| = -1,5; \quad \left| \begin{array}{l} \\ x_2 = 5 \text{ м} \end{array} \right|;$$

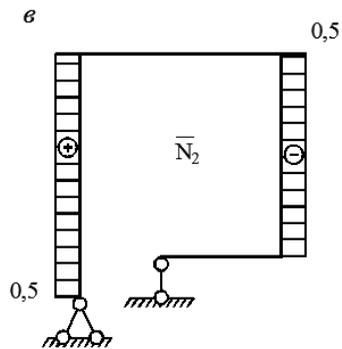
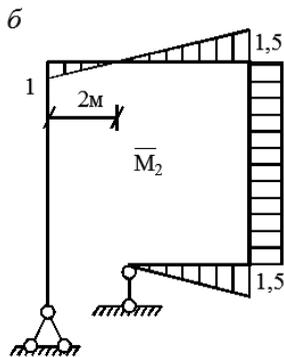
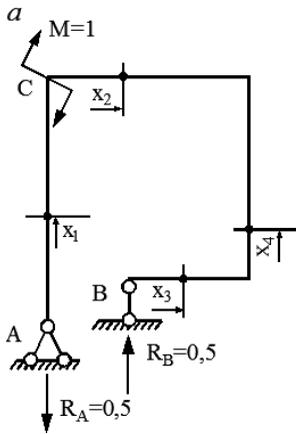


Рис. 6.16. К построению единичных эпюр:  
*a* – расчетная схема от единичного воздействия;  
*б* – эпюра изгибающих моментов; *в* – эпюра продольных сил

Точка пересечения эпюрой оси стержня:

$$\bar{M}_2 = 1 - 0,5x_2 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ м.}$$

$$\bar{N}_2 = 0.$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$ )

$$\bar{M}_2 = R_B x_3 \Big|_{x_3=0}^0 = 0 \Big|_{x_3=0}^{x_3=3 \text{ м}} = 1,5;$$

$$\bar{N}_2 = 0.$$

Участок 4 ( $0 \leq x_4 \leq 5$  м)

$$\bar{M}_2 = R_B \cdot 3 = 0,5 \cdot 3 = 1,5;$$

$$\bar{N}_2 = -R_B = -0,5.$$

Угол поворота от теплового воздействия:

$$\begin{aligned} \varphi_{ct} &= \sum \alpha \left( t_0 \Omega_{N_2} + \frac{\Delta t}{h} \Omega_{M_2} \right) = \alpha \left[ -22 + 15 \cdot (-0,5 \cdot 6 + 0,5 \cdot 5) + \right. \\ &+ \left. \frac{-22 - 15}{0,28} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 - 1,5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 \right) \right] = \\ &= 1,18 \cdot 10^{-5} \cdot (-1457,071) = -0,0172 \text{ рад}. \end{aligned}$$

Знак минус говорит о том, что сечение повернется в направлении, противоположном заданному, то есть против часовой стрелки.

## 7. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

### 7.1. Анализ плоских стержневых систем

Положение плоской стержневой системы на плоскости, как твердого тела, определяется тремя независимыми параметрами, то есть имеет три степени свободы.

Чтобы плоская стержневая система была неподвижна в своей плоскости, на нее необходимо наложить три внешние связи таким образом, чтобы обеспечить геометрическую неизменяемость системы. Такие системы называются **статически определимыми**, так как реакции связей могут быть найдены из трех уравнений статики.

Если стержневая система имеет число связей более трех, то она называется **статически неопределимой** и реакции связей не могут быть определены из одних уравнений статики.

**Степенью статической неопределимости** системы называется разность между числом наложенных на нее связей и количеством уравнений статики.

Например, рама на рис. 7.1, а имеет три лишних связи и является трижды статически неопределимой.

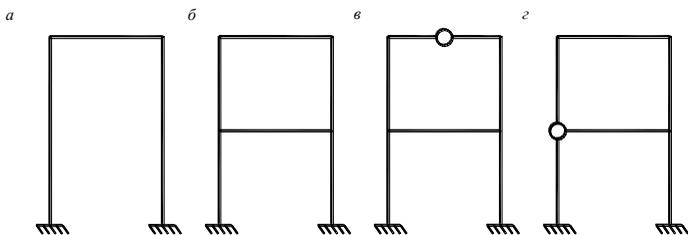


Рис.7.1. Плоские рамы с лишними связями:

Замкнутый контур с жесткими узлами имеет три внутренние связи и является трижды статически неопределимым. Стержневая система на рис. 7.1, б является шесть раз статически неопределимой.

