

Министерство образования и науки
Российской Федерации
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

А. Г. Юрьев, Н. А. Смоляго, И. Р. Серых, О. А. Яковлев

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Утверждено ученым советом университета
в качестве учебного пособия для студентов
очной формы обучения направлений:
08.03.01 – Строительство, 08.05.01 – Строительство
уникальных зданий и сооружений; 08.05.02 - Строительство
железных дорог, мостов и транспортных тоннелей

Белгород
2015

УДК 624.04 (75)

ББК 38.112 я 7

Ю85

Р е ц е н з е н т ы:

Ведущий инженер-конструктор ООО «ПСК»БелЭнергоСтрой», кандидат технических наук, доцент *А.С. Горшков*.

Доктор технических наук, профессор Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова *Г.А. Смоляго*.

Ю85 Юрьев, А. Г.

Строительная механика: учеб. пособие / А. Г. Юрьев, Н. А. Смоляго, И. Р. Серых, О. А. Яковлев. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2015. – 188 с.

В учебном пособии изложены основные принципы и методы строительной механики применительно к анализу и проектированию строительных конструкций. Описаны общие методы расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем и частные методы для отдельных категорий этих систем. Приведены примеры решения задач и вопросы для самоконтроля.

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения направлений: 08.03.01 – Строительство; 08.05.01 – Строительство уникальных зданий и сооружений; 08.05.02 - Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей.

Данное издание публикуется в авторской редакции.

УДК 624.04 (75)

ББК 38.112 я 7

© Юрьев А.Г., Смоляго Н.А.,
Серых И.Р., Яковлев О.А, 2015
© Белгородский государственный
технологический университет
(БГТУ) им. В.Г.Шухова, 2015

Оглавление

Предисловие	6
Введение	7
1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....	8
1.1. Классификация по кинематическим и статическим признакам	8
1.1.1. Классификация расчетных схем	8
1.1.2. Неизменяемые, изменяемые и мгновенно изменяемые системы	8
1.1.3. Статически определимые и статически неопределимые системы	10
1.2. Образование плоских стержневых систем и анализ их изменяемости	10
1.2.1. Степень свободы и изменяемости системы	10
1.2.2. Принципы образования плоских неизменяемых систем	12
1.2.3. Анализ изменяемости плоских систем	13
1.3. Общие методы составления уравнений равновесия	15
1.3.1. Два основных метода	15
1.3.2. Пути и способы упрощения уравнений равновесия	15
1.4. Линии влияния и их применение	19
1.4.1. Понятие о подвижной нагрузке	19
1.4.2. Методы определения расчетного положения подвижной нагрузки	20
1.4.3. Статический метод построения линий влияния	21
1.4.4. Определение усилий по линиям влияния	22
1.4.5. Линии влияния при узловой передаче нагрузки	24
1.5. Шарнирные фермы	24
1.5.1. Понятие о фермах и их классификация	24
1.5.2. Расчет по методу вырезания узлов	26
1.5.3. Расчет по методу сечений	27
1.5.4. Матричная форма определения усилий	28
1.6. Трехшарнирная арка (расчет и проектирование)	28
1.7. Многодисковые системы	32
Вопросы для самопроверки	33
2. ОСНОВНЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	34
2.1. Энергетические теоремы	34

2.2. Определение перемещений линейно деформируемых систем	38
2.3. Пути упрощения вычисления перемещений.....	41
2.3.1. Интегрирование по правилу Верещагина (способ «перемножения» эпюр)	41
2.3.2. Приближенное вычисление интегралов в формуле перемещений	42
Вопросы для самопроверки	44
3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....	44
3.1. Метод сил.....	44
3.1.1. Основная система и сущность метода	44
3.1.2. Канонические уравнения	45
3.1.3. Построение эпюр внутренних усилий	47
3.2. Матричная форма расчета по методу сил	48
3.3. Уравнения метода сил для неразрезной балки и построение огибающих эпюр	49
3.4. Статически неопределимые фермы	51
3.5. Статически неопределимые арки.....	54
3.5.1. Двухшарнирная арка	54
3.5.2. Бесшарнирная арка	56
3.6. Метод перемещений.....	57
3.6.1. Основная система и сущность метода	57
3.6.2. Канонические уравнения	58
3.6.3. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.....	59
3.6.4. Матричная форма расчета по методу перемещений.....	61
3.7. Сопоставление методов сил и перемещений и выбор метода расчета	62
3.8. Смешанный метод	64
Вопросы для самопроверки	65
4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ.....	65
4.1. Расчет по методу сил.....	65
4.2. Расчет плоских рам на пространственную нагрузку	66
4.3. Расчет по методу перемещений	67
5. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	68
5.1. Идея метода конечных элементов и его связь с вариационными методами.....	68
5.2. Основные положения метода конечных элементов	69
5.3. Плоская задача.....	72
6. ОСНОВЫ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ	77

6.1. Устойчивость равновесия рам.....	77
6.2. Устойчивость равновесия тонкостенного стержня прямоугольного сечения при чистом изгибе	79
Вопросы для самопроверки	80
7. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....	80
7.1. Колебания системы с несколькими степенями свободы	80
7.1.1. Дифференциальные уравнения движения системы.....	80
7.1.2. Свободные колебания системы	82
7.1.3. Главные формы свободных колебаний.....	84
Вопросы для самопроверки	85
8. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	86
8.1. Расчет многопролетной статически определимой балки.....	86
8.2. Расчет многодисковой системы	93
8.3. Расчет плоской статически определимой балочно-консольной фермы	98
8.4. Расчет консольной фермы	102
8.5. Расчет трехшарнирной арки	107
8.6. Расчет плоской дважды статически неопределимой рамы методом сил.....	111
8.7. Расчет плоской трижды статически неопределимой рамы методом сил.....	119
8.8. Расчет балки на осадку опор методом перемещений.....	130
8.9. Расчет плоской рамы методом перемещений	135
8.10. Расчет статически неопределимой рамы на действие температуры и на смещение опор	148
8.11. Расчет пластинки методом конечных элементов	155
8.12. Расчет рамы на устойчивость	168
8.13. Динамический расчет стержневой системы.....	173
ПРИЛОЖЕНИЯ	179
Приложение 1	179
Приложение 2	180
Библиографический список.....	186

ПРЕДИСЛОВИЕ

Авторы стремились преподнести материал, предусмотренный учебной программой, в сжатом виде, но без ущерба для ясности понимания основных законов и методов. В свою очередь это привело к своеобразию его изложения. Введен новый материал по рациональному проектированию, который, несмотря на его большое значение, все еще не нашел должного отражения в учебной литературе.

Авторы старались в приемлемой мере использовать аппарат высшей математики, законы физики и теоретической механики при построении структурно-функциональной модели курса. Основной целью было помочь читателю составить необходимую систему основных положений и проблем строительной механики и подготовить его к дальнейшему накоплению знаний при самостоятельной работе.

Последовательность расположения материала принята такой, при которой первоочередное изложение принципов образования стержневых систем, методов их кинематического и статического анализа открывает возможность рассматривать отдельные классы стержневых образований.

Необходимое внимание уделено рассмотрению основных энергетических теорем для упругого тела, предшествующему методам определения перемещений и расчету статически неопределимых систем.

Направленность курса «Строительная механика» преследует цель научить будущего инженера проектированию надежных и экономичных конструкций, начиная с вопросов физического и математического моделирования и кончая анализом полученных результатов.

Учебное пособие содержит минимально необходимое количество числовых примеров, которые способствуют лучшему восприятию теоретического материала и могут быть использованы в самостоятельной работе.

ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика является одной из основополагающих технических дисциплин, формирующих мышление инженера.

Инженерные конструкции в условиях эксплуатации подвергаются внешним воздействиям и меняют форму и размеры, т. е. деформируются. При проектировании конструкции приходится определять материал, конфигурацию и размеры элементов, способных оказать сопротивление внешним воздействиям.

Главными требованиями к конструкции выступают противоречащие друг другу надежность (способность выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных пределах в течение требуемого промежутка времени) и экономичность. Разрешение этого противоречия является важнейшим элементом научной методики, обуславливающей развитие механики деформируемого твердого тела – науки о прочности (способности сопротивляться разрушению под действием внешних факторов), жесткости (способности сопротивляться изменению размеров и формы) и устойчивости (способности сохранять определенную начальную форму равновесия).

Основываясь на выводах этой науки и имея собственную направленность – разработку моделей надежности, сформировалась область знания с исторически закрепившимся названием «сопротивление материалов».

В сопротивлении материалов в число моделей формы входит стержень – брус, у которого поперечные размеры малы по сравнению с продольными. Строительная механика стержневых систем изучает конструкции в виде сочетания стержней: фермы, арки, рамы и др.

Конструкции, составленные из пластинок и называемые складчатыми тонкостенными системами, в данном курсе не рассматриваются.

Обозначение основных величин соответствуют рекомендациям международной организации по стандартизации (ИСО).

1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

1.1. Классификация по кинематическим и статическим признакам

1.1.1. Классификация расчетных схем

Для предварительных исследований расчетная схема (система) может быть предельно простой, для окончательных – строгой и совершенной. Наличие ЭВМ позволяет максимально приблизить расчетную схему к реальной конструкции. Поскольку машины оперируют в основном не с функциями, а с числами, то и значения расчетных величин они дают в числах и только для определенных мест. В таком случае распределенные нагрузки заменяются сосредоточенными, а элементы с переменным сечением заменяются элементами с кусочно-постоянными сечениями.

Конструкции и их расчетные схемы классифицируются по различным признакам. Конструкции, составленные из стержней, называются *стержневыми системами*; конструкции, составленные из пластинок, – *складчатыми тонкостенными (призматическими) системами*. Стержневые системы в свою очередь делятся на плоские и пространственные. *Плоская система* – это такая система, в которой оси всех стержней (включая опорные) и линии действия внешних сил лежат в одной плоскости, проходящей через одну из главных осей инерции поперечных сечений стержней. *Пространственная система* – такая система, в которой это условие не соблюдается.

С точки зрения направления опорных реакций системы могут быть *безраспорными и распорными*. К первому типу относятся такие, в которых вертикальная нагрузка вызывает только вертикальные опорные реакции, ко второму – все остальные системы.

По характеру взаимного соединения элементов различают системы с *шарнирными, жесткими соединениями и комбинированные*.

1.1.2. Неизменяемые, изменяемые и мгновенно изменяемые системы

Геометрически неизменяемая система – это система соединенных между собой элементов, допускающая их относительные перемещения только при деформировании материала. *Геометрически изменяемая система* – это система соединенных между собой элементов, допускающая их относительные конечные перемещения без деформи-

рования материала. *Мгновенно изменяемая система* – исключительный случай геометрически неизменяемой системы, когда она допускает бесконечно малые перемещения.

Простейшая неизменяемая система (рис. 1.1.1) состоит из двух шарнирно соединенных стержней, шарнирно прикрепленных к неподвижному телу. Доказательством неизменяемости является тот факт, что по трем сторонам можно построить единственный треугольник.

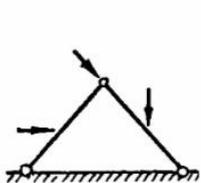


Рис. 1.1.1. Простейшая неизменяемая система

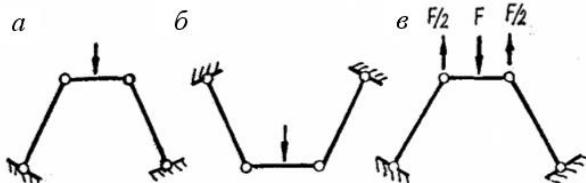


Рис. 1.1.2. Схемы простейшей изменяемой системы

Простейшая изменяемая система – три стержня, которые соединены между собой и прикреплены к неподвижному телу шарнирами (рис. 1.1.2). Равновесие изменяемой системы возможно лишь при определенной нагрузке (независимо от величины), причем оно может быть неустойчивым (*a*), устойчивым (*б*) и безразличным (*в*). В общем случае изменяемая система, получая большие перемещения, занимает устойчивое положение равновесия, если будет соблюдена прочность. Может случиться, что система встретит на своем пути какое-либо препятствие, которое будет служить дополнительной связью, и она перестанет быть изменяемой в направлении совершаемого движения.

Только в случае устойчивой формы равновесия изменяемые системы в какой-то мере могут иметь практическое использование (например, шарнирные цепи).

Термин «мгновенно изменяемая система» обосновывается тем, что при варьировании формы системы последняя становится изменяемой лишь одно мгновение. Если разъединить стержни в шарнире (рис. 1.1.3), то точка *B* опишет дуги радиусами *AB* и *CB*.

Дуги имеют общую касательную, т.е. общий бесконечно малый элемент. Следовательно, соединение стержней шарниром не мешает бесконечно малому перемещению общей точки *B*.

Теоретически бесконечно малые перемещения в реальности переходят в конечные. Поэтому *мгновенно изменяемые системы мало пригодны для сооружений.*

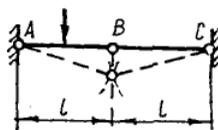


Рис. 1.1.3. Мгновенно изменяемая система

1.1.3. Статически определимые и статически неопределимые системы

Статическая неопределимость задачи зависит от вида системы, от предпосылок, на основе которых определяются внутренние силы и реакции, и от вида нагрузок. Задача об определении момента в защемляющей опоре консоли (рис. 1.1.4) будет статически определимой, если

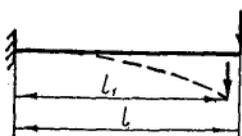


Рис. 1.1.4. Консоль

при принять $l_1=l$; она же будет статически неопределимой, если считать $l_1 \neq l$. При наличии на краю консоли вертикальной и горизонтальной сил задача будет статически определимой, если, кроме принятия $l_1=l$, пренебречь еще и вертикальным перемещением конца балки.

Существуют задачи всегда статически определимые (например, определение внутренних усилий в центрально растянутом стержне) и всегда статически неопределимые (например, распределение внутренних усилий в прямом стержне, имеющем число опорных связей больше трех). В последнем случае статическая неопределимость задачи уже не зависит от вида нагрузок, поэтому такого рода системы называются *статически неопределимыми*. Остальные системы можно называть *статически определимыми*, если внутренние усилия в них определяются по недеформированному состоянию.

1.2. Образование плоских стержневых систем и анализ их изменяемости

1.2.1. Степень свободы и изменяемости системы

Стержни независимо от их конкретной геометрической формы будем называть дисками. Соединения дисков в системы связано с понятиями о степени свободы и изменяемости систем.

Степень свободы – кинематическая характеристика системы, представляющая наименьшее число независимых параметров, с помощью которых можно определить положение всех точек системы в любой момент времени.

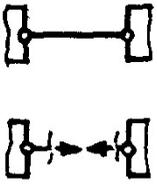
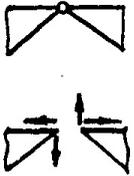
Образование систем из отдельных дисков производится при помощи связей. Каждый тип связи имеет как кинематическую, так и статическую характеристику (табл.1.2.1).

Если шарнир или припайка соединяют больше двух дисков, то они называются *кратными*. При соединении k дисков они заменяют

$k-1$ одиночных связей того же типа. Места соединения дисков шарнирами или припайками называются *узлами*. Концы стержней в жестких узлах при деформировании системы, если не учитывать деформации сдвига, поворачиваются на один и тот же угол, а в шарнирных, как правило, – на разные углы.

Таблица 1.2.1

Характеристики типов связи

Тип связи	Кинематическая характеристика	Статическая характеристика	Условное обозначение
Стержень с шарнирами по краям	Связь препятствует поступательному перемещению одного диска относительно другого (уничтожает одну степень свободы)	В связи может возникнуть реактивная сила, направленная вдоль стержня	
Цилиндрический шарнир	Препятствует поступательным перемещениям одного диска относительно другого (уничтожает две степени свободы взаимного перемещения)	В шарнире может возникнуть реактивная сила любого направления, которую можно разложить на две составляющие по заданным направлениям	
Припайка	Не допускает ни поступательных перемещений, ни вращения одного диска относительно другого (в плоской системе уничтожает три степени свободы)	В припайке возникает реактивная сила любого направления и момент	

Степень изменяемости системы – число независимых параметров, определяющих положение системы по отношению к одному ее диску, принимаемому за неподвижный. Для плоской системы между степенью свободы C^* и степенью изменяемости I существует зависимость $I = C^* - 3$.