Постановка шарнира на оси стержня (рис. 7.1, в) обращает в нуль изгибающий момент в данном сечении и, следовательно, снижает степень статической неопределимости на единицу. Такой шарнир называют одиночным. Рама пять раз статически неопределима.

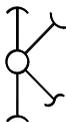


Рис. 7.2. Общий шарнир

Шарнир, включенный в узел, где сходятся  $n$  стержней (рис.7.2), снижает степень статической неопределимости на  $(n-1)$ . Он называется кратным и заменяет  $(n-1)$  одиночных шарниров. Рама на рис.7.1, г четыре раза статически неопределима.

## 7.2. Основы метода сил

Для определения усилий в статически неопределимых системах дополнительно к уравнениям статики составляют уравнения совместности деформаций.

Лишние связи накладывают определенные ограничения на перемещения тех сечений, к которым они приложены. Это обстоятельство используют для составления дополнительных уравнений, которые вместе с уравнениями статики позволяют определять силовые факторы в элементах системы.

Один из методов расчета статически неопределимых стержневых систем – метод сил – состоит в следующем:

1. Устанавливается степень статической неопределимости.
2. Удаляются лишние связи, исходная система становится статически определимой и называется основной системой. Она должна быть геометрически неизменяемой.

3. Основная система загружается заданной нагрузкой и лишними неизвестными усилиями, заменяющими действие отброшенных связей. Такая система называется эквивалентной.

4. Составляются уравнения совместности деформаций, число которых определяется числом лишних связей:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1F} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2F} = 0,$$

.....

$$\delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nF} = 0,$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – реакции отброшенных связей,  $\delta_{ij}$  – перемещение по направлению силы  $X_i$  от единичной силы  $X_j$ ,  $\Delta_{iF}$  – перемещение по направлению силы  $X_i$  от всей заданной нагрузки.

Перемещения  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{iF}$  определяются с помощью интегралов Мора или способом Верещагина. На основании теоремы о взаимности перемещений  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

5. После определения лишних неизвестных определяются внутренние усилия в элементах статически неопределимой системы.

**Пример 7.1.** Расчет статически неопределимой рамы методом сил.

*Задание:* Для заданной рамы (рис.7.3, а) требуется:

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать основную и эквивалентную системы.
3. Построить единичные и грузовую эпюры.
4. Вычислить коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений. Произвести их проверку.
5. Решив систему канонических уравнений, определить значения лишних неизвестных.
6. Построить эпюры внутренних усилий  $Q_y, M_z, N$ .
7. Произвести деформационную проверку.
8. Подобрать заданное сечение рамы (рис. 7. 3, б)

*Решение:*

1. Рама имеет пять связей, а необходимое число равно трем. Следовательно, рама является дважды статически неопределимой.

2. Основную систему получим из заданной путем удаления «лишних» связей и внешней нагрузки. На рис. 7.4, а, б представлены два варианта основной системы. Для решения примем вариант «а» основной системы. Приложив к выбранной основной системе внешнюю

нагрузку и реакции отброшенных связей, получим эквивалентную систему (рис. 7.4, в).

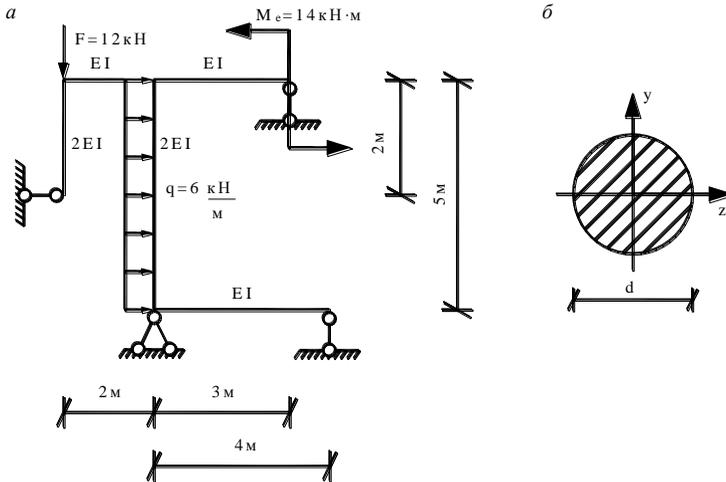


Рис. 7.3 Плоская рама:

*a* – расчетная схема; *б* – поперечное сечение элементов рамы

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Для определения коэффициентов этих уравнений необходимо построить единичные и грузовую эпюры.

3. Приложим к основной системе единичную силу  $x_1$  (рис.7.5, *a*) и построим единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  (рис. 7.5, *б*).

Значения реакций:

$$1) \sum M_B = X_1 \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0, R_A = 0,25;$$

$$2) \sum M_A = R_B \cdot 4 - X_1 \cdot 3 = 0, R_B = 0,75;$$

$$3) \text{Проверка: } \sum Y = -R_A - R_B + X_1 = -0,25 - 0,75 + 1 = 0.$$

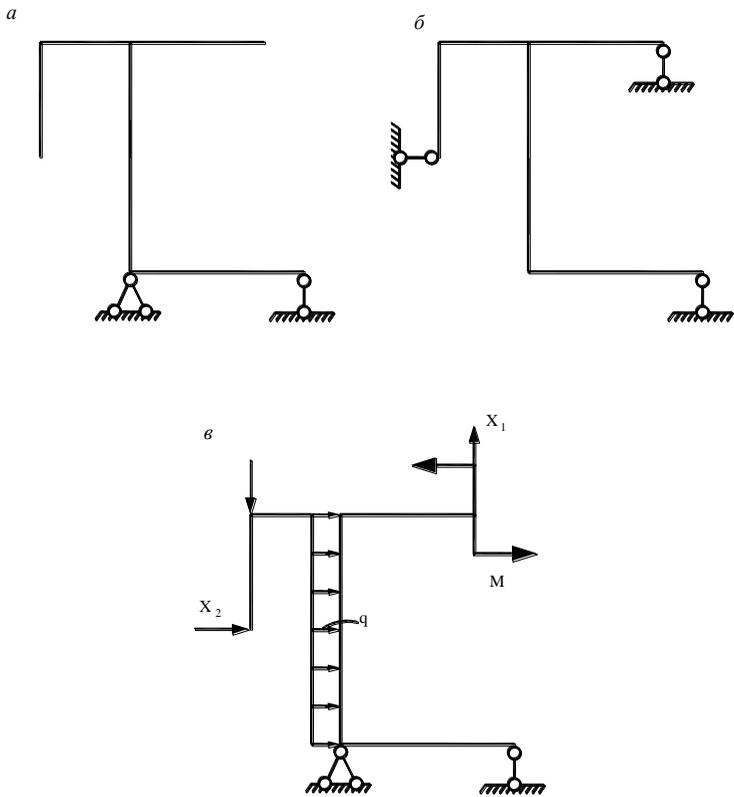


Рис.7.4. Плоская рама:  
*a, б* – варианты основной системы; *в* – эквивалентная система

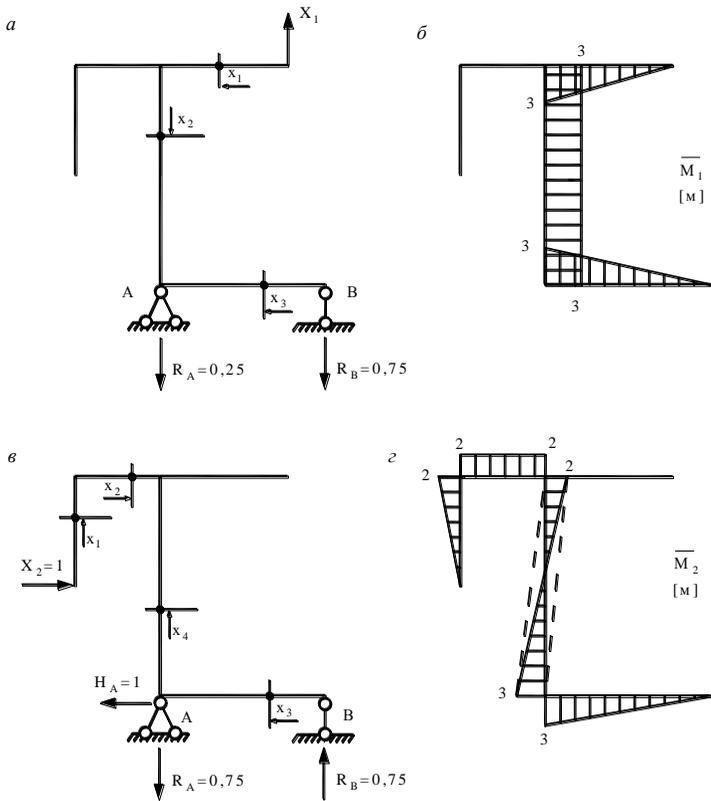


Рис.7.5. Эпюры для основной системы:  
 а, в – расчетные схемы; б, г – единичные эпюры изгибающих моментов

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 3$  м)

$$\overline{M}_1 = -X_1 \cdot x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=3} = -3 \text{ м}$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 5$  м)

$$\overline{M}_1 = -X_1 \cdot 3 = -3 \text{ м}$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 4$  м)

$$\overline{M}_1 = R_B x_3 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right|_{x_3 = 4 \text{ м}} = 3 \text{ м}$$

Приложим к основной системе единичную силу  $x_2$  (рис.7.5, в) и построим эпюру изгибающих моментов  $\overline{M}_2$  (рис. 7.5, г).