1.2.2. Принципы образования плоских неизменяемых систем

Три степени свободы относительных перемещений двух дисков могут быть уничтожены: тремя стержнями, шарниром и стержнем, *припайкой*.

При соединении двух дисков тремя стержнями (рис. 1.2.1,*а*) необходимо, чтобы они не пересекались в одной точке. При соединении двух дисков шарниром и стержнем (рис. 1.2.1,*б*) необходимо, чтобы стержень не проходил через шарнир. Иначе получим мгновенно изменяемую систему. Соединение дисков припайкой (рис. 1.2.1,*в*) не имеет ограничений.

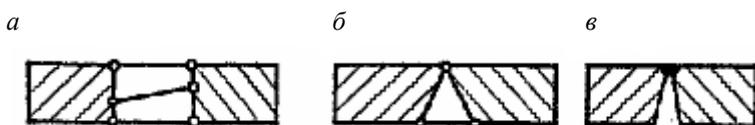


Рис. 1.2.1. Соединение двух дисков:

а – тремя стержнями, *б* – шарниром и стержнем, *в* – припайкой

Два диска, соединенных между собой в неизменяемую систему, могут далее рассматриваться как один диск. К ним может быть присоединен третий диск, затем четвертый и т.д.

Три диска могут быть попарно соединены шарнирами (рис. 1.2.2,*а*) или двумя и более стержнями, пересекающимися в одной точке (рис. 1.2.2,*б*), при условии, что шарниры и точки пересечения стержней не будут лежать на одной прямой.

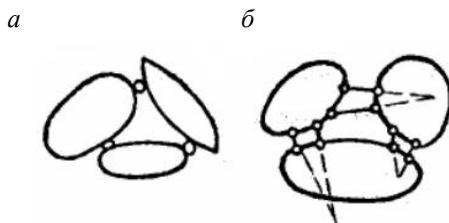


Рис. 1.2.2. Соединение трех дисков:

а – шарнирами, *б* – стержнями

Системы бывают *свободные и прикрепленные к земле*. Неизменяемую систему и землю соединяют по правилу для связывания двух дисков. Рассмотренные три типа связей трансформируются в цилиндрическую подвижную, цилиндрическую неподвижную и заземляющую опоры.

Изменяемая система, прикрепленная к земле, становится неизменяемой, если недостающие связи компенсированы дополнительными

опорными связями. Такие системы, неизменяемые только на опорах, называются *связанными*.

С точки зрения влияния на изменяемость системы связи могут быть необходимыми, лишними и ложными.

Необходимая связь – это такая связь, устранение которой изменяет кинематическую природу системы: неизменяемая система переходит в изменяемую или мгновенно изменяемую; мгновенно изменяемая система переходит в изменяемую; изменяемая система переходит в изменяемую со степенью изменяемости на единицу выше.

Лишняя связь – это такая связь, устранение которой не меняет кинематической природы системы.

Ложная связь (в мгновенно изменяемой системе) – это связь, допускающая только бесконечно малые относительные перемещения дисков.

1.2.3. Анализ изменяемости плоских систем

Если один из дисков, к которому должны быть присоединены остальные $D - 1$ дисков, принять за неподвижный, то необходимо уничтожить связями их $3(D - 1)$ степени свободы по отношению к первому диску. Допустим, что диски соединены C стержнями, $Ш$ шарнирами и $П$ припайками. Эти связи уничтожают $C + 2Ш + 3П$ степеней свободы. Могут быть различные соотношения

$$3(D - 1) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} C + 2Ш + 3П$$

для свободных систем и

$$3D \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} C + 2Ш + 3П + C_{\text{оп}}$$

для прикрепленных к земле ($C_{\text{оп}}$ – число опорных связей).

При верхнем знаке неравенства система геометрически изменяема:

$$И = 3(D - 1) - C - 2Ш - 3П, \quad И = 3D - C - 2Ш - 3П - C_{\text{оп}}$$

При знаке равенства имеем *систему с достаточным числом связей*, при нижнем знаке неравенства – *систему с лишними связями*. Эти условия являются *необходимыми*, но *недостаточными* для неизменяемости системы, так как связи могут быть размещены неправильно. Необходимо провести дополнительно анализ геометрической структуры сооружения. Он основывается на принципах образования систем из двух и трех дисков.

Балка ABC (рис. 1.2.3) представляет собой диск, прикрепленный к земле тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке, а потому

она неизменяема. Рассматривая теперь землю и балку ABC как один диск, присоединим к нему балку DEF с помощью двух опорных стержней и стержня CD , которые не пересекаются в одной точке. Следовательно, система в целом неизменяема и имеет минимум связей.

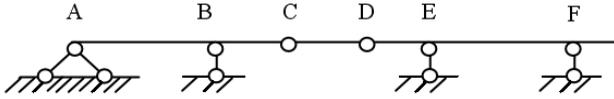


Рис. 1.2.3. Неизменяемая система

Система, показанная на рис. 1.2.4, хотя и обладает достаточным числом связей, изменяема, так как второй диск присоединен только шарниром.

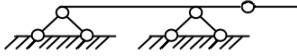


Рис. 1.2.4. Изменяемая система

На основе принципа возможных перемещений можно доказать, что реакции необходимых связей неизменяемых и изменяемых систем, находящихся в равновесии, если их определять по недеформированному состоянию системы, статически определимы, а реакции лишних связей статически неопределимы.

Степень статической неопределимости системы обуславливается количеством лишних неизвестных реакций связей между дисками сверх определяемых по уравнениям статики:

$$Л = С + 2Ш + 3П - 3(Д - 1);$$

$$Л = С + 2Ш + 3П + С_{оп} - 3Д.$$

Для систем с шарнирными соединениями число шарниров равно $Ш = 2Д - У$ ($У$ – число узлов), поскольку в каждом узле шарниров на единицу меньше, чем примыкающих к нему дисков. Полученные ранее соотношения принимают вид

$$2У \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} Д + 3;$$

$$2У \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} Д + С_{оп}.$$

Существует также статический метод исследования изменяемости системы. Если число неизвестных реакций связей меньше числа уравнений статики, то решения не единственные и система изменяемая.

Если число неизвестных равно числу уравнений, то система статически определима и в то же время неизменяема. Исключение составляет случай, когда детерминант системы уравнений равен нулю. *Стремление реакций связей к бесконечности присуще мгновенно изменяемой системе.*

Если число неизвестных больше числа уравнений (статически неопределимая система), то вопрос об изменяемости системы решается после приведения ее к статически определенной.

Условия статического метода являются не только необходимыми, но и достаточными. Это объясняется тем, что в связи с составлением уравнений равновесия учитывается не только число элементов системы и их связей, но и расположение элементов в системе, т.е. учитывается структура последней.

1.3. Общие методы составления уравнений равновесия

1.3.1. Два основных метода

Остановимся на статическом методе составления уравнений равновесия. Расчет будем вести по недеформированной схеме.

Метод равновесия дисков. Освобождаются связи, соединяющие диски, и их действие на последние компенсируется приложением соответствующих сил к дискам. После этого для каждого диска по условиям статики составляются уравнения равновесия (линейные алгебраические). Определив реакции связей, каждый диск рассматривают как неизменяемую систему и определяют внутренние усилия.

Метод равновесия узлов. В шарнирном соединении каждый стержень можно рассматривать как связь первого типа, содержащую продольную силу. Узлы отсекают от дисков и опор, которые компенсируются соответствующими силами сопротивления. После этого для каждого узла по условиям статики составляются уравнения равновесия.

1.3.2. Пути и способы упрощения уравнений равновесия

При освобождении всех связей системы в уравнения равновесия войдут в качестве неизвестных все силы сопротивления связей. Это приводит к громоздкости уравнений. В связи с этим возникает две проблемы: 1) уменьшение числа уравнений равновесия, что связано с уменьшением числа искоемых неизвестных; 2) упрощение уравнений за счет разделения в них неизвестных.

Рассмотрим сначала первую проблему. Одним из путей ее решения является использование условий симметрии. Из трех видов симметрии (грузовая, геометрическая, упругая) при составлении уравнений равновесия важную роль играют лишь первые два. Из условий симметрии вытекают два важных положения:

а) силы сопротивления в симметрично расположенных связях также симметричны и притом прямо, если нагрузка прямо симметричная, и обратно, если нагрузка обратно симметричная;

б) на оси симметрии системы из всех внутренних усилий при прямо симметричной нагрузке не равны нулю только прямо симметричные усилия, а при обратно симметричной нагрузке – только обратно симметричные усилия.

Другой путь состоит в том, что освобождаются не все связи, с помощью которых образована система, а лишь некоторые из них.

Метод составления уравнений равновесия без расчленения системы. Отделим систему от опор и выразим их действие реактивными силами. Кроме условий равновесия системы в целом, должны быть выполнены такого же рода условия для отдельных частей. Последние состоят в равенстве нулю тех усилий, которые не удерживаются связями между дисками. Так, для дисков, соединенных неподвижными шарнирами, должны быть равны нулю суммы моментов сил, расположенных по одну сторону от шарнира, относительно трех осей в пространстве и одной оси на плоскости.

Для плоской системы (рис. 1.3.1,а) после освобождения ее от опор (рис. 1.3.1,б) получаем всего пять уравнений равновесия (два по условиям равенства нулю моментов в шарнирах и три по условиям равновесия системы в целом).

Идея метода находит использование и в тех случаях, когда необходимо определить внутренние усилия в каких-либо сечениях. Система расчленяется на несколько частей сечениями в тех местах, где определяются внутренние усилия (рис. 1.3.1,в). Последние присоединяются к внешним силам каждой части, для которой уравнения равновесия составляются рассмотренным выше методом.

Возможно и неполное освобождение связей в сечениях. В качестве неизвестных выступают отдельные усилия в некоторых сечениях системы (рис. 1.3.1,г). Шесть неизвестных усилий (пять реакций и момент в сечении) определяются из системы шести уравнений, из которых три составляются по условиям равенства нулю моментов в шарнирах и три – по условиям равновесия системы в целом.

Метод замены связей. Уравнения равновесия составляются для сил сопротивления в минимальном числе связей, избранных так, чтобы после определения этих сил можно было бы просто найти усилия во всех остальных элементах системы. Преобразованную систему называют заменяющей. Действие устраненных связей заменяется их реакциями. Реакции наложенных связей принимаются равными нулю.

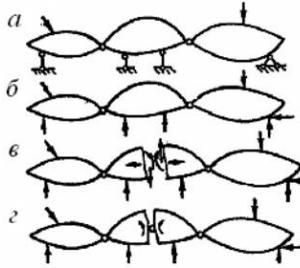


Рис. 1.3.1. Плоская система:
a – рассматриваемая система, *б* – система, освобожденная от опор,
в – расчлененная система, *г* – система с введенным шарниром
и освобожденная от связей

В предлагаемом примере (рис. 1.3.2) заменяющая система создается путем освобождения связи 1 и наложения связи 1'. При этом система остается неизменяемой. Эквивалентность системы будет при условии, что по линии связи 1 действует усилие X_1 (подлежащее определению), а усилие в связи 1' (S'_1) равно нулю. Из последнего условия и определяется X_1 .

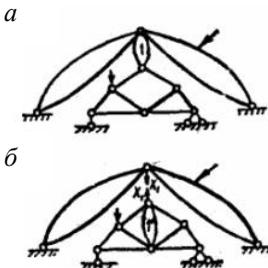


Рис. 1.3.2. Пример заменяющей системы:
a – рассматриваемая система, *б* – заменяющая система

Обратим внимание на значительное упрощение расчета вследствие замены сложной системы двумя простыми. В нижней системе определяем усилие S'_{1F} в связи 1' от действия внешней нагрузки и усилие $\overline{S'_1}$ в той же связи от действия силы $X_1=1$. Из уравнения $\overline{S'_1}X_1 + S'_{1F} = 0$

определяется неизвестное усилие X_1 .

Рассмотрим теперь решение второй проблемы, а именно способы упрощения уравнений равновесия разделением неизвестных.

Рациональный выбор порядка рассмотрения равновесия элементов системы. Расчет пространственной системы с шарнирными соединениями начинают с узла, где сходится не более трех стержней; затем переходят к узлу, в котором снова не более трех неизвестных усилий. При этом для каждого узла число уравнений совпадает с чис-

лом неизвестных усилий. Расчет плоской системы начинаем с узла, в котором сходится не более двух стержней и т.д.

Использование структурной схемы. Это позволяет лучше понять механику сопротивления системы действию внешних сил, выделить в ней основные несущие элементы.

В системе, показанной на рис. 1.3.3,*а*, основными являются крайние балки: выход из строя хотя бы одной из них приводит к обрушению средней балки. Наоборот, обрушение средней балки не повлечет за собой выхода из строя крайних. Этажная схема (рис. 1.3.3,*б*) отражает характер взаимодействия частей системы и предопределяет порядок их расчета. Сначала рассчитывают балки верхнего этажа, затем переходят к нижнему, передавая на него силы взаимодействия с верхним этажом.

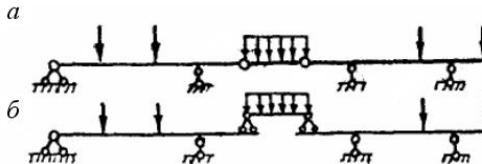


Рис. 1.3.3. Использование структурной схемы:
а – рассматриваемая система, *б* – этажная схема

Рациональный выбор условий равновесия. Для идеального разделения неизвестных в уравнениях равновесия надо выбирать: а) такую точку или ось моментов, через которую проходят все неизвестные, кроме одного искомого; б) такую ось проекций, которая нормальна к направлениям всех неизвестных, кроме одного искомого.

Например, определяя усилия в стержнях пространственного шарнирного узла (рис. 1.3.4) следует ось проекций один раз направить нормально к плоскости 12, содержащей стержни 1 и 2, другой – нормально к плоскости 13, третий – нормально к плоскости 23. Каждый раз получаем уравнение с одним неизвестным.



Рис. 1.3.4. Пространственный шарнирный узел

Этот прием целесообразно расширить за счет рационального выбора составляющих сил сопротивления. В системе, приведенной на рис. 1.3.5, каждую опорную реакцию необходимо представить двумя

составляющими, из которых одна расположена на линии, соединяющей центры опорных шарниров. Это позволяет исключить ее из уравнений, составленных на основании равенства нулю моментов относительно точек опор.

Использование ЭВМ. Процесс расчета стержневых систем с использованием ЭВМ можно разбить на два этапа: логический и механический (арифметический). Под логическим этапом понимается процесс выбора расчетной схемы и построение алгоритма расчета. Эта работа должна выполняться квалифицированным специалистом. Механический этап состоит в выполнении числовых операций и может выполняться оператором.

Решение многих задач строительной механики основано на использовании системы линейных уравнений при применении линейных соотношений и принципа независимости действия сил. Эти уравнения особенно компактно и просто можно представить в матричной форме в виде одной строки, куда входит *матрица коэффициентов при неизвестных*. Для представления совокупности законов изменения усилий в сооружении вводят *матрицу влияния усилий*. Деформированное состояние упругой системы фиксируют в виде *матрицы-столбца перемещений*.

Систему линейных алгебраических разрешающих уравнений можно привести к стандартному виду. Однако конкретное представление таких систем уравнений, соответствующее частным видам конструкций, может оказаться весьма трудоемким. Основные трудности в построении разрешающих уравнений объясняются большой сложностью и разнообразием топологии, которые, как правило, характерны для стержневых систем. Существенное значение приобретает совершенствование алгоритмов расчета отдельных классов систем.

1.4. Линии влияния и их применение

1.4.1. Понятие о подвижной нагрузке

Подвижная нагрузка – нагрузка, которая может занимать различное положение на сооружении (например, вес поезда, автомобиля, мостового крана, скопления людей). На характер изменения внутренней силы, перемещения, деформации влияют свойства конструкции, нагрузки и самой изучаемой величины.

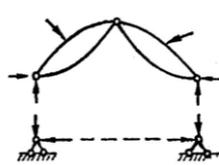


Рис. 1.3.5. Плоская система

Если последняя изменяется однозначно, то она имеет нулевое значение при входе и выходе нагрузки и содержит наибольшее абсолютное значение в промежуточной стадии. Если изучаемая величина двузначна, то в промежуточной стадии будут максимальное и минимальное значения. Когда подвижная нагрузка содержит тяжелые и легкие грузы, различным образом чередующиеся между собой, возможно несколько максимумов и минимумов изучаемой величины, а также различного рода угловые точки и разрывы первого рода с одной или несколькими переменными знака.

Положения нагрузки, при которых имеют место наибольшие величины, называются *расчетными*, а сами значения этих величин – *расчетными значениями*.

1.4.2. Методы определения расчетного положения подвижной нагрузки

Общий метод состоит в том, что подвижная нагрузка на конструкции рассматривается как единое целое и фиксируется на ней некоторой текущей координатой, в зависимости от которой составляется выражение искомой величины. По нему аналитически или графически находятся расчетные значения и соответствующие им расчетные положения нагрузки.

Этот метод распространяется на все системы, независимо от того, применим к ним или неприменим принцип независимости действия сил. Однако при большом количестве различных нагрузок определение наибольшего и наименьшего значений исследуемой величины становится затруднительным.

Второй метод основан на широком использовании принципа независимости действия сил. Он состоит в определении выражения исследуемой величины при действии единичного подвижного груза и в использовании этого выражения для случая какого угодно числа грузов, отличных от единицы.

Линия, ординаты которой выражают значение какой-либо величины (изгибающего момента, перемещения в данной точке системы и т.д.) в зависимости от положения единичной силы постоянного направления, называется *линией влияния*.

Размерность ординат линии влияния определяется частным от деления размерности изучаемой величины на размерность силы. Ординаты линий влияния опорных реакций и поперечных сил имеют размерность H/H , т.е. выражаются отвлеченными числами; ординаты ли-

нии влияния изгибающего момента имеют размерность Н·м/Н = м и т.д.

Итак, основное назначение линий влияния состоит в установлении расчетного положения подвижной нагрузки. А далее по ним можно определить и само расчетное значение изучаемой величины.

При неподвижных нагрузках использование линий влияния имеет эффект, когда возможно большое число их комбинаций.

Сравним линию влияния с эпюрой. При построении линии влияния сечение неподвижно, положение груза меняется; при построении эпюры меняется положение сечения, нагрузка неподвижна.

1.4.3. Статический метод построения линий влияния

В статическом методе используются различные приемы определения по законам статики реакций связей в намеченном сечении от силы $F=1$, приложенной на некотором расстоянии x от начала координат. С помощью аналитического выражения линии влияния строится график.

Построим линии влияния опорных реакций R_A и R_B , в простой балке (рис. 1.4.1,а). Из уравнений

$$\sum M_B = -R_A l + F(l - x) = 0,$$

$$\sum M_A = R_B l - Fx = 0;$$

находим

$$R_A = (l - x) / l, \quad R_B = x / l.$$

При $x = 0$ $R_A = 1$, $R_B = 0$;

при $x = l$ $R_A = 0$, $R_B = 1$.

Линии влияния R_A и R_B даны на рис. 1.4.1,б, в.

Ордината линии влияния реакции дает величину последней в тот момент, когда подвижный груз $F = 1$ расположен в точке, которой соответствует данная ордината. Выражения для изгибающего момента M_C и поперечной силы Q_C зависят от того, где расположен груз, слева или справа от точки C (рис. 1.4.2,а). Поставим сначала груз $F = 1$ слева от точки сечения C ($0 \leq x \leq a$). Тогда $M_C = R_B \cdot b$, $Q_C = -R_B$. Следовательно, линии влияния на участке $0 \leq x \leq a$ можно построить, используя линию влияния реакции R_B . Поставим

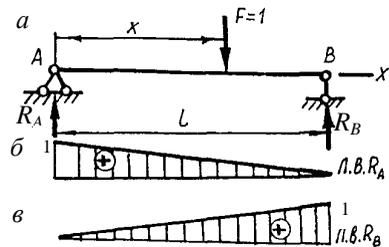


Рис. 1.4.1. Линии влияния опорных реакций: а – схема балки, б, в – линии влияния R_A и R_B

затем груз справа от сечения C ($a \leq x \leq l$). Тогда $M_C = R_A a$, $Q_C = R_A$.
 Линии влияния на участке $a \leq x \leq l$ строим, используя линию влияния реакции R_A . Линии влияния M_C и Q_C даны на рис. 1.4.2, б, в.

Полученные линии влияния момента и поперечной силы в свою очередь находят использование при построении более сложных линий влияния, какие встречаются при исследовании внутренних усилий в ферме, арке и других системах.

Построим линии влияния M_C и Q_C для сечения C консоли (рис. 1.4.3, а). При движении силы $F = 1$ на участке $0 \leq x \leq l - a$ внутренние силы в точке C равны нулю.

При движении силы $F = 1$ на участке $l - a \leq x \leq l$ линии влияния – линейные графики: $M_C = -x + l - a$; $Q_C = 1$ (рис. 1.4.3, б, в).

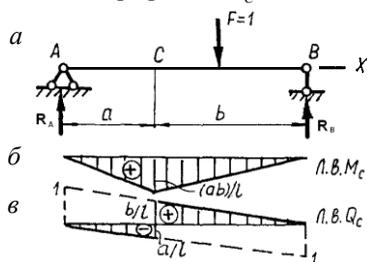


Рис. 1.4.2. Линии влияния внутренних усилий в простой балке:

а – схема балки, б – линия влияния изгибающего момента, в – линия влияния поперечной силы

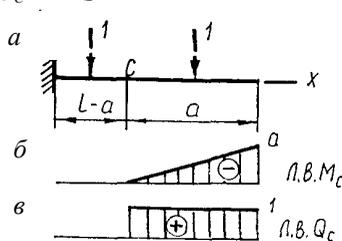


Рис. 1.4.3. Линии влияния внутренних усилий в консоли:

а – схема балки, б – линия влияния изгибающего момента, в – линия влияния поперечной силы

1.4.4. Определение усилий по линиям влияния

Пусть уравнение линии влияния величины S будет $y = f(x)$. Тогда

$$S = \sum_i F_i y_i .$$

Влияние пары сил $F_1 = -1/a$ и $F_2 = 1/a$, соответствующей единичному моменту (рис. 1.4.4), на величину S выражается формулой

$$S = -\frac{1}{a} f(x) + \frac{1}{a} f(x+a) = \frac{f(x+a) - f(x)}{a} = \operatorname{tg} \varphi .$$

В пределе ($a \rightarrow 0$)

$$S = \frac{df(x)}{dx} ,$$

т.е. производная от линии влияния какой угодно величины по независимой переменной x (кривая тангенсов углов наклона касательной к линии влияния) представляет собой построенную в функции от той же переменной линию влияния, выражающую влияние движущейся сосредоточенной пары с моментом, равным единице. Вообще

$$S = \sum_i M_{ei} [f'(x)]_i.$$

Если в точке приложения какой-нибудь силы F_i (момента M_{ei}) линия влияния имеет разрыв, то определяемая величина будет иметь два значения в зависимости от того, где рассматривать эту силу, левее или правее разрыва.

В случае распределенной нагрузки, рассматривая элементарную силу $q(x)dx$ как сосредоточенную (рис. 1.4.5,а), получим по линии влияния (рис. 1.4.5,б)

$$dS = [q(x)dx]y; \quad S = \int_a^b q(x)ydx.$$

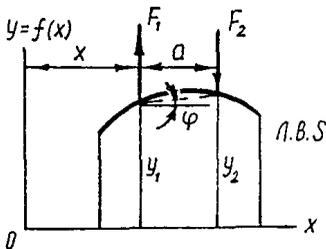


Рис. 1.4.4. Случай приложения пары сил

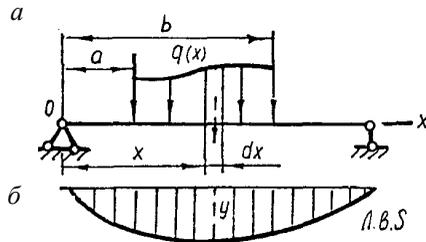


Рис. 1.4.5. Случай приложения распределенной нагрузки:
а – схема нагруженной балки,
б – линия влияния величины S

Если $q(x) = q = \text{const}$, то $S = q \int_a^b ydx = q \omega_a^b$, где ω_a^b – площадь фигуры, ограниченной линией влияния, на участке действия нагрузки q .

1.4.5. Линии влияния при узловой передаче нагрузки

Рассмотрим случай, когда нагрузка приложена не к основной части системы, а к дополнительной (рис. 1.4.6). Через опоры A и B передаются сосредоточенные давления, равные $(l-x)/l$ и x/l . При этом

$$S = 1 \cdot y = \frac{l-x}{l} y_a + \frac{x}{l} y_b.$$

Это уравнение прямой, соединяющей ординаты y_a и y_b линии влияния S , построенной для непосредственного действия нагрузки. Ординаты этой прямой и есть ординаты линии влияния S на участке AB .

Итак, для построения линии влияния, отвечающей действию узловой нагрузки, необходимо спроектировать узлы на линию влияния, построенную для случая непосредственной передачи нагрузки, и проекции смежных узлов соединить прямыми линиями. Это правило используется, в частности, при построении линий влияния усилий в фермах.

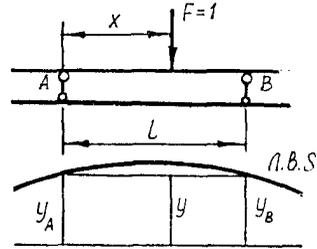


Рис. 1.4.6. Случай приложения нагрузки к дополнительной части системы

1.5. Шарнирные фермы

1.5.1. Понятие о фермах и их классификация

Ферма – стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой, если в ней все жесткие узлы заменить шарнирными. Как показывают сравнительные расчеты, при действии узловой нагрузки усилия в стержнях фермы с жесткими узлами мало отличаются от усилий в стержнях шарнирной фермы, которую и будем рассматривать в дальнейшем.

Так как нагрузка приложена в узлах, то по условию равновесия невесомого стержня ab (рис. 1.5.1) на него со стороны узлов действуют равные и противоположные по направлению силы S_{ab} и S_{ba} . Стержни целесообразно делать прямыми. В этом случае они будут испытывать только продольные усилия. В кривом стержне, показанном штрихами, возникают также поперечные усилия и изгибающие моменты.

Назначение фермы, по существу, такое же, как и балки. Известно, что в последних нормальные напряжения распределяются по сечению неравномерно. Когда стержень работает только на продольные усилия,

материал можно использовать более выгодно. Благодаря этому ферма получается более легкой, чем балка.

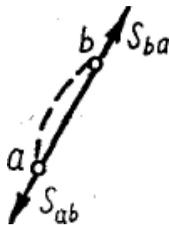


Рис. 1.5.1. Невесомый стержень ab

Кроме плоских ферм, у которых оси всех стержней расположены в одной плоскости, применяются пространственные фермы, которые не обладают этим признаком. Их расчет часто сводится к расчету плоских ферм.

Расстояние между осями опор фермы называется *пролетом*. Стержни, расположенные по внешнему контуру фермы, называются *поясными* и образуют *пояса*; стержни, соединяющие пояса, образуют *решетку* и называются: вертикальные – *стойками*, наклонные – *раскосами*. Расстояние между соседними узлами любого пояса фермы (обычно измеряемое по горизонтали) называется *панелью*.

Классификация ферм может быть произведена по нескольким признакам, из которых выделим два.

По очертанию поясов различают фермы с поясами параллельными и полигональными (или ломаными).

По типу решетки различают фермы с простой решеткой (раскосной, треугольной) и сложной (многораскосной). Раскосная решетка (рис. 1.5.2,*а*) – это зигзагообразная решетка, состоящая попеременно из стоек и раскосов. Треугольная решетка (рис. 1.5.2,*б*) – это зигзагообразная решетка, состоящая только из раскосов. Она может иметь дополнительные стойки (показаны штрихами), которые не входят в состав основного зигзага. Сложная решетка может быть двухраскосная

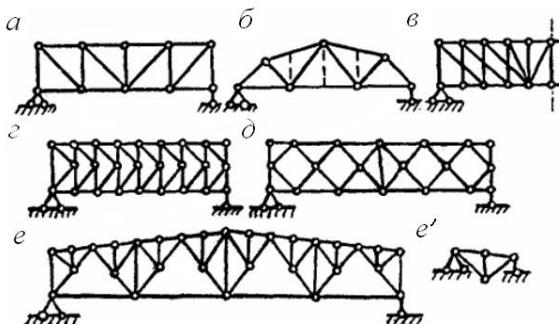


Рис. 1.5.2. Типы решетки ферм:
а – раскосная, *б* – треугольная, *в* – двухраскосная, *г* – полураскосная,
д – ромбическая; *е* – составная (шпренгельная), *е'* – шпренгель

(рис. 1.5.2,в), полураскосная (рис. 1.5.2,з), ромбическая (рис. 1.5.2,д). Существуют также фермы с составной решеткой (рис. 1.5.2, е), включающей простую основную решетку и дополнительные элементы (шпренгели, рис. 1.5.2,е'), предназначенные для разделения большой панели на меньшие.

Для неизменяемости фермы необходимо: а) достаточное количество стержней в целом; б) рациональное распределение их с позиций обеспечения достаточности в отдельных частях.

1.5.2. Расчет по методу вырезания узлов

Анализ структуры ферм показывает, что в ферме, опирающейся на три опорных стержня, можно определить все усилия последовательным вырезанием узлов (т.е. существует такой порядок обхода узлов, при котором в каждом уравнении равновесия встречаются только два неизвестных усилия), если ферма образована из треугольника путем последовательного присоединения двухстержневых узлов.

Метод вырезания узлов позволяет установить некоторые правила для усилий в стержнях:

1. В ненагруженном стержневом узле (рис. 1.5.3,а) усилия в стержнях равны нулю (оба стержня нулевые). Это следует из уравнений проекций на оси, перпендикулярные стержням.

2. Если в ненагруженном узле сходятся три стержня (рис. 1.5.3,б), причем два из них лежат на одной прямой, то усилия в последних равны друг другу по величине и знаку, а третий стержень нулевой.

Заменив N_1 и N_2 равнодействующей R , получим случай 1. Значит, $N_3 = 0$, $R = 0$. В то же время $R = 0$, если $N_1 = N_2$.

3. Если в узле сходятся три стержня, из которых два лежат на одной прямой, и есть нагрузка F , действующая по оси третьего стержня (рис. 1.5.3,в), то усилие в последнем равно нагрузке, а усилия в двух других стержнях равны друг другу по величине и знаку.

Заменив N_1 и N_2 равнодействующей R_1 , а N_3 и F равнодействующей R_2 , получим случай 1. Значит, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$. В то же время $R_2 = 0$, если $N_3 = F$.

Каждому узлу, вырезанному из фермы, соответствует отдельный замкнутый силовой многоугольник. Английский ученый Д. Максвелл

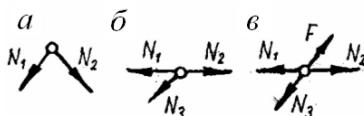


Рис. 1.5.3. Типы узлов:
а – двухстержневой без нагрузки, б
(в) – трехстержневой без нагрузки (с
нагрузкой)

и итальянский геометр Л. Крмона предложили графическое построение усилий на одном чертеже, причем каждое усилие чертится лишь один раз.

При использовании метода вырезания узлов оси проекций следует выбирать так, чтобы получались уравнения с разделенными неизвестными.

1.5.3. Расчет по методу сечений

Этот способ применяется, главным образом, в тех случаях, когда удастся расщепить ферму на две части так, чтобы при этом перерезанными оказались три ее стержня, направления осей которых не пересекаются в одной точке. По сравнению с методом вырезания узлов этот метод менее подвержен неточностям ввиду отсутствия цепной зависимости между неизвестными. Кроме того, при определении усилия в каком-либо стержне к нему не надо добираться издалека.

Рассмотрим ферму (рис. 1.5.4), в которой по методу сечений определим усилия в стержнях 2 – 4, 1 – 3 и 2 – 3. С этой целью проведем сечение I – I через эти стержни, а усилия обозначим соответственно N_{24} , N_{13} и N_{23} . Каждая из полученных двух частей фермы находится в равновесии под действием приложенных внешних сил, включая и опорные реакции, и продольных сил, введенных вместо рассеченных стержней.