Значения реакций:

$$1) \sum X = X_2 - H_A = 0, H_A = 1;$$

$$2) \sum M_B = X_2 \cdot 3 - R_A \cdot 4 = 0, R_A = 0,75 = R_B.$$

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_2 = -X_2 \cdot x_1 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right|_{x_1 = 2 \text{ м}} = -2 \text{ м}$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_2 = -X_2 \cdot 2 = -2 \text{ м}.$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 4 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_2 = -R_B x_3 \left| \begin{array}{l} = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right|_{x_3 = 4 \text{ м}} = -3 \text{ м}$$

Участок 4 ( $0 \leq x_4 \leq 5 \text{ м}$ )

$$\overline{M}_2 = -R_B \cdot 4 + H_A x_4 \left| \begin{array}{l} = -3 \text{ м} \\ x_4 = 0 \end{array} \right|_{x_4 = 5 \text{ м}} = 2 \text{ м}$$

Приложим к основной системе внешнюю нагрузку (рис. 7.6, а) и построим грузовую эпюру  $M_F$  (рис. 7,6, б).

Значения реакций:

$$1) \sum X = q \cdot 5 - H_A = 0, H_A = 30 \text{ кН};$$

$$2) \sum M_B = -F \cdot 6 + q \cdot 5 \cdot 2,5 - M + R_A \cdot 4 = 0, R_A = 2,75 \text{ кН};$$

$$3) \sum M_A = -R_B \cdot 4 - M + q \cdot 5 \cdot 2,5 - F \cdot 2 = 0, R_B = 9,25 \text{ кН};$$

$$4) \text{ Проверка: } \sum Y = -F + R_A + R_B = -12 + 2,75 + 9,25 = 0.$$

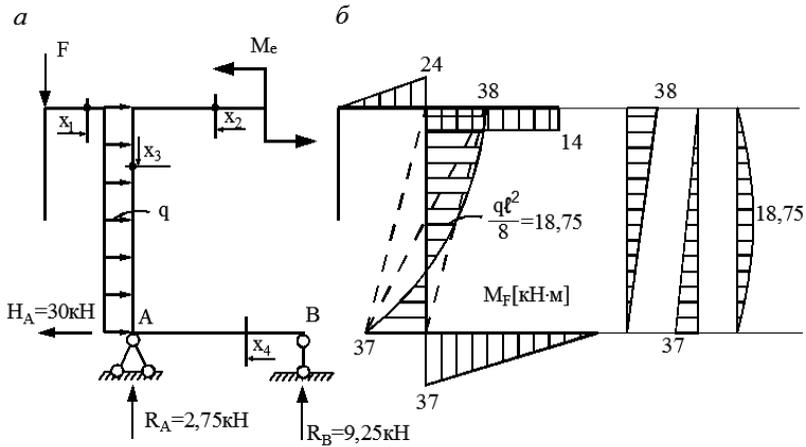


Рис.7.6. Эпюры для основной системы:  
*a* – расчетная схема, *б* – грузовая эпюра

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 2$  м)

$$M_F = -Fx_1 = -12x_1 \Big|_{x_1=0}^0 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad \Big|_{x_1=2 \text{ м}}$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 3$  м)

$$M_F = -M = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 5$  м)

$$M_F = -F \cdot 2 - M + q \frac{x_3^2}{2} \Big|_{x_3=0}^0 = -38 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad \Big|_{x_3=5 \text{ м}} = 37 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок 4 ( $0 \leq x_4 \leq 4$  м)

$$M_F = -R_B x_4 \Big|_{x_4=0}^0 = -37 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad \Big|_{x_4=4 \text{ м}}$$

4. При вычислении коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений воспользуемся правилом «перемножения» эпюр (правилом Верещагина):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = \frac{43,5}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left( 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{27,17}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = -\frac{15,75}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left( 14 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 38 \cdot 5 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 5 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 18,75 \cdot 3 \right) = \frac{12,5}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 38 \cdot 5 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 5 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 18,75 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \right) \right] = \frac{257,88}{EI}.$$

Для проверки коэффициентов построим суммарную единичную эпюру  $\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$  (рис.7.7) и «перемножим» ее саму на себя.

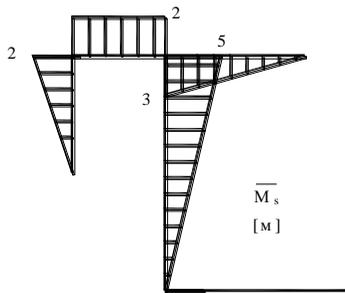


Рис. 7.7 Суммарная единичная эпюра изгибающих моментов

$$\delta_{ss} = \frac{1}{EI} \left( 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \frac{39,17}{EI}.$$

Результат равен сумме коэффициентов:

$$\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21} = \frac{1}{EI}(43,5 + 27,17 - 2 \cdot 15,75) = \frac{39,17}{EI}.$$

Для проверки свободных членов системы канонических уравнений «перемножим» суммарную эпюру  $\overline{M}_s$  (рис.7.7) и грузовую эпюру  $M_F$  (рис.7.6, б).

$$\Delta_{sF} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 24 \cdot 2 + 14 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 38 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 37 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 18,75 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = \frac{270,38}{EI}.$$

Результат равен сумме свободных членов

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{1}{EI}(12,5 + 257,88) = \frac{270,38}{EI}.$$

5. Подставим вычисленные коэффициенты в канонические уравнения метода сил:

$$\begin{aligned} \frac{43,5}{EI} X_1 - \frac{15,75}{EI} X_2 + \frac{12,5}{EI} &= 0, \\ -\frac{15,75}{EI} X_1 + \frac{27,17}{EI} X_2 + \frac{257,88}{EI} &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему, определим значения отброшенных связей:

$$X_1 = -4,71 \text{ кН}; X_2 = -12,23 \text{ кН}.$$

6. Для построения окончательных эпюр внутренних усилий рассмотрим эквивалентную систему (рис 7.8, а), в которой величины  $X_1$  и  $X_2$  являются известными.

Значения опорных реакций:

$$1) \sum X = q \cdot 5 - X_2 - H_A = 0, H_A = 17,77 \text{ кН};$$

$$2) \sum M_B = R_A \cdot 4 + q \cdot 5 \cdot 2,5 - X_2 \cdot 3 - F \cdot 6 - M - X_1 \cdot 1 = 0,$$

$$R_A = 13,1 \text{ кН};$$

$$3) \sum M_A = -R_B \cdot 4 + X_1 \cdot 3 - M + q \cdot 5 \cdot 2,5 - F \cdot 2 - X_2 \cdot 3 = 0,$$

$$R_B = 3,61 \text{ кН};$$

$$4) \text{ Проверка: } \sum Y = R_A + R_B - F - X_1 = 0.$$

Участок 1 ( $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$ )

$$N_1 = 0;$$

$$Q_y = X_2 = 12,23 \text{ кН};$$

$$M_z = X_2 \cdot x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=2} = 0 \Big|_{x_1=0}^{x_1=2} = 24,46 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок 2 ( $0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$ )

$$N = X_2 = 12,23 \text{ кН};$$

$$Q_y = -F = -12 \text{ кН};$$

$$M_z = X_2 \cdot 2 - Fx_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=2} = 24,46 \text{ кН} \cdot \text{м} \Big|_{x_2=0}^{x_2=2} = 0,46 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок 3 ( $0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$ )

$$N = 0;$$

$$Q_y = X_1 = 4,71 \text{ кН};$$

$$M_z = -M + X_1 \cdot x_3 \Big|_{x_3=0}^{x_3=3} = -14 \text{ кН} \cdot \text{м} \Big|_{x_3=0}^{x_3=3} = 0,13 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок 4 ( $0 \leq x_4 \leq 4 \text{ м}$ )

$$N = 0;$$

$$Q_y = -R_B = -3,61 \text{ кН};$$

$$M_z = -R_B x_4 \Big|_{x_4=0}^{x_4=4} = 0 \Big|_{x_4=0}^{x_4=4} = -14,44 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок 5 ( $0 \leq x_5 \leq 5 \text{ м}$ )

$$N = -R_B - R_A = -3,61 - 13,1 = -16,71 \text{ кН};$$

$$Q_y = H_A - q \cdot x_5 \Big|_{x_5=0}^{x_5=5} = 17,77 \text{ кН} \Big|_{x_5=0}^{x_5=5} = -12,23 \text{ кН};$$

$$M_z = -R_B \cdot 4 + H_A x_5 - q \frac{x_5^2}{2} \Big|_{x_5=0}^{x_5=5} = -14,44 \text{ кН} \cdot \text{м} \Big|_{x_5=0}^{x_5=5} = -0,59 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Определим экстремальное значение момента:

$$Q_y = H_A - q \cdot x_5 = 0,$$

$$x_5 = \frac{H_A}{q} = \frac{17,77}{6} = 2,96 \text{ м}.$$

$$M_z^{\text{экстр}} = -3,61 \cdot 4 + 17,77 \cdot 2,96 - 6 \frac{2,96^2}{2} = 11,87 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры  $N$ ,  $Q_y$ ,  $M_z$  показаны на рис. 7.8, б, в, г.