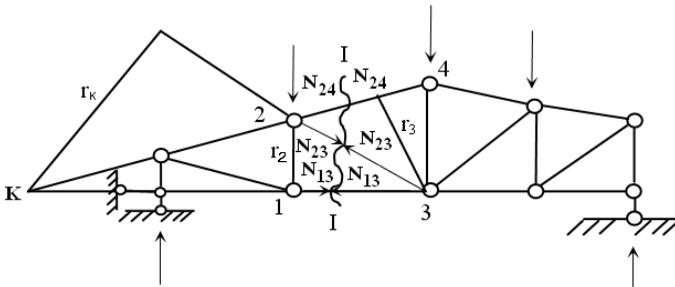


Рис. 1.5.4. Расчетная схема фермы

Рассмотрим левую часть и составим для нее уравнения равновесия. С точки зрения идеального разделения неизвестных целесообразно выразить условия равновесия в форме уравнений моментов относительно точек попарного взаимного пересечения сил N_{24} , N_{13} и N_{23} :

$$\begin{aligned} \Sigma M_3 = 0: & \quad -N_{24} r_3 + \Sigma M_{F3} = 0; \\ \Sigma M_2 = 0: & \quad N_{13} r_2 + \Sigma M_{F2} = 0; \\ \Sigma M_K = 0: & \quad -N_{23} r_K + \Sigma M_{FK} = 0, \end{aligned}$$

где ΣM_{F3} , ΣM_{F2} , и ΣM_{FK} – суммы моментов от внешних сил, включая опорные реакции, относительно точек 3, 2 и K .

Таким образом,

$$N_{24} = \Sigma M_{F3} / r_3; \quad N_{13} = -\Sigma M_{F2} / r_2; \quad N_{23} = \Sigma M_{FK} / r_K.$$

Естественно, такой же результат получим, рассматривая правую часть фермы.

При параллельных поясных стержнях точка K лежит в бесконечности. Тогда вместо уравнения моментов следует использовать уравнение проекций. Усилие в раскосе можно найти из условия $\Sigma Y = 0$.

1.5.4. Матричная форма определения усилий

Матричное представление расчета фермы имеет вид:

$$\bar{S} = L_s \bar{F},$$

где \bar{S} – вектор усилий в стержнях фермы; L_s – матрица влияния усилий в стержнях фермы; \bar{F} – вектор нагрузки.

Формирование матрицы влияния усилий L_s упрощается благодаря тому, что нагрузка на ферму обычно передается в определенных точках – ее узлах. Матрицу L_s можно получить, вычислив усилия в стержнях от последовательного нагружения узлов фермы единичными силами.

Вычисление элементов матрицы L_s иногда удобно производить через матрицы влияния моментов и поперечных сил в балке. Для этого достаточно использовать имеющиеся зависимости между усилиями в стержнях фермы и моментами и поперечными силами в сечениях балки того же пролета.

1.6. Трехшарнирная арка (расчет и проектирование)

Система, состоящая из двух дисков, соединенных между собой шарниром и с землей двумя неподвижными шарнирами, называется *трехшарнирной*. Землю можно рассматривать как третий диск; соединение же трех дисков (D) тремя шарнирами (Π), не лежащими на одной прямой, соответствует принципам образования неизменяемых систем. Подсчитав число лишних связей:

$$L = 2\Pi - 3(D - 1) = 2 \cdot 3 - 3(3 - 1) = 0,$$

устанавливаем, что трехшарнирные системы статически определимы.

Если средний шарнир расположен выше линии опорных шарниров, система называется *арочной*. В отличие от балки трехшарнирная арка является распорной системой, что означает возникновение наклонных опорных реакций от вертикальной нагрузки. Она имеет

форму кривого стержня, обращенного выпуклостью в направлении, противоположном направлению действия основной нагрузки.

Опорные шарниры называют *пятовыми*, а средний – *ключевым*. Расстояние между центрами опорных шарниров называется *пролетом* арки (l), а расстояние от ключевого шарнира до прямой, соединяющей опорные шарниры, – *стрелой подъема* (f). Арка, у которой опоры расположены на разных уровнях, называется *ползучей*.

Рассмотрим аналитический способ определения опорных реакций и внутренних усилий в трехшарнирной ползучей арке, ограничившись нагрузкой в виде вертикальных сил (рис. 1.6.1). Реакции четырех опорных связей определяются из трех уравнений равновесия всей системы и уравнения, отражающего условие равенства нулю суммы моментов сил, расположенных по одну сторону от ключевого шарнира:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0: & \quad R_B l - \Sigma F_i a_i = 0; \\ \Sigma M_B = 0: & \quad -R_A l + \Sigma F_i b_i = 0; \\ \Sigma X = 0: & \quad H'_A \cos \alpha - H'_B \cos \alpha = 0; \\ \Sigma M_c = 0: & \quad -R_A l_1 + \Sigma F_i (l_i - a_i) + H'_A f = 0. \end{aligned}$$

Индекс «лев» в последнем уравнении означает, что берутся моменты левой части арки. Два первых слагаемых выражают момент в соответствующей простой балке M_c^δ с обратным знаком. Итак, в результате решения уравнений получаем следующие выражения реакций:

$$R_A = (\Sigma F_i b_i) / l; \quad R_B = (\Sigma F_i a_i) / l; \quad H'_A = H'_B = H' = M_c^\delta / f.$$

Как видим, распор зависит исключительно от расположения шарниров A , B и C , а форма оси арки не оказывает на него влияния.

Разложим силу H' на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$H = H' \cos \alpha; \quad T = H' \sin \alpha = H \operatorname{tg} \alpha.$$

Полные вертикальные составляющие реакций при этом равны:

$$V_A = R_A + H \operatorname{tg} \alpha; \quad V_B = R_B - H \operatorname{tg} \alpha.$$

На практике наиболее часто встречается арка с опорами, расположенными на одном уровне ($\alpha = 0$). В этом случае

$$H' = H, \quad T = 0, \quad V_A = R_A, \quad V_B = R_B.$$

Выведем формулы для внутренних усилий в произвольном сечении арки (рис. 1.6.2,а). В произвольной точке K проведем мысленно сечение, перпендикулярное касательной к оси арки, и рассмотрим левую часть под действием приложенных сил, включая опорные реакции, и внутренних усилий M_K , Q_K и N_K (рис. 1.6.2,б).

Из условия равновесия рассматриваемой части составим три уравнения для определения трех неизвестных внутренних усилий. Для

удобства используем уравнение моментов относительно точки K и два уравнения проекций – на нормаль и касательную к оси в той же точке:



Рис. 1.6.1. Трехшарнирная арка

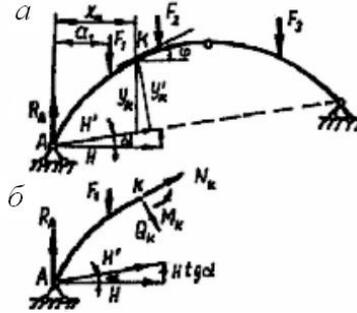


Рис. 1.6.2. Внутренние усилия в арке:
а – расчетная схема, б – усилия в сечении K

$$\begin{aligned}
 & -R_A x_K + \sum_{\text{лев}} F_i (x_K - a_i) + H y'_K + M_K = 0; \\
 & (R_A - \sum_{\text{лев}} F_i) \cos \varphi - H \sin \varphi + H \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi - Q_K = 0; \\
 & (R_A - \sum_{\text{лев}} F_i) \sin \varphi + H \cos \varphi + H \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi + N_K = 0.
 \end{aligned}$$

Индекс «лев» означает, что берутся силы левее сечения. Принимая во внимание, что выражения

$$\begin{aligned}
 R_A x_K - \sum_{\text{лев}} F_i (x_K - a_i) &= M_K^{\circ}; \\
 R_A - \sum_{\text{лев}} F_i &= Q_K^{\circ}
 \end{aligned}$$

представляют собой изгибающий момент и поперечную силу в простой балке в точке K , получаем окончательно

$$\begin{aligned}
 M_K &= M_K^{\circ} - H y_K; \\
 Q_K &= Q_K^{\circ} \cos \varphi - H (\sin \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi); \\
 N_K &= -Q_K^{\circ} \sin \varphi - H (\cos \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi).
 \end{aligned}$$

Как видим, изгибающие моменты и поперечные силы в трехшарнирной арке меньше, чем в простой балке. Но зато есть продольная сила, т.е. имеет место изгиб со сжатием. При экономическом сопоставлении арки и балки надо учитывать, что в связи с наличием распора арка нуждается в более массивных опорах, чем балка.

Проектирование рациональной трехшарнирной системы, объем материала которой будет минимальным, начинаем с определения рациональной оси. Ее варьирование при неизменных пролете и стреле подъема не вызывает значительного изменения продольной силы, тогда как момент и поперечная сила меняются существенно. Но именно они и оказывают определяющее влияние на размеры сечений и величину объема. Поэтому минимальный объем следует ожидать при $M = 0$. При вертикальной нагрузке имеем

$$M = M^0 - Hy.$$

Если нагрузка не зависит от очертания арки, то независимой от него оказывается и величина M^0 . Таким образом, уравнение рациональной оси арки имеет вид

$$y = M^0 / H,$$

т.е. рациональная ось арки определяется формой эпюры моментов в простой балке от нагрузки, действующей на арку. При равномерно распределенной нагрузке это будет квадратная парабола.

При постоянной ширине сечения b закон изменения его высоты

$h(x)$ получим из условия равнопрочности

$$N / [bh(x)] = \sigma_{adm},$$

а именно

$$h(x) = N / (b \sigma_{adm}).$$

Полученные выражения y и h определяют конфигурацию рациональной трехшарнирной арки.

Обращение арки в балочную систему производится удалением горизонтальной опорной связи и постановкой стержня между отдельными частями, называемого затяжкой (рис. 1.6.3,а).

Приступая к расчету, удалим затяжку и приложим к арке в точках D и E силы N , соответствующие продольному усилию в затяжке (рис. 1.6.3,б).

Три опорные реакции определяются из трех уравнений равновесия арки (усилия N в них не входят). Значение N определяется из уравнения $\sum M_c = 0$

(или $\sum M_c = 0$).

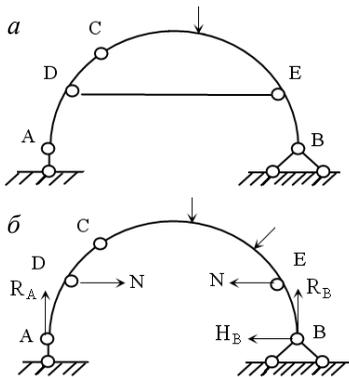


Рис. 1.6.3. Обращение арки:
а – арка с затяжкой, б – балочная система

Расчет криволинейного бруса ведется после этого обычным способом.

Принципы расчета трехшарнирной арки сохраняют силу при расчете трехшарнирных рамы и фермы.

1.7. Многодисковые системы

Расчет стержневой системы осложняется в случае, когда она содержит замкнутые контуры (рис. 1.7.1,а).

Пять неизвестных опорных реакций можно определить из следующих уравнений: трех уравнений равновесия всей системы ($\sum M_K = 0, \sum M_D = 0, \sum M_M = 0$) и двух уравнений равновесия части рамы ($\sum M_N^{лев} = 0$ или $\sum M_N^{прав} = 0; \sum M_P^{лев} = 0$ или $\sum M_P^{прав} = 0$).

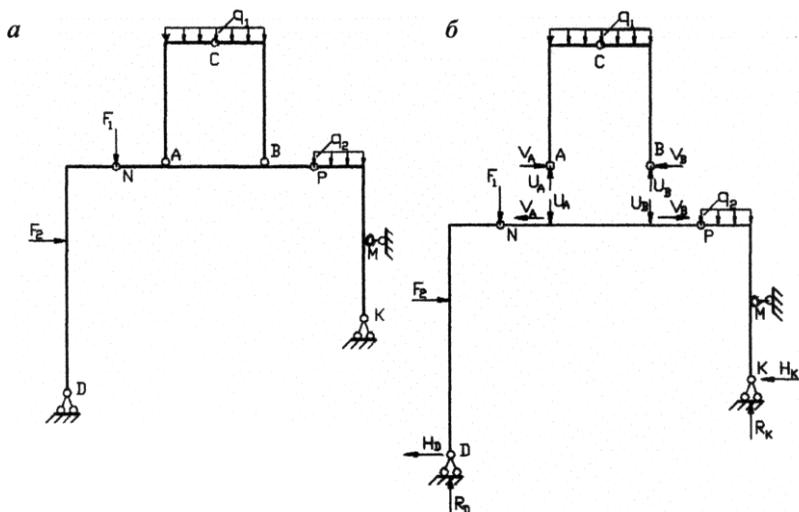


Рис. 1.7.1. Многодисковая система:
а – рассматриваемая система, б – расчетная схема

При расчете замкнутого многодискового контура необходимо обратиться к способу расчленения системы на диски. При этом усилия взаимодействия между ними в шарнирах переходят в разряд неизвест-

ных опорных реакций, равных по величине и противоположных по направлению (рис. 1.7.1,б).

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под статической и кинематической характеристиками связей?
2. Как определяется кратность шарнира?
3. В какие типы опор трансформируются связи при прикреплении системы к земле?
4. Какие правила используются для соединения двух и трех дисков?
5. С какой целью проводят анализ геометрической структуры расчетной схемы сооружения?
6. Как установить статическую определенность и геометрическую неизменяемость многопролетной балки?
7. Какие существуют пути и способы упрощения уравнений равновесия для статически определимых стержневых систем?
8. Какие зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и внешней нагрузкой используются при проверке правильности построения эпюр?
9. Что такое линия влияния? Для чего она используется?
10. Какая разница между эпюрой и линией влияния?
11. Где пересекаются левая и правая ветви линий влияния M для любого сечения простой балки?
12. По каким признакам классифицируются фермы?
13. Какому условию должно удовлетворять сечение фермы, чтобы усилие в искомом стержне можно было определить из уравнения с одним неизвестным?
14. В каких случаях используется уравнение моментов и уравнение проекций при расчете фермы по методу сечений?
15. В каких случаях удобно применить метод вырезания узлов?
16. На какие три категории делятся элементы шпренгельной фермы?
17. Какие преимущества и недостатки имеют фермы по сравнению с балками?
18. Какая арка называется ползучей?
19. Какие уравнения используются для определения реакций в трехшарнирных системах?
20. Как влияет на величину распора арки соотношение пролета и стрелы подъема?

21. Какие преимущества и недостатки имеет арка по сравнению с балкой?

2. ОСНОВНЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1. Энергетические теоремы

Обращаясь к философским категориям непрерывности и прерывности, характеризующим структуру материи, введем соответствующие понятия *континуальных* и *дискретных* систем. Для континуальных систем используется модель сплошного деформируемого твердого тела, описываемая непрерывными функциями напряжений, деформаций и перемещений. Нагрузка также имеет функциональный характер.

Предположим теперь, что на систему, находящуюся в равновесии, действует n сил F_i , приложенных в точках A_i в определенных направлениях. При этом точки A_i перемещаются в положения A'_i . Обозначим через q_i компонент перемещения $A_iA'_i$ по направлению силы F_i . Система сил F_i представляет собой элемент (F_1, F_2, \dots, F_n) n -мерного векторного пространства Λ_F , а система перемещений q_i — элемент (q_1, q_2, \dots, q_n) n -мерного векторного пространства Λ_q .

Предположим также, что напряженное состояние дискретной системы определяется N составляющими σ_i , а совокупность этих составляющих есть элемент $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ N -мерного векторного пространства Λ_σ ; деформированное состояние системы определяется N составляющими ε_i , а совокупность этих составляющих есть элемент $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ N -мерного векторного пространства Λ_ε .

Упругое тело характеризуется, прежде всего, тем, что в определенных температурных условиях при неучете фактора времени существует взаимно однозначная зависимость между компонентами $F(\sigma)$ открытой выпуклой области $\Gamma_F(\Gamma_\sigma)$ пространства $\Lambda_F(\Lambda_\sigma)$ и компонентами $q(\varepsilon)$ открытой выпуклой области $\Gamma_q(\Gamma_\varepsilon)$ пространства $\Lambda_q(\Lambda_\varepsilon)$:

$$F_i = F_i(q_1, q_2, \dots, q_n); \quad q_i = q_i(F_1, F_2, \dots, F_n); \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N); \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N); \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Полагаем, как и раньше, что в естественном состоянии при отсутствии внешних сил перемещения точек системы и составляющие напряжения и деформации равны нулю. В частном случае функции F_i , q_i , σ_i и ε_i могут быть линейными (линейная упругость).

Элементарная работа внутренних сил $d\tilde{U}$ (работа на бесконечно малом этапе деформирования) равна

$$d\tilde{U} = \sum_i \sigma_i d\varepsilon_i.$$

Приращение этой функции с точностью до бесконечно малых второго порядка можно записать ее полным дифференциалом

$$d\tilde{U} = \sum \frac{d\tilde{U}}{d\varepsilon_i} d\varepsilon_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Таким образом,

$$\sigma_i = \partial \tilde{U} / \partial \varepsilon_i.$$

Потенциальная энергия деформации U численно равна \tilde{U} . Следовательно,

$$\sigma_i = \partial U / \partial \varepsilon_i.$$

Вводя в рассмотрение дополнительную энергию U^* , выводим:

$$\varepsilon_i = \partial U^* / \partial \sigma_i.$$

Принцип возможных перемещений имеет выражение:

$$\delta U = \sum_i F_i \delta q_i,$$

где δq_i – вариации возможных перемещений.

Так как первая вариация δ с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна первому дифференциалу, то вариация потенциальной энергии деформации, выраженной через перемещения, равна

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Итак,

$$\sum_i (F_i - \frac{\partial U}{\partial q_i}) \delta q_i = 0,$$

откуда вследствие произвольности вариаций δq_i следует, что

$$F_i = \partial U / \partial q_i,$$

т.е. частная производная потенциальной энергии деформации по одному из перемещений точки равна силе, совпадающей по направлению с перемещением и приложенной в той же точке.

Сформулированное положение представляет собой *теорему Лагранжа*, которая, как и сам принцип возможных перемещений, справедлива для линейно и нелинейно деформируемых систем.

Интегрируя $dU = F_i dq_i$ при условии $U(0) = 0$ и суммируя результаты по i , получаем

$$U = \sum_i \int_0^{q_i} F_i dq_i.$$

В случае $F_i = k_i q_i$ ($k_i = \text{const}$) имеем

$$U = \frac{1}{2} \sum_i F_i q_i,$$

т.е. для линейно деформирующегося тела потенциальная энергия деформации, эквивалентная работе внешних статически нарастающих сил, равна полусумме произведений сил на соответствующие им перемещения.

Сформулированное положение представляет собой *теорему Клапейрона*. Ее аналитическое выражение аналогично по структуре формуле

$$u = \frac{1}{2} \bar{\sigma} \bar{\varepsilon},$$

выражающей удельную потенциальную энергию деформации.

Обращаясь к принципу возможных изменений напряженного состояния, устанавливаем, что

$$q_i = \partial U^* / \partial F_i,$$

т.е. частная производная дополнительной энергии по одной из сил равна перемещению точки приложения этой силы по ее направлению (*теорема Кастильяно*).

Для линейно деформирующегося тела ($U^* = U$)

$$\varepsilon_i = \partial U / \partial \sigma_i, \quad q_i = \partial U / \partial F_i.$$

Ввиду независимости вторых смешанных производных $\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$ и $\frac{\partial^2 U^*}{\partial F_i \partial F_j}$ от порядка дифференцирования, вытекают следующие зависимости:

$$\partial F_i / \partial q_j = \partial F_j / \partial q_i; \quad \partial q_i / \partial F_j = \partial q_j / \partial F_i.$$

В случае линейной связи между силами и перемещениями:

а) первая зависимость выражает *первую теорему Рэлея* – теорему о взаимности реакций: реакция первой связи от единичного перемещения второй связи равна реакции второй связи от единичного перемещения первой связи ($r_{ij} = r_{ji}$);

б) вторая зависимость выражает *теорему Максвелла* – теорему о взаимности перемещений: перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$).

Рассмотрим два случая бесконечно малых произвольных приращений сил F_i и перемещений q_i : dF_i', dq_i' ; dF_i'', dq_i'' , так что

$$dq_i' = \sum_i (\partial q_i / \partial F_j)_0 dF_j'; \quad dq_i'' = \sum_j (\partial q_i / \partial F_j)_0 dF_j'',$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n),$$

где $(\partial q_i / \partial F_j)_0$ – величина производной $\partial q_i / \partial F_j$ при $F_j = F_{j0}$.

Запишем равенство

$$\sum_i dF_i' dq_i'' - \sum_i dF_i'' dq_i' = \sum_i \sum_j dF_i' (\partial q_i / \partial F_j)_0 dF_j'' - \sum_i \sum_j dF_i'' (\partial q_i / \partial F_j)_0 dF_j'$$

и выпишем первые три члена ряда для каждого слагаемого правой части ($i=1, j=1$; $i=1, j=2$; $i=2, j=1$):

$$dF_1' (\partial q_1 / \partial F_1)_0 dF_1'' - dF_1'' (\partial q_1 / \partial F_1)_0 dF_1' + dF_1' (\partial q_1 / \partial F_2)_0 dF_2'' - \\ - dF_1'' (\partial q_1 / \partial F_2)_0 dF_2' + dF_2' (\partial q_2 / \partial F_1)_0 dF_1'' - dF_2'' (\partial q_2 / \partial F_1)_0 dF_1'.$$

Согласно первой теореме Рэля, $(\partial q_1 / \partial F_2)_0 = (\partial q_2 / \partial F_1)_0$ и выписанная сумма, как и вся правая часть равенства, обращается в нуль. В итоге получаем

$$\sum_i dF_i' dq_i'' = \sum_i dF_i'' dq_i'.$$

Это равенство выражает следующую теорему: при некотором состоянии равновесия упругой системы двум различным случаям бесконечно малых приращений сил соответствуют такого рода приращения перемещений, что работа приращений сил первого случая на приращениях перемещений второго случая равна работе приращений сил второго случая на приращениях перемещений первого.

В случае линейной упругости ($F_i = k_i q_i$) имеем

$$dF_i = k_i dq_i = (F_i / q_i) dq_i.$$

После подстановки этих выражений в полученное равенство выведем

$$\sum_i F_i' q_i'' = \sum_i F_i'' q_i'.$$

Это равенство выражает *теорему Бетти* – теорему о взаимности работ для упругого линейно деформирующегося тела: работа первой группы сил на перемещениях по их направлениям, вызванных второй группой сил, равна работе второй группы сил на перемещениях по их направлениям, вызванных первой группой сил.

Представив предшествующее равенство в виде

$$\sum_i dF_i' dF_i'' \frac{dq_i''}{dF_i''} = \sum_i dF_i'' dF_i' \frac{dq_i'}{dF_i'},$$

устанавливаем *принцип независимости действия приращений сил*:

$$dq_i'' / dF_i'' = dq_i' / dF_i',$$

обобщающий принцип независимости действия сил, справедливый для линейно-упругого тела¹.

Еще один вариант теоремы взаимности можно получить, предполагая, что в первом случае получила приращение только сила F_i на величину dF_i и место приложения силы F_j закреплено, а во втором случае получило приращение перемещение q_j на величину dq_j , и сила F_i осталась неизменной. Тогда

$$dF_i dq_j + dF_j dq_i = 0,$$

где dF_j следует рассматривать как реакцию в точке закрепления, а dq_i – как перемещение, вызванное dq_j . В итоге

$$\partial F_j / \partial F_i = -\partial q_i / \partial q_j.$$

В случае линейной связи между силами и перемещениями эта зависимость выражает *вторую теорему Рэлея* – теорему о взаимности реакций и перемещений: единичная реакция связи j от силы $F_i=1$ равна единичному перемещению по направлению силы F_i от перемещения связи $q_j=1$, взятому с противоположным знаком ($r_{ij} = -\delta_{ji}$).

Теоремы взаимности находят практическое использование, в частности, при расчете статически неопределимых систем.

2.2. Определение перемещений линейно деформируемых систем

Воспользуемся теоремой Кастильяно: $q_i = \partial U / \partial F_i$, а потенциальную энергию деформации U вычислим по теореме Клапейрона. Стержень длиной l делим на бесконечно малые элементы длиной ds . На некотором этапе деформирования в сечении с координатой s внутренние усилия равны N, Q_y, Q_z, T, M_y, M_z , а в сечении с координатой $s+ds$ – $N+dN, Q_y+dQ_y, Q_z+dQ_z, T+dT, M_y+dM_y, M_z+dM_z$. Для элемента ds они являются внешними силами. При линейном физическом законе им соответствуют перемещения (с точностью до бесконечно малых второго порядка)

¹ По этому принципу алгебраическая сумма получается для скалярных величин и численных значений векторов (модулей), когда векторы расположены на одной прямой, а геометрическая сумма – для векторных величин, когда векторы проходят через одну точку, но не расположены на одной прямой.

$$\frac{N ds}{EA}, \frac{\alpha_y Q_y ds}{GA}, \frac{\alpha_z Q_z ds}{GA}, \frac{T ds}{GI_p}, \frac{M_y ds}{EI_y}, \frac{M_z ds}{EI_z},$$

где α_y и α_z – коэффициенты, зависящие от формы сечения.

Таким образом,

$$U = \int_l \frac{N^2 ds}{2EA} + \int_l \frac{\alpha_y Q_y^2 ds}{2GA} + \int_l \frac{\alpha_z Q_z^2 ds}{2GA} + \int_l \frac{T^2 ds}{2GI_p} + \int_l \frac{M_y^2 ds}{2EI_y} + \int_l \frac{M_z^2 ds}{2EI_z};$$

$$q_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \int_l \frac{N(\partial N / \partial F_i)}{EA} ds + \int_l \frac{\alpha_y Q_y(\partial Q_y / \partial F_i)}{GA} ds + \int_l \frac{\alpha_z Q_z(\partial Q_z / \partial F_i)}{GA} ds +$$

$$+ \int_l \frac{T(\partial T / \partial F_i)}{GI_p} ds + \int_l \frac{M_y(\partial M_y / \partial F_i)}{EI_y} ds + \int_l \frac{M_z(\partial M_z / \partial F_i)}{EI_z} ds.$$

Если в точке, где определяется перемещение, нет соответствующей ему силы, то надо ее ввести как добавочную (F_D), вычислить производные и лишь в последний момент положить $F_D = 0$.

На основании принципа независимости действия сил внутреннее усилие равно

$$S = \sum_i \bar{S}_i F_i,$$

где \bar{S}_i – усилие в сечении от действия силы $F_i = 1$. Отсюда следует, что

$$\partial S / \partial F_i = \bar{S}_i.$$

Следовательно,

$$q_i = \int_l \frac{N \bar{N}_i}{EA} ds + \int_l \frac{\alpha_y Q_y \bar{Q}_{yi}}{GA} ds + \int_l \frac{\alpha_z Q_z \bar{Q}_{zi}}{GA} ds + \int_l \frac{T \bar{T}_i}{GI_p} ds + \int_l \frac{M_y \bar{M}_{yi}}{EI_y} ds + \int_l \frac{M_z \bar{M}_{zi}}{EI_z} ds.$$

Начало этой зависимости положено английским ученым Д.Максвеллом в 1864г., а внедрение ее в расчеты произведено немецким инженером и ученым-механиком О.Мором в 1874 г.

Для вычисления интегралов в формуле Максвелла–Мора необходимо рассмотреть два состояния стержня: 1) с заданной нагрузкой; 2) с силой $F_i=1$, приложенной в точке, где определяется перемещение, в направлении этого перемещения.

Если величина q_i положительна, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, а если отрицательна, то противоположно этому направлению.

Не всегда все внутренние усилия играют одинаковую роль. Для систем балочного или рамного типа превалирующее значение имеют изгибающие моменты (продольными и поперечными силами можно пренебречь). Для фермы удерживают лишь слагаемое с продольными

силами. На перемещения тонкостенных систем существенное влияние оказывают деформации сдвига.

Интегралы в формуле Максвелла–Мора по существу представляют собой возможную работу внутренних усилий от единичной силы на перемещениях, отвечающих состоянию k . В связи с этим перемещение обозначают q_{ik} . Пусть k будет теперь температурным воздействием. Речь идет исключительно об изменениях температуры по сравнению с ее начальной величиной. Для упрощения расчетов будем полагать, что в пределах любого сечения температура распределяется по закону плоскости, причем по направлению одной из главных центральных осей инерции сечения она постоянна, а по направлению другой – имеет линейное распределение. Линейный температурный график (рис. 2.2.1) можно разбить на два линейных: прямоугольник с высотой t_k (температура по оси стержня – в центре тяжести сечения), двузначный треугольник с разностью ординат $t_k' = \pm (t_1 - t_2)$.

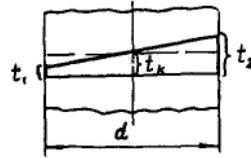


Рис. 2.2.1. Линейный температурный график

Свободное удлинение, вызванное повышением температуры t_k , будет $\alpha t_k dx$, где α – коэффициент линейного расширения; этому удлинению соответствует возможная работа $\overline{N}_i \alpha t_k dx$.

Свободный взаимный поворот сечений $d\vartheta$, вызванный неравномерным нагревом, равен разности между удлинениями крайних волокон, разделенной на расстояние d , т.е.

$$d\vartheta = \pm (\alpha t_1 dx - \alpha t_2 dx) / d = \pm [\alpha (t_1 - t_2) dx] / d = \pm (\alpha t_k' dx) / d,$$

а возможная работа по абсолютной величине равна $(\overline{M}_i \alpha t_k' dx) / d$. В итоге

$$q_{ik} = \int \overline{N}_i \alpha t_k dx + \int \overline{M}_i \alpha t_k' dx / d.$$

Возможная работа усилий $\overline{N}_i, \overline{Q}_i, \overline{M}_i$ на перемещениях, связанных с изменением длины стержня, например, в связи с неточностями при изготовлении элементов системы, равна $\overline{N}_i \Delta s_k + \overline{Q}_i \Delta \tilde{s}_k + \overline{M}_i \Delta \varphi_k$, а перемещение точки плоской системы –

$$q_{ik} = \sum \overline{N}_i \Delta s_k + \sum \overline{Q}_i \Delta \tilde{s}_k + \sum \overline{M}_i \Delta \varphi_k.$$

При смещении опоры k на величину c_k возможная работа равна $\bar{R}_i c_k$, где \bar{R}_i – реакция единичного состояния. При упругоподатливой опоре, характеризующейся коэффициентом жесткости b , добавляется работа реакции $\bar{R}_i (R_k / b)$. Таким образом,

$$q_{ik} = \bar{R}_i c_k + \bar{R}_i (R_k / b).$$

Заметим еще раз, что полученные формулы перемещений справедливы только в случае, когда деформации достаточно малы и оправдывается применение принципа наложения.

2.3. Пути упрощения вычисления перемещений

2.3.1. Интегрирование по правилу Верещагина (способ «перемножения» эпюр)

В 1925 г. студент Московского института инженеров железнодорожного транспорта А.Н.Верещагин предложил упрощение вычисления перемещений по формуле Максвелла–Мора для стержней, состоящих из прямых участков с постоянной в пределах каждого участка жесткостью. Упрощение основано на том, что эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках стержня оказываются линейными.

Положим, на участке длиной l нужно взять интеграл

$$J = \int_0^l f_1(x) f_2(x) dx$$

при условии, что $f_2(x)$ – линейная функция: $f_2(x) = b + kx$. Тогда

$$J = b \int_0^l f_1(x) dx + k \int_0^l x f_1(x) dx.$$

Первый из интегралов представляет собой площадь, ограниченную кривой $f_1(x)$ (рис. 2.3.1,а), или площадь эпюры $f_1(x)$, которую обозначим Ω_1 . Второй интеграл представляет собой статический момент этой площади относительно оси y_1 , т.е. $\Omega_1 x_c$, где x_c – координата центра тяжести первой эпюры. Итак, $J = \Omega_1(b + kx_c)$. Так как $b + kx_c = f_2(x_c)$ (рис. 2.3.1,б), то

$$J = \Omega_1 f_2(x_c).$$

Операция интегрирования заменяется перемножением площади первой эпюры на ординату второй (линейной) эпюры под центром тяжести первой.

Встречающиеся на практике эпюры могут быть, как правило, разбиты на простейшие фигуры: прямоугольник, треугольник, параболу n -й степени и так далее, для которых величину площади Ω и положение центра тяжести можно определить по формулам:

$$\Omega = (hl) / (n + 1), \quad x_c = l / (n + 2)$$

(для прямоугольника $n = 0$, для треугольника $n = 1$).