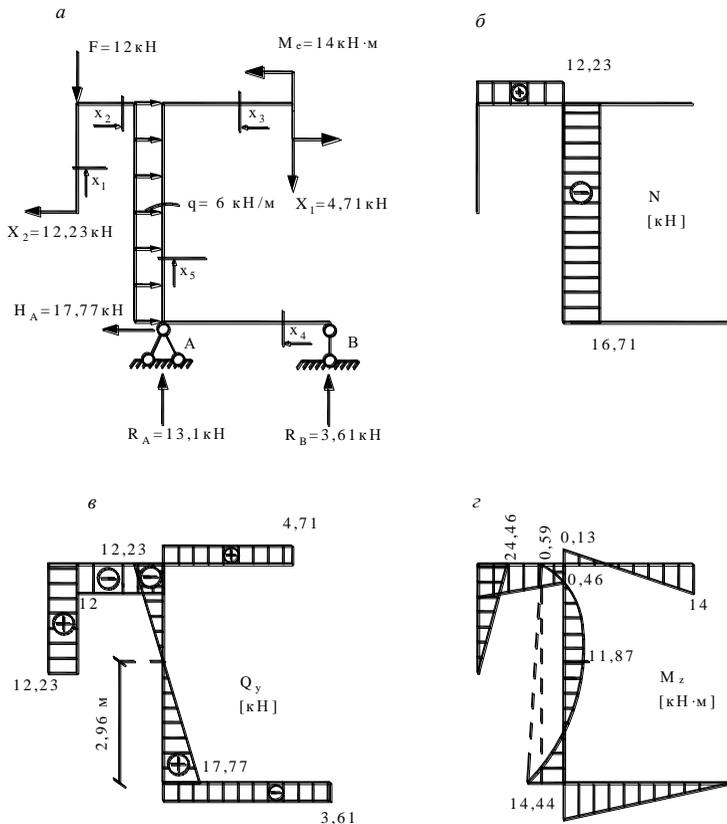


Рис. 7.8. Эпюры для статически неопределимой рамы:  
 а – расчетная схема; б – эпюра продольных сил; в – эпюра поперечных сил;  
 з – эпюра изгибающих моментов

7. Для контроля правильности решения задачи проведем деформационную проверку: «перемножим» окончательную эпюру моментов  $M_z$  (рис.7.8, з) на любую из единичных, например  $\bar{M}_2$  (рис.7.5, з):

$$\Delta = \frac{1}{EI} \left( -\frac{24,46 + 0,46}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 14,44 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2EI} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 24,46 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 0,59 \cdot 5 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 13,85 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 18,75 \cdot \right]$$

$$\cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \right] = \frac{1}{EI} (81,58 - 81,78) = \frac{0,2}{EI}.$$

(погрешность составляет  $\frac{0,2}{81,58} 100 \% = 0,25 \%$  ).

8. Из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{max} = \frac{M_z^{max}}{W_z} \leq \sigma_{adm} \quad \text{вычислим необходимый момент сопротивления}$$

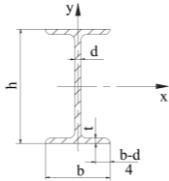
сечения при  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$  :

$$W_z \geq \frac{M_z^{max}}{\sigma_{adm}} \geq \frac{24,46 \cdot 10^5 \text{ Н}}{160 \cdot 10^2 \text{ Н/см}^2} = 152,9 \text{ см}^3.$$

Определим размеры круглого поперечного сечения

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}, d = \sqrt[3]{\frac{32 W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 152,9}{3,14}} = 11,58 \text{ см}.$$

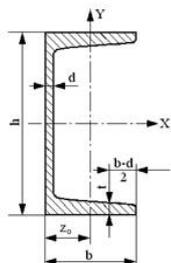
Принимаем  $d = 12 \text{ см}$ .



## СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Сталь горячекатаная  
Балки двутавровые  
ГОСТ 8239-72

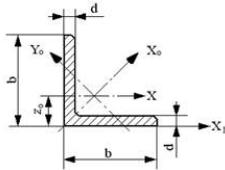
№ балки	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup> А	Масса, кг 1 м	Справочные величины для осей						
	h	b	d	t			x-x				y-y		
							I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,0	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,8	23,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,7	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,5	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	7,4	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	7,5	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	8,2	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	8,3	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	36,0	24,00	2550	232,0	9,1	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	9,2	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	9,9	163,0	193,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	10,1	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	11,2	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	11,3	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	12,3	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20	7780	518,0	12,5	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	13,5	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	14,7	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,2	545,0	667,0	89,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54



Сталь горячекатаная  
Швеллеры с уклоном внутренних граней полок  
ГОСТ 8240-72

Продолжение приложения

№ профилей	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup> A	Масса, кг 1 м	Справочные величины для осей						Z <sub>0</sub> , см	
	h	b	d	t			x-x			y-y				
							I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>		i <sub>y</sub> , см
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	50	32	4,4	7,0	6,16	4,84	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,945	1,16
5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
6,5	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
8	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
10	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
12	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14	140	62	4,9	8,7	17,0	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
14a	160	64	5,0	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16	160	68	5,0	9,0	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
16a	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18	180	74	5,1	9,3	22,3	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
18a	200	76	5,2	9,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	21,2	2,35	2,28
20a	220	82	5,4	9,5	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,90	121	187	30,0	2,55	2,46
22a	240	90	5,6	10,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	245	37,2	2,78	2,67
24a	270	95	6,0	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
27	300	100	6,5	11,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
30	330	105	7,0	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
33	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10200	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
36	400	115	8,0	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



Сталь прокатная  
Угловая равнополочная  
ГОСТ 8509-72

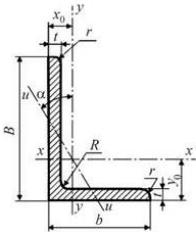
№ профилей	Размеры, мм		Площадь сечения, см <sup>2</sup> A	Масса, кг 1 м	Справочные величины для осей							
	b	d			x-x		X <sub>0</sub> -X <sub>0</sub>		Y <sub>0</sub> -Y <sub>0</sub>		X <sub>1</sub> -X <sub>1</sub>	Z <sub>0</sub> , см
					I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>x</sub> max, см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> max, см	I <sub>y</sub> min, см <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> min, см		
6	7	8	9	10	11	12	13					
1	20	3	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4	1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
		4	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,2	32	3	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
		5	3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	13,3	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78

Продолжение приложения

№ профилей	Размеры, мм		Площадь сечения, см <sup>2</sup> А	Масса, кг 1 м	Справочные величины для осей							
	b	d			x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	Z <sub>0</sub> , см
					I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>x</sub> max, см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> max, см	I <sub>y</sub> min, см <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> min, см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	50,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,0	2,02
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	115	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,5	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	63,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
		8	19,7	15,5	294	3,87	468	4,87	122	2,49	516	3,36
12,5	125	9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	25,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90

Продолжение приложения

№ профилей	Размеры, мм		Площадь сечения, см <sup>2</sup> А	Масса, кг 1 м	Справочные величины для осей							
	b	d			x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	Z <sub>0</sub> , см
					I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>x</sub> max, см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> max, см	I <sub>y</sub> min, см <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> min, см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
		16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8586	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
25	250	22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	1112	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	1224	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	1296	9,56	3389	4,89	15753	7,31