Определение перемещений от симметричного и обратно симметричного воздействий надо вести раздельно, проводя вычисления только для половины системы. Из свойства ее симметрии вытекает важное правило: *если при «перемножении» эпюр для определения перемещения одна из них симметрична, а другая обратно симметрична, то их «произведение» равно нулю.*

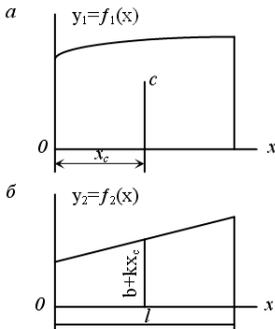


Рис. 2.3.1. Фрагменты эпюр: a – криволинейной, b – линейной

Если жесткость стержня переменная, то эпюру усилий от внешних воздействий надо привести к одной жесткости, умножая ее ординаты на I_0/I , где I_0 – момент инерции одного из сечений стержня.

Если жесткость стержня переменная, то эпюру усилий от внешних воздействий надо привести к одной жесткости, умножая ее ординаты на I_0/I , где I_0 – момент инерции одного из сечений стержня.

2.3.2. Приближенное вычисление интегралов в формуле перемещений

Наиболее употребительные методы основаны на замене интеграла конечной суммой. Особенно простым является *метод прямоугольников*. Рассматривая определенный интеграл как площадь, интервал интегрирования делим на несколько участков и находим сумму произведений подынтегральной функции в центральных точках участков на длину участков.

Если допустить, что на участке подынтегральная функция изменяется линейно, то интеграл вычисляется по *формуле трапеций*. Если же считать подынтегральную функцию изменяющейся по квадратной параболе на двух смежных участках, то при четном количестве последних получим *формулу Симпсона*.

Рассмотрим матричную форму вычисления перемещений с помощью формулы Симпсона. Возьмем один интеграл, учитывающий деформацию изгиба, с непрерывным подынтегральным выражением на

некотором j -м стержне или участке длиной l_j , начало которого обозначим индексом $j-1$, а конец – индексом j :

$$q_{ik}^j = \int_0^{l_j} \frac{\overline{M}_{ji} \overline{M}_{jk}}{E_j I_j} dx.$$

Если участок разбить на два промежутка, то по формуле Симпсона получаем

$$q_{ik}^j = \frac{l_j}{6 E_0 I_0} (\overline{M}_{ji}^{\text{л}} M_{jk}^{\text{л}} \alpha_j^{\text{л}} + 4 \overline{M}_{ji}^{\text{с}} M_{jk}^{\text{с}} \alpha_j^{\text{с}} + \overline{M}_{ji}^{\text{п}} M_{jk}^{\text{п}} \alpha_j^{\text{п}}),$$

где $\alpha_j = (E_0 I_0) / (E_j I_j)$, а индексы «л», «с», «п» означают соответственно левую, среднюю и правую точки (рис. 2.3.2)

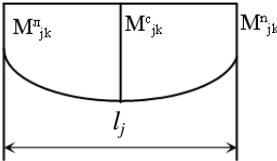


Рис. 2.3.2. Фрагмент эпюры с равным делением на две части

Если \overline{M}_{ji} – линейная функция, а $M_{jk} / (E_j I_j)$ – парабола второго порядка (или линейная функция), то формула дает точное значение интеграла.

Представим формулу в матричной форме:

$$q_{ik}^j = \overline{M}_{ji}^T A_j \overline{M}_{jk},$$

где $\overline{M}_{ji}^T = \left\| \overline{M}_{ji}^{\text{л}} \quad \overline{M}_{ji}^{\text{с}} \quad \overline{M}_{ji}^{\text{п}} \right\|$ – матрица-строка моментов на j -м участке от $F_i=1$;

$\overline{M}_{jk} = \left\{ M_{jk}^{\text{л}} \quad M_{jk}^{\text{с}} \quad M_{jk}^{\text{п}} \right\}$ – матрица-столбец моментов на j -м участке от заданной нагрузки;

$$A_j = \frac{l_j}{6 E_0 I_0} \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_j^{\text{л}} & 0 & 0 \\ 0 & 4 \alpha_j^{\text{с}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j^{\text{п}} \end{array} \right\| \quad - \text{ матрица податливости на } j\text{-м}$$

участке.

Полное перемещение при n участках будет

$$q_{ik} = \sum_{j=1}^n q_{ik}^j = \sum_{j=1}^n \overline{M}_{ji}^T A_j \overline{M}_{jk},$$

или

$$q_{ik} = \left\| \overline{M}_{1i}^T \quad \overline{M}_{2i}^T \quad \dots \quad \overline{M}_{ni}^T \right\| A \left\{ \overline{M}_{1k} \quad \overline{M}_{2k} \quad \dots \quad \overline{M}_{nk} \right\},$$

где A – квазидиагональная матрица из матриц податливости стержней или их участков.

Если, например, \bar{N}_{ji}, N_{jk} и $b_j = (E_0 A_0) / (E_j A_j)$ постоянны по длине l_j , то податливость определяется величиной $(l_j b_j) / (E_0 A_0)$. Формула перемещений для ферм имеет вид:

$$q_{ik} = \bar{N}_{ji}^T A \bar{N}_{jk},$$

где

$$A = \frac{1}{E_0 I_0} \begin{vmatrix} b_1 l_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 l_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n l_n \end{vmatrix}.$$

Матрица податливости «переводит» вектор сил в вектор перемещений по их направлению. Обратная матрица называется *матрицей жесткости*.

Вопросы для самопроверки

1. В чем отличие континуальных систем от дискретных?
2. Какова идея энергетического способа определения перемещений?
3. Каково практическое использование теорем о взаимности?
4. Как прочесть запись $\delta_{ik} = \delta_{ki}$?
5. В чем заключается способ Верещагина? В каком случае его нельзя использовать?
6. В каких случаях формула Симпсона дает точное значение перемещения?

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

3.1. Метод сил

3.1.1. Основная система и сущность метода

В строительной механике в ряде случаев приходится вместо непосредственного изучения заданной системы рассматривать другую, в определенном смысле более простую систему, полученную из заданной путем тех или иных преобразований. Такую систему называют *основной*. Использование ее в расчете сопряжено с требованием нали-

чия совершенно такого же напряженно-деформированного состояния, что и в заданной системе, несмотря на отличие от последней.

Статически неопределимые системы имеют лишние связи. Поэтому в первую очередь приходит мысль принять в качестве основной систему, получаемую из заданной путем отбрасывания лишних связей. Если отброшены все лишние связи, то основная система оказывается статически определимой и геометрически неизменяемой. Существует множество такого рода основных систем, соответствующих заданной.

Отсутствие лишних связей в основной системе открывает возможность отклонения от заданной системы (рис. 3.1.1,*а*) в смысле характера деформирования. С целью получения системы, эквивалентной

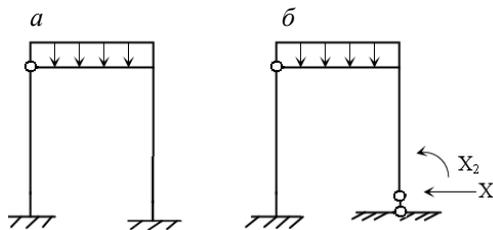


Рис. 3.1.1. Статически неопределимая система:
а – заданная система, *б* – основная система метода сил

к основной системе, кроме заданной нагрузки, надо приложить вместо отброшенных связей соответствующие им усилия (X_1 и X_2 на рис. 3.1.1,*б*). Естественно, их величины неизвестны. Эти усилия рассматриваются как основные и дают название метода расчета – *метод сил*. После определения основных (так называемых *лишних*) неизвестных, задача становится статически определимой.

3.1.2. Канонические уравнения

Основная система с заданной нагрузкой и лишними неизвестными эквивалентна заданной статически неопределимой системе. Следовательно, перемещения q_i по направлению каждой неизвестной силы (момента) X_i от всех неизвестных и от заданной нагрузки должны равняться нулю. На основании теоремы Кастильяно имеем $q_i = \partial U^* / \partial X_i$.

Для линейно деформирующегося тела ($U^* = U$)

$$q_i = \partial U / \partial X_i.$$

Поскольку энергия U представляет собой квадратичную зависимость от X_1, X_2, \dots, X_n , получаем линейную систему уравнений:

Если универсальная проверка приводит к недопустимо большому расхождению между суммой контролируемых перемещений и условным перемещением, то для нахождения ошибки можно произвести построчные проверки, которые состоят в том, что сумма коэффициентов при неизвестных каждого уравнения $\delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}$ должна быть равна величине

$$\delta_{is} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_s ds}{EI}.$$

Если построчные проверки дают расхождение только в одной строке, то ошибка связана с вычислением главного коэффициента этой строки. Если же расхождения наблюдаются одновременно в двух строках, то ошибка, скорее всего, допущена при вычислении того побочного коэффициента, который входит в обе строки.

Проверка свободных членов уравнений состоит в том, что их сумма $\Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}$ должна быть равна величине

$$\Delta_{sF} = \sum \int \frac{\overline{M}_s \overline{M}_F ds}{EI}.$$

После проверки коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений производят их решение и находят X_1, X_2, \dots, X_n .

3.1.3. Построение эпюр внутренних усилий

Для построения эпюры моментов в статически неопределимой системе можно использовать зависимость

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_F.$$

Существует так называемая *кинематическая проверка*, состоящая в проверке равенства нулю условного перемещения основной, или, что то же, заданной системы по направлению всех неизвестных от всех неизвестных и заданной нагрузки, т.е.

$$\Delta_s = \sum \int \frac{\overline{M}_s M ds}{EI} = 0.$$

Должны выполняться и отдельные условия:

$$\Delta_i = \sum \int \frac{\overline{M}_i M ds}{EI} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Эпюры поперечных сил Q и продольных сил N строятся для основной системы с заданной нагрузкой и вычисленными неизвестными. В то же время для построения эпюры Q можно использовать заданную нагрузку и эпюру M и рассматривать равновесие отдельных стержней.

Для построения эпюры N можно использовать заданную нагрузку и эпюру Q и рассматривать равновесие узлов.

Проверка эпюр Q и N состоит в том, что для любой отсеченной части рамы суммы проекций на две оси внешних и внутренних сил должны равняться нулю.

3.2. Матричная форма расчета по методу сил

Система канонических уравнений записывается в виде

$$L_{\delta} \bar{X} + \bar{\Delta}_F = 0,$$

где L_{δ} – матрица единичных перемещений в основной системе; \bar{X} – вектор неизвестных усилий; $\bar{\Delta}_F$ – вектор перемещений от внешних воздействий в основной системе.

Предположим, что единичные и грузовая эпюры в основной системе разбиты на t участков. Тогда согласно формуле перемещений можно записать (см. п.2.3.2)

$$L_{\delta} = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} \bar{M}_{11}^T & \bar{M}_{21}^T & \dots & \bar{M}_{t1}^T \\ \bar{M}_{12}^T & \bar{M}_{22}^T & \dots & \bar{M}_{t2}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{M}_{1n}^T & \bar{M}_{2n}^T & \dots & \bar{M}_{tn}^T \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \dots & \bar{M}_{1n} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & \dots & \bar{M}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{M}_{t1} & \bar{M}_{t2} & \dots & \bar{M}_{tn} \end{array} \right\|, \\ \begin{array}{cccc} n \text{ строк} & t \text{ столбцов} & t \text{ строк} & t \text{ столбцов} & t \text{ строк} & n \text{ столбцов} \end{array} \end{array}$$

$$\bar{\Delta}_F = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} \bar{M}_{11}^T & \bar{M}_{21}^T & \dots & \bar{M}_{t1}^T \\ \bar{M}_{12}^T & \bar{M}_{22}^T & \dots & \bar{M}_{t2}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{M}_{1n}^T & \bar{M}_{2n}^T & \dots & \bar{M}_{tn}^T \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \bar{M}_{1F}^{(0)} \\ \bar{M}_{2F}^{(0)} \\ \dots \\ \bar{M}_{tF}^{(0)} \end{array} \right\|, \\ \bar{\Delta}_F \end{array}$$

Вектор неизвестных усилий равен

$$\bar{X} = -L_{\delta}^{-1} \bar{\Delta}_F.$$

Ординаты эпюры M в заданной системе определяются по формуле

$$\bar{M} = L_x \bar{X} + \bar{M}_F^{(0)},$$

где L_x – матрица, столбцы которой составляются из значений ординат единичных эпюр моментов в основной системе; $\bar{M}_F^{(0)}$ – вектор моментов от внешних воздействий в основной системе.

Деформационная проверка из условия неразрывности перемещений заданной системы по направлению лишних связей должна дать

$$L_x^T A \bar{M} = 0,$$

где A – квазидиагональная матрица податливости (см. п.2.3.2).

3.3. Уравнения метода сил для неразрезной балки и построение огibaющих эпюр

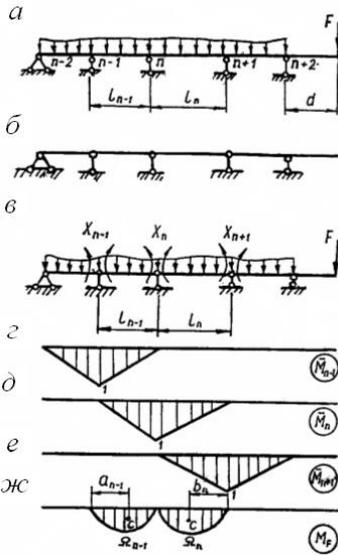


Рис. 3.3.1. Неразрезная балка:
а-в – заданная, основная и эквивалентная системы, *г-е* – эпюры от единичных моментов, *ж* – фрагмент эпюры от заданной нагрузки в основной системе

Для некоторой категории статически неопределимых систем составлены уравнения с вычисленными коэффициентами. Примером может служить неразрезная балка (рис. 3.3.1,*а*), под которой подразумевается статически неопределимая балка, имеющая более двух опор.

Большое значение имеет выбор основной системы. Она будет тем более рациональной, чем больше коэффициентов δ_{ij} обратится в нуль, что позволит получить канонические уравнения с разделенными неизвестными полностью или частично. Создадим основную систему для неразрезной балки освобождением связей, препятствующих повороту в промежуточных опорных сечениях, т. е. введением шарниров на этих опорах (рис. 3.3.1,*б*).

Нагрузка на основную систему показана на рис. 3.3.1,*в*. Лишними неизвестными являются опорные

моменты. Эпюры от каждого из них в основной системе распространяются только на два соседних пролета (рис. 3.3.1,*г-е*). Это приводит к обращению в нуль ряда перемещений δ_{ij} .

В данном случае перемещения по направлению лишних неизвестных являются углы поворота. Условие их неразрывности состоит в

равенстве нулю суммы углов поворота $\vartheta_{лев}$ и $\vartheta_{прав}$ в сечениях по обе стороны от опорного шарнира в основной системе. Перемещения определяем по правилу Верещагина:

$$\delta_{n(n-1)} = \frac{l_{n-1}}{6EI_{n-1}}, \delta_{nm} = \frac{l_n}{3EI_{n-1}} + \frac{l_n}{3EI_n};$$

$$\delta_{n(n+1)} = \frac{l_n}{6EI_n}, \delta_{nF} = \frac{\Omega_{n-1}a_{n-1}}{l_{n-1}EI_{n-1}} + \frac{\Omega_n b_n}{l_n EI_n}.$$

В последней формуле отражены площади Ω_{n-1} , Ω_n эпюры M_F и расстояния a_{n-1} , b_n от их центров тяжести до опор (рис. 3.3.1, ж).

В итоге применительно к опоре n получаем следующее уравнение:

$$\frac{l_{n-1}}{6EI_{n-1}} X_{n-1} + \left(\frac{l_{n-1}}{3EI_{n-1}} + \frac{l_n}{3EI_n} \right) X_n + \frac{l_n}{6EI_n} X_{n+1} + \frac{\Omega_{n-1}a_{n-1}}{l_{n-1}EI_{n-1}} + \frac{\Omega_n b_n}{l_n EI_n} = 0.$$

По его образцу составляются уравнения применительно ко всем промежуточным опорам неразрезной балки. Эти уравнения содержат не более трех неизвестных. На крайних опорах моменты могут быть заданы или легко определяются (например, для консоли на рис. 3.3.1, а $M_{n+2} = -Fd$), и соответствующие уравнения будут содержать не более двух неизвестных.