Сталь прокатная  
Угловая неравнополочная  
ГОСТ 8510–86

№ профилей	Размеры, мм			Площадь сечения, см <sup>2</sup> А	Масса, кг 1 м	Справочные величины для осей										
	В	b	d			x-x		y-y		x1-x1		y1-y1		u-u		Угол наклона оси, tg α
						I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> , см	I <sub>x1</sub> min, см <sup>4</sup>	Расстояние от центра тяжести, y <sub>0</sub> , см	I <sub>y1</sub> min, см <sup>4</sup>	Расстояние от центра тяжести, x <sub>0</sub> , см	I <sub>u</sub> min, см <sup>4</sup>	I <sub>u</sub> min, см	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2,5/1,6	25	16	3	1.16	0.91	0.70	0.78	0.22	0.44	1.56	0.85	0.43	0.42	0.13	0.34	0.392
3,2/2	32	20	3	1.49	1.17	1.52	1.01	0.46	0.55	3.26	1.08	0.85	0.49	0.28	0.43	0.382
				1.94	1.52	1.93	1.00	0.57	0.54	4.38	1.12	1.12	0.53	0.35	0.43	0.374
4/2,5	40	25	3	1.89	1.48	3.06	1.27	0.93	0.70	6.37	1.32	1.58	0.59	0.56	0.54	0.385
				2.47	1.94	3.93	1.26	1.18	0.69	8.53	1.37	2.15	0.63	0.71	0.54	0.381
4,5/2,8	45	28	3	2.14	1.68	4.41	1.43	1.32	0.79	9.02	1.47	2.20	0.64	0.79	0.61	0.382
				2.80	2.20	5.68	1.42	1.69	0.78	12.1	1.51	2.98	0.68	1.02	0.60	0.379
5/3,2	50	32	3	2.42	1.90	6.17	1.60	1.99	0.91	12.4	1.60	3.26	0.72	1.18	0.70	0.403
				3.17	2.49	7.98	1.59	2.56	0.90	16.6	1.65	4.42	0.76	1.52	0.69	0.401
5,6/3,6	56	36	4	3.58	2.81	11.4	1.78	3.70	1.02	23.2	1.82	6.25	0.84	2.19	0.78	0.406
				4.41	3.46	13.8	1.77	4.48	1.01	29.2	1.86	7.91	0.88	2.66	0.78	0.404
6,3/4,0	63	40	4	4.04	3.17	16.3	2.01	5.16	1.13	33.0	2.03	8.51	0.91	3.07	0.87	0.397
				4.98	3.91	19.9	2.00	6.26	1.12	41.4	2.08	10.8	0.95	3.73	0.86	0.396
				5.90	4.63	23.3	1.99	7.28	1.11	49.9	2.12	13.1	0.99	4.36	0.86	0.393
				7.68	6.03	29.6	1.96	9.15	1.09	66.9	2.20	17.9	1.07	5.58	0.85	0.386
7/4,5	70	45	5	5.59	4.39	27.8	2.23	9.05	1.27	56.7	2.28	15.2	1.05	5.34	0.98	0.404
				6.11	4.79	34.8	2.30	12.5	1.43	69.7	2.39	20.8	1.17	7.24	1.09	0.436
7,5/5	75	50	6	7.25	5.69	40.9	2.38	14.6	1.42	83.9	2.44	25.2	1.21	8.48	1.08	0.435
				9.47	7.43	52.4	2.35	18.3	1.40	112	2.52	34.2	1.29	10.9	1.07	0.430
8/5	80	50	5	6.36	4.99	41.6	2.56	12.7	1.41	84.6	2.6	20.8	1.13	7.58	1.09	0.387
				7.55	5.92	49.0	2.55	14.8	1.40	102	2.65	25.2	1.17	8.88	1.08	0.386
				7.86	6.17	65.3	2.88	19.7	1.38	132	2.92	32.2	1.26	11.8	1.22	0.384
9/5,6	90	56	6	8.54	6.70	70.6	2.88	21.2	1.38	145	2.95	35.2	1.28	12.7	1.22	0.384
				11.18	8.77	90.9	2.85	27.1	1.56	194	3.04	47.8	1.36	16.3	1.21	0.380

Продолжение приложения

№ профилей	Размеры, мм			Площадь сечения, см <sup>2</sup> А	Масса, кг 1 м	Справочные величины для осей										Угол наклона оси, tg α
	В	b	d			x-x		y-y		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> -y <sub>1</sub>		u-u		
						I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> , см	I <sub>x1</sub> , мин, см <sup>4</sup>	Расстояние от центра тяжести, у <sub>0</sub> , см	I <sub>y1</sub> , мин, см <sup>4</sup>	Расстояние от центра тяжести, х <sub>0</sub> , см	I <sub>u</sub> мин, см <sup>4</sup>	I <sub>u</sub> мин, см	
						7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6	11,4	8,98	112	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8	16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	4,70	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
			10	25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12	30	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,10	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	286	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	806	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

## Библиографический список.

1. *Степин, П.А.* Сопротивление материалов: учеб. для немашиностроит. спец. вузов. – 8-е изд. – М.: Высш. шк., 1988. – 367 с.
2. *Потележко, В.П.* Руководство к расчетно-графическим заданиям по сопротивлению материалов: учебн. пособие. – 2-е изд., доп. – Белгород: изд-во БелГТАСМ, 2002. – 176 с.
3. *Феодосьев, В.И.* Сопротивление материалов: учебн. для вузов. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 592 с.
4. *Чихладзе, Э.Д.* Сопротивление материалов: учебн. для студентов строительных специальностей транспортных вузов. – Харьков: УкрГАЖТ, 2002. – 362 с.
5. *Александров, А.В.* Сопротивление материалов: учебн. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – 2-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 2000. – 560 с.

## Учебное издание

**Серых** Инна Робертовна  
**Смоляго** Нина Алексеевна  
**Яковлев** Олег Александрович

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## Учебное пособие

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Уч.-изд. л. 8,5 .  
Усл.-печ. л. 7,9. Тираж 100 экз. Заказ . Цена р. к.  
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом  
университете им. В.Г. Шухова  
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46