Защемляющую неподвижную опору на краю балки можно рассматривать как некоторый пролет l_1 (рис. 3.3.2). Чем короче участок l_1 и чем менее податлива стена, тем более жестким будет защемление. Вполне защемленный край балки мы получим, полагая в пределе $l_1 = 0$ (или $I_1 = \infty$). При расчете неразрезной балки с защемленным краем необходимо вместо защемляющей опоры добавить еще один пролет, составить трехчленное уравнение и перейти к пределу, полагая $l_1 = 0$ (или $I_1 = \infty$).

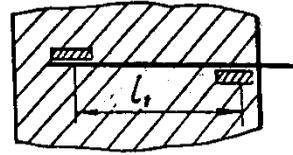


Рис. 3.3.2. Защемляющая неподвижная опора

После определения опорных моментов можно, рассматривая каждый пролет балки в отдельности, построить эпюры M и Q как в обычной однопролетной балке, несущей заданную нагрузку и моменты на опорах. Реакция на промежуточной опоре неразрезной балки равна сумме реакций на той же опоре от двух примыкающих к ней пролетов.

Вспомним, что лишние неизвестные зависят от соотношений жесткости элементов системы. Посредством изменения этих соотношений можно регулировать усилия в системе. В связи с тем, что жест-

кости требуется знать заранее, подбор сечений элементов статически неопределимой системы приходится производить путем итераций.

Если, кроме постоянной нагрузки, имеется временная, которая может занимать различные положения и вовсе сниматься с того или иного пролета, то приходится искать те сочетания нагрузок, которые вызывают в различных сечениях балки наибольший и наименьший изгибающие моменты, наибольшую и наименьшую поперечные силы.

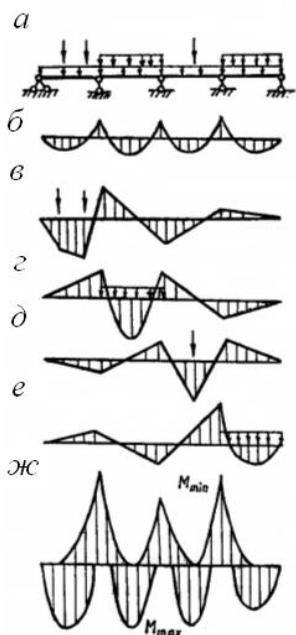


Рис. 3.3.3. Четырехпролетная балка:

а – схема балки, *б* – эпюра моментов от постоянной нагрузки, *в-е* – эпюры моментов от временной нагрузки, *ж* – огибающие эпюры

Пусть четырехпролетная балка (рис. 3.3.3,*а*) несет постоянную и временную нагрузки. Последняя может убираться с пролета или оставаться на нем. Построим эпюру изгибающих моментов от постоянной нагрузки (рис. 3.3.3,*б*), затем отдельно – от загрузки каждого пролета временной нагрузкой (рис. 3.3.3,*в-е*). Для любого сечения балки сложим алгебраически ординату эпюры, вызванной постоянной нагрузкой, с соответствующими положительными ординатами, отвечающими временной нагрузке; те временные нагрузки, которые вызывают в этом сечении отрицательные моменты, считаются отсутствующими. Так получается для данного сечения момент M_{max} . Затем сложим ординату эпюры, вызванной постоянной нагрузкой, с соответствующими отрицательными ординатами, отвечающими временной нагрузке. В итоге получается для данного сечения момент M_{min} .

Проделав такую операцию для достаточного количества сечений в каждом пролете и соединив найденные точки, получим для изгибающих моментов две предельные кривые – так называемые *огibaющие эпюры*,

из которых одна дает для всех сечений балки величины M_{max} , а другая – величины M_{min} (рис. 3.3.3,*ж*). По этим величинам изгибающих моментов вычисляются нормальные напряжения в поперечных и проектных расчетах.

3.4. Статически неопределимые фермы

Рассмотрим сначала внутренне статически неопределимую ферму (рис. 3.4.1,*а*). Основная система на рис. 3.4.1,*б* является нерациональной, так как влияние лишнего неизвестного распространяется не только в своей панели, но и за ее пределы, вследствие чего перемещения, определяемые по формуле

$$\delta_{ij} = \Sigma [(\bar{N}_i \bar{N}_j l) / (EA)],$$

не обратятся в нуль.

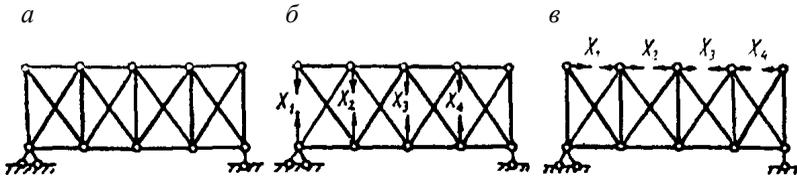


Рис. 3.4.1. Внутренне статически неопределимая ферма:
а – схема фермы, *б*, *в* – основные системы,

Основная система (рис. 3.4.1,*в*) является рациональной, так как влияние каждого лишнего неизвестного не распространяется за пределы своей панели, представляющей собой геометрически неизменяемую систему с самоуравновешенной нагрузкой. Поэтому обращаются в нуль перемещения δ_{13} , δ_{14} , δ_{24} , и канонические уравнения становятся трехчленными (как для неразрезной балки).

Рассмотрим внешне статически неопределимую балочную ферму (рис. 3.4.2,*а*). Основную систему целесообразно образовать так, чтобы она представляла собой ряд однопролетных ферм, т.е. походила на основную систему для неразрезной балки. Тогда канонические уравнения окажутся трехчленными. Указанная цель будет достигнута, если основную систему получить удалением стержней нижнего пояса в панелях, примыкающих к промежуточным опорам (рис. 3.4.2,*б*).

Свободные члены канонических уравнений: $\Sigma [(\bar{N}_i N_f l) / (EA)]$ (силовое внешнее воздействие), $\Sigma \bar{N}_i \alpha l$ (изменение температуры), $\Sigma \bar{N}_i \Delta l$ (изменение длины стержня при монтаже).

Известна теорема Леви: из всех ферм заданных возможных конфигураций при одном нагружении без учета потери устойчивости стержней найдется такая статически определимая ферма, вес которой будет не больше веса любой другой фермы. Отдавая предпочтение статически определимой ферме, теорема не отрицает альтернативу в виде рациональной статически неопределимой фермы, которая может

иметь преимущество с точки зрения локальной жесткости и сопротивляемости разрушению.

Основные зависимости для рациональной статически неопределимой фермы можно установить, рассмотрев изопериметрическую задачу, в которой предполагается заданным объем однородного линейно-упругого материала фермы V_0 :

$$\sum_{i=1}^m A_i l_i = V_0,$$

где l_i – длина i -го стержня; A_i – площадь его поперечного сечения; m – число стержней.

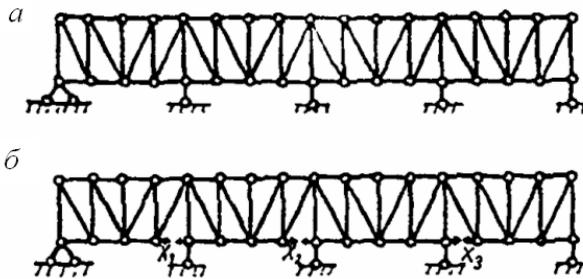


Рис. 3.4.2. Внешне статически неопределимая ферма:
а – схема фермы, б – основная система

Взяв за основу функционал Кастильяно, получаем:

$$I = \sum_{i=1}^m \frac{N_i^2 l_i}{2EA_i} + \lambda \sum_{i=1}^m A_i l_i,$$

где N_i – продольное усилие в i -м стержне.

Следствием стационарности функционала являются n уравнений совместности деформаций (n – число лишних связей)

$$\partial I / \partial N_n = 0,$$

уравнение объема и m уравнений структурообразования:

$$- N_i^2 / (2EA_i^2) + \lambda = 0.$$

Так как N_i/A_i выражает напряжение σ_i в i -м стержне, то последнее уравнение принимает вид

$$\sigma_i^2 / (2E) = \lambda (= \text{const}),$$

свидетельствующий о равнонапряженности фермы. Это равенство служит критерием рациональности конструкции фермы.

Уравнения совместности деформаций при $N_i/(EI) = C = \text{const}$ получают вид

$$C \sum_{i=1}^m \bar{N}_{in} l_i = 0,$$

где \bar{N}_{in} – усилие в i -м стержне основной системы от $N_n = 1$.

Так как лишние неизвестные N_n не входят в уравнения совместности деформаций, задача может иметь несколько решений.

Статически неопределимые фермы обладают замечательным свойством: при переходе от произвольного массива площадей сечений к массиву, обеспечивающему равнонапряженное состояние, внутренние усилия в стержнях не меняются. В связи с этим отпадает необходимость в итерационной процедуре.

В качестве исходного принимается произвольный массив площадей сечений. Из уравнений $\partial I / \partial N_n = 0$ определяются лишние неизвестные, затем – усилия в стержнях N_i . После этого вычисляются площади сечений стержней:

$$A_i = |N_i| / \sigma_{adm}.$$

3.5. Статически неопределимые арки

3.5.1. Двухшарнирная арка

Основную систему арки (рис. 3.5.1,*а*) получим, освободив связь на опоре B , препятствующую горизонтальному перемещению (рис. 3.5.1,*б*). Для усилий в основной системе применимы уравнения для трехшарнирной арки. В случае вертикальной нагрузки получаем:

$$M = M^{\delta} - Hy, \quad Q = Q^{\delta} \cos \varphi - H \sin \varphi, \quad N = -Q^{\delta} \sin \varphi - H \cos \varphi.$$

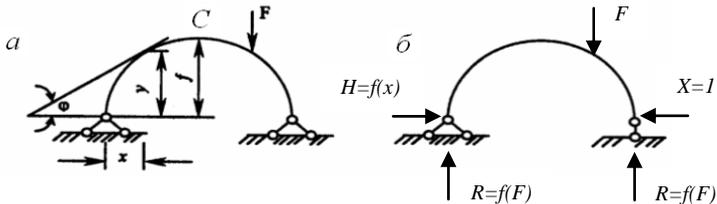


Рис. 3.5.1. Двухшарнирная арка:
а – схема арки, *б* – основная система

Они позволяют получить усилия в основной системе от $X_1=1$, для чего нужно положить $M^{\delta} = 0$, $Q^{\delta} = 0$, $H = 1$, и от вертикальной внешней нагрузки (полагаем $H = 0$).

В каноническом уравнении $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$ коэффициенты равны:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_s \frac{\overline{M_1^2} ds}{EI} + \int_s \frac{\overline{N_1^2} ds}{EA} + \int_s \frac{\alpha_y \overline{Q_1^2} ds}{GA} = \int_s \frac{y^2 ds}{EI} + \int_s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EA} + \int_s \frac{\alpha_y \sin^2 \varphi ds}{GA}; \\ \Delta_{1F} &= \int_s \frac{\overline{M_1} M_F ds}{EI} + \int_s \frac{\overline{N_1} N_F ds}{EA} + \int_s \frac{\alpha_y \overline{Q_1} Q_F ds}{GA} = \\ &= - \int_s \frac{y M^{\delta} ds}{EI} + \int_s \frac{Q^{\delta} \cos \varphi \sin \varphi ds}{EA} - \int_s \frac{\alpha_y Q^{\delta} \sin \varphi \cos \varphi ds}{GA}. \end{aligned}$$

Для осуществления интегрирования необходимо подынтегральные выражения представить в виде функций одной переменной x , так как таковыми являются M^{δ} и Q^{δ} . Пользуясь уравнением оси арки $y = f(x)$, получаем $\operatorname{tg} \varphi = y' = f'(x)$,

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}, \quad ds = \frac{dx}{\cos \varphi} = dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Для арки, очерченной по дуге окружности, применяется полярная система координат. В общем случае очертания оси арки интегрирование оказывается достаточно сложным, поэтому используются методы приближенного интегрирования.

Если жесткость арки меняется по закону $EI = EI_0/\cos \varphi$, где EI_0 – жесткость сечения C (рис. 3.5.1, a), то при учете только величины M получим:

$$\delta_{11} = \int_l \frac{y^2 dx}{EI_0}, \quad \Delta_{1F} = - \int_l \frac{y M^{\delta} dx}{EI_0}.$$

Иногда и при постоянной жесткости берут в расчет переменную $EI_0/\cos \varphi$. Для пологих арок ($l/f \geq 5$) ошибка, возникающая при этом невелика.

Расчет двухшарнирной арки с затяжкой в принципе не отличается от расчета двухшарнирной арки без затяжки. За лишнее неизвестное принимаем усилие X_1 в затяжке. Но при определении δ_{11} необходимо учесть продольное усилие в затяжке:

$$\delta_{11} = \delta'_{11} + \frac{l}{E_3 A_3},$$

где δ'_{11} – значение коэффициента для арки без затяжки; $E_3 A_3$ – жесткость затяжки при растяжении.

Следовательно, для арки с затяжкой:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta'_{11} + \frac{l}{E_3 A_3}}$$

Чем тоньше и податливее затяжка, тем меньше усилие, которое она воспринимает. Арка, концы которой связаны бесконечно тонкой нитью, лишь формально будет еще статически неопределимой, фактически же будет работать как кривая статически определимая балка. При увеличении $E_3 A_3$ значение X_1 также растет, но не беспредельно. При $E_3 A_3 \rightarrow \infty$ дробь $l/E_3 A_3 \rightarrow 0$ и $X_1 \rightarrow X'_1$, где X'_1 – распор двухшарнирной арки без затяжки.

Статически неопределимые системы позволяют создавать предварительные (начальные) усилия, т.е. усилия до приложения внешней нагрузки. Этим можно достигнуть рационального распределения усилий в конструкции. В арке с затяжкой предварительные усилия создаются предварительным натяжением затяжки, которое можно получить, например, подкручиванием специальной муфты. При этом сила ΔX_1 в затяжке зависит от изменения длины затяжки Δl и определяется из уравнения $\Delta X_1 \delta_{11} - \Delta l = 0$.

3.5.2. Бесшарнирная арка

Бесшарнирная арка (рис. 3.5.2,*a*) является трижды статически неопределимой системой. Основную систему стремятся выбрать так, чтобы получить уравнения, содержащие по одному неизвестному.

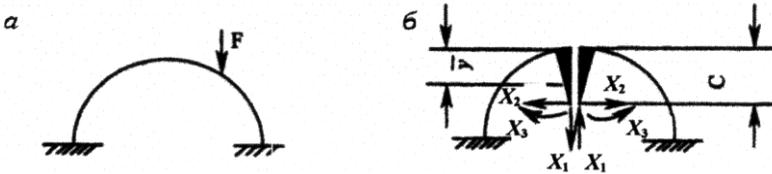


Рис. 3.5.2. Бесшарнирная арка:
a – схема арки, *б* – основная система

Остановимся на варианте основной системы с бесконечно жесткими консолями и переносом неизвестных в упругий центр (рис. 3.5.2,*б*). Последний совпадает с центром тяжести элементов $d\bar{s} = ds / (EI)$, а линии действия неизвестных сил – с центральными главными осями этих элементов.

Для практического определения координат упругого центра целесообразно, избрав первоначально какое-либо положение осей координат \bar{x}, \bar{y} , определить координаты центра тяжести элементов $d\bar{s}$. Главные оси x, y определяются по формулам для главных осей площади фигуры, элементами которой являются $d\bar{s}$.

Для симметричной арки длина жестких консолей равна

$$c = \int_0^{s/2} \frac{y}{EI} ds \bigg/ \int_0^{s/2} \frac{ds}{EI},$$

где s – длина оси арки.

При численном интегрировании криволинейная ось арки заменяется ломаной линией с числом отрезков обычно от 8 до 20. В пределах каждого отрезка размеры поперечных сечений принимают постоянными и равными размерам сечения в середине отрезка. Нагрузки заменяются сосредоточенными силами, приложенными в точках перелома оси арки. Величины этих сил равны сумме реакций опор одноименных балок, сходящихся в точке перелома. Вычисление перемещений в такой системе можно вести по правилу Верещагина.

Итак, канонические уравнения имеют вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0, \quad \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0, \quad \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}, \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2F}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3F}}{\delta_{33}}.$$

Затем определяем внутренние усилия:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + M_F,$$

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + Q_F,$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + N_F.$$

3.6. Метод перемещений

3.6.1. Основная система и сущность метода

Известно, что зная линейные смещения и повороты концевых сечений стержня, можно полностью описать деформацию стержня, а следовательно, и распределение в нем усилий. Основная система *метода перемещений* получается из заданной (рис. 3.6.1,а) путем введения дополнительных связей, препятствующих повороту жестких узлов и их смещениям (рис. 3.6.1,б). Вводятся жесткие заделки, делающие невозможным повороты узлов, но не исключающие их линейных смещений, и добавляются стержни, препятствующие смещению узлов.

С целью получения системы, эквивалентной заданной, к основной системе, кроме заданной нагрузки, надо приложить в дополнительных связях соответствующие им перемещения (Z_1 и Z_2 на рис. 3.6.1,б).

Система оказывается состоящей из изолированных балок двух типов: жестко заземленных по обоим концам или жестко заземленных на одном и шарнирно опертых на другом конце. Они могут быть рассчитаны на всевозможные воздействия, вследствие чего в основной системе метода перемещений любое перемещение от нагрузки можно считать известным. С этой точки зрения она является *кинематически определенной*.

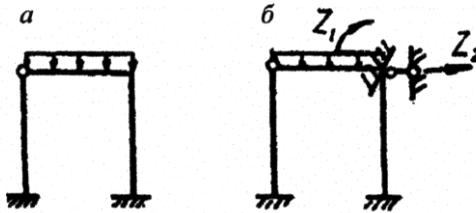


Рис. 3.6.1. Статически неопределимая система:
а – заданная система, б – основная система метода перемещений

Метод перемещений можно свести к стандартной процедуре, вследствие чего он гораздо больше подходит для программирования на ЭВМ, чем метод сил.

Понятие степени кинематической неопределимости в установленном смысле этого термина является условным и зависит от ряда обстоятельств. На нее влияет вид принятой расчетной схемы. Она зависит, например, от числа узлов ломаной, заменяющей стержень с криволинейной осью. Степень кинематической неопределимости сопряжена также со степенью точности определения перемещений. Если при расчете рамы с несмещающимися узлами не учитывать влияние осевых деформаций и сдвигов, то она зависит лишь от числа углов поворота жестких узлов; если же учитываются и осевые деформации, то происходит ее увеличение на число линейно независимых линейных смещений узлов в результате такого рода деформаций.

В дальнейшем при установлении степени кинематической неопределимости будем исходить из наличия данных об однопролетных балках с прямолинейной осью при различных условиях закрепления на концах (приложение 1).

3.6.2. Канонические уравнения

Общий способ позволяет путем перемножения соответствующих эпюр получить формулы для реакций. Коэффициенты уравнений, представляющие собой единичные реакции, определяются по формуле:

$$r_{kn} = \sum_{i=1}^m \int \frac{\overline{M}_{ik} \overline{M}_m}{E_i I_i} ds.$$

Для определения реакций от внешней нагрузки рассмотрим состояния F и k (рис. 3.6.2, а, б).

На основании теоремы о взаимности работ имеем:

$$R_{kF} \cdot 1 + F \delta_{Fk} = 0,$$

откуда

$$R_{kF} = -F \delta_{Fk}.$$

При $F = 1$ зависимость по существу представляет взаимность реакции и перемещения: $r_{kF} = -\delta_{Fk}$. Для определения δ_{Fk} возьмем в качестве единичного состояния статически определенную балку – консоль и приложим к ней силу $F=1$ по направлению искомого перемещения (это правило имеет обоснование). Эпюру моментов в ней обозначим \overline{M}'_F (рис. 3.6.2, в). Тогда

$$\delta_{kF} = \int \frac{\overline{M}_k \overline{M}'_F}{EI} ds.$$

С учетом того, что $F \overline{M}'_F = M'_F$ получаем

$$R_{kF} = - \int \frac{\overline{M}_k M'_F}{EI} ds,$$

где M'_F – ординаты эпюры изгибающих моментов от нагрузки F в любой статически определенной системе (полученной из заданной системы или основной системы метода перемещений устранением лишних связей, в том числе обязательно и той связи, реакция которой определяется).

Для проверки правильности вычисления коэффициентов системы уравнений строится эпюра \overline{M}_s в основной системе метода перемещений как алгебраическая сумма всех единичных эпюр:

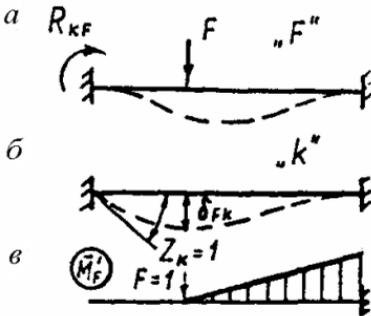


Рис. 3.6.2. К определению реакций от внешней нагрузки: а, б – два состояния системы; в – эпюра моментов от внешней нагрузки для консоли

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n.$$

«Умножив» эту эпюру последовательно на каждую из единичных эпюр, получим сумму коэффициентов при неизвестных в соответствующем уравнении. Например,

$$r_{1S} = r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}.$$

Такая проверка называется *построчной*. Возможна и другая проверка. Результат «умножения» эпюры \overline{M}_s на \overline{M}_s должен равняться сумме всех коэффициентов при неизвестных в системе канонических уравнений (*универсальная* проверка).

Проверка свободных членов уравнений производится «умножением» эпюры \overline{M}_F на эпюру \overline{M}_s . Результат должен равняться сумме коэффициентов R_{kF} в системе уравнений.

Статический способ основан на использовании уравнений статики. Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных связях, определяются вырезанием узлов и составлением уравнений равновесия в виде $\Sigma M = 0$. Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных связях, препятствующих линейным смещениям, можно определить при помощи разреза элементов рамы и составления уравнений равновесия сил, действующих на отсеченную часть.

Реактивное усилие будем считать положительным, если направление его действия совпадает с принятым направлением поворота или линейного смещения узла.

3.6.4. Матричная форма расчета по методу перемещений

Система канонических уравнений записывается в виде:

$$L_r \overline{Z} + \overline{R}_F = 0,$$

где L_r – матрица реакций введенных связей от единичных кинематических воздействий в основной системе (единичных реакций); \overline{Z} – вектор неизвестных перемещений; \overline{R}_F – вектор реакций введенных связей от внешних воздействий в основной системе.

Единичные реакции, как известно, обладают свойством взаимности, вследствие чего матрица

$$L_r = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}$$

является симметричной. Элементы, стоящие на главной диагонали, всегда положительны, как и детерминант матрицы. Вектор неизвестных перемещений равен

$$\bar{Z} = -L_r^{-1} \bar{R}_F.$$

Ординаты эпюр изгибающих моментов и поперечных сил представим в виде матрицы

$$S = L_S^{-1} Z^* + S_{F0},$$

где L_S^{-1} – матрица, столбцы которой составляются из значений ординат единичных эпюр моментов и поперечных сил в намеченных сечениях в основной системе; S_{F0} – матрица, столбцы которой составляются из значений ординат эпюр моментов и поперечных сил от внешней нагрузки в тех же сечениях; Z^* – квазидиагональная матрица, равная

$$\begin{pmatrix} -L_r^{-1} \bar{R}_F & 0 \\ 0 & -L_r^{-1} \bar{R}_F \end{pmatrix}.$$

3.7. Сопоставление методов сил и перемещений и выбор метода расчета

Метод сил и метод перемещений имеют как сходства, так и различия. Сходства состоят в следующем:

1. В методе сил основная система получается исключением связей из заданной системы, в методе перемещений – введением дополнительных связей.

2. Основными неизвестными в методе сил являются реакции отброшенных связей, в методе перемещений – перемещения по направлению введенных связей.

3. Канонические уравнения с соответствующими основными неизвестными идентичны по форме.

4. Используются единичные эпюры от сил и перемещений соответственно.

5. В обоих методах используется один и тот же принцип построения результирующих эпюр.

Имеются и различия:

1. Расчетные операции в методе перемещений значительно проще, чем в методе сил.

2. Основная система в методе перемещений, по существу, единственная, в то время как в методе сил основных систем можно образовать несколько.

3. Единичные и грузовые эпюры в методе перемещений стандартные и всегда просты, а в методе сил они могут быть сложными.

4. Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений в методе перемещений во многих случаях значительно проще, чем в методе сил.

5. Канонические уравнения в методе перемещений при большом количестве неизвестных – неполные уравнения; в методе сил этого надо добиваться специальными приемами.

6. Число неизвестных во многих случаях меньше в методе перемещений.

Но метод перемещений не может всецело заменить метод сил по следующим причинам:

1. Одни системы удобны для расчета по методу перемещений, а другие – по методу сил. Например, система (рис. 3.7.1,*а*) имеет 9 основных неизвестных по методу перемещений и 27 по методу сил; система (рис. 3.7.1,*б*) имеет одно неизвестное по методу сил и 11 по методу перемещений.

2. Метод перемещений становится весьма сложным, если расчет ведется с учетом деформаций стержней от продольных и поперечных сил, тогда как методу сил это присуще в значительно меньшей степени. Так в системе (рис. 3.7.1,*а*) появляется еще 18 основных неизвестных в методе перемещений, в то время как в методе сил дополнительные осложнения связаны с построением эпюр N и Q и вычислением перемещений от них.

3. При расчете шарнирных ферм число основных неизвестных по методу перемещений при учете продольных деформаций всегда больше, чем по методу сил.

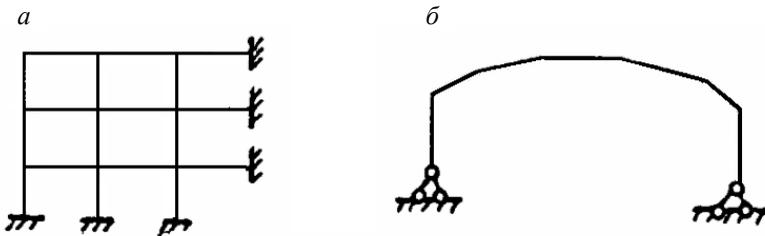


Рис. 3.7.1. Статически неопределимые системы для сопоставления числа неизвестных по двум методам расчета

4. Элементы основной системы метода перемещений статически неопределимы, и для построения в них эпюр M от перемещений и нагрузки применяется метод сил.

Следовательно, каждый метод имеет свою область использования. Выбор должен быть сделан в пользу метода с меньшим числом основных неизвестных. Но, учитывая простоту многих операций при расчете по методу перемещений, можно рекомендовать последний и в тех случаях, когда число неизвестных будет несколько больше, чем по методу сил.

Преимущества метода сил при расчете одной части системы и метода перемещений при расчете другой привели к идее смешанного и комбинированного методов.

3.8. Смешанный метод

Основная система образуется одновременно как освобождением, так и введением связей в заданную систему, а компенсирующими средствами служат силовые и кинематические воздействия. Уравнения составляются из условий двух типов: а) равенство нулю реакций во введенных закреплениях; б) неразрывность перемещений по направлению лишних неизвестных в точках, где освобождены связи.

Для рамы (рис. 3.8.1,а) при основной системе, показанной на рис. 3.8.1,б, канонические уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} X_3 + R_{1F} &= 0, \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} X_3 + R_{2F} &= 0, \\ \delta_{31} Z_1 + \delta_{32} Z_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

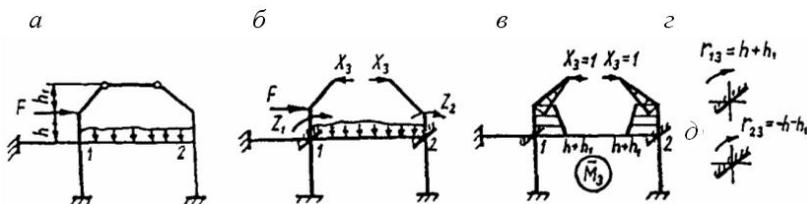


Рис. 3.8.1. Статически неопределимая система:

а – заданная система, б – основная система смешанного метода, в – эпюра от единичной силы, г, д – определение единичных реакций

Помимо коэффициентов δ_{33} , r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} , присущих каноническим уравнениям методов сил и перемещений, здесь имеют место также коэффициенты особого рода. Коэффициенты r_{13} и r_{23} представляют

собой реакции в закреплениях 1 и 2 от силы $X_3 = 1$ и определяются, как в методе перемещений, из условия равновесия (рис. 3.8.1, в-д). Коэффициенты δ_{31} , δ_{32} представляют собой перемещения по направлению силы X_3 от поворотов $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$ и определяются на основе простых геометрических соотношений или из равенства $\delta_{ki} = -r_{nk}$.

В смешанном методе используются пути упрощения решения, применяемые в методе сил и в методе перемещений.

Результирующие изгибающие моменты вычисляются по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \overline{M}_3 X_3 + M_F.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое основная система метода сил?
2. Как определяется степень статической неопределимости рамы?
3. Сколько раз статически неопределим замкнутый контур?
4. Что представляют собой коэффициенты канонических уравнений метода сил?
5. Что представляет собой основная система метода перемещений?
6. Поясните смысл величин, входящих в каноническое уравнение метода перемещений, а также самого уравнения.
7. В чем смысл теоремы о взаимности реакций?
8. Укажите промежуточные проверки, применяемые в методе перемещений.
9. Как проверить окончательную эпюру моментов при расчете по методу перемещений?
10. В чем особенность расчета рам с наклонными стойками по методу перемещений?
11. Что представляют собой коэффициенты канонических уравнений смешанного метода?
12. Как проверить окончательную эпюру моментов при расчете по смешанному методу?

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Расчет пространственных статически неопределимых систем ведется на основе тех же идей, которые положены в основу расчета плоских статически неопределимых систем. Он усложняется по двум причинам: 1) число основных неизвестных по методу сил и перемещений в пространственных системах значительно больше, чем в плоских; 2) число различных внутренних сил в стержнях пространственных систем больше, чем в стержнях плоских систем, поэтому вычисление

всех величин, зависящих от деформации стержней, значительно сложнее.

4.1. Расчет по методу сил

Как и в плоских системах, при образовании основной системы не обязательно отбрасывать все лишние внешние связи. Вместо этого могут быть исключены отдельные внутренние связи (рис. 4.1.1).

Канонические уравнения имеют прежний вид:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kF} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{km} = & \sum \int \frac{\overline{M}_{yk} \overline{M}_{ym}}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\overline{M}_{zk} \overline{M}_{zm}}{EI_z} ds + \sum \int \frac{\overline{T}_k \overline{T}_m}{GI_p} ds + \\ & + \sum \int \frac{\alpha_y \overline{Q}_{yk} \overline{Q}_{ym}}{GA} ds + \sum \int \frac{\alpha_z \overline{Q}_{zk} \overline{Q}_{zm}}{GA} ds + \sum \int \frac{\overline{N}_k \overline{N}_m}{EA} ds. \end{aligned}$$

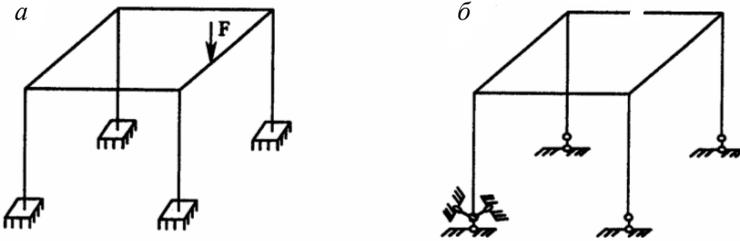


Рис. 4.1.1. Пространственная система:
а – заданная система, б – основная система метода сил

Внутренние усилия определяются по формуле

$$S = \overline{S}_1 X_1 + \overline{S}_2 X_2 + \dots + S_F.$$

Проверки эпюр, получаемых после расчета, те же, что и в плоских системах. Симметрия системы должна быть использована аналогично тому, как это было указано при рассмотрении плоских систем.

При расчете пространственных рам, как и при расчете плоских, в целях простоты расчета пренебрегают влиянием на перемещения внутренних усилий N , Q_y , Q_z . Для ферм удерживают лишь слагаемое с продольными силами $\sum \frac{\overline{N}_k \overline{N}_m l}{EA}$.

4.2. Расчет плоских рам на пространственную нагрузку

В плоской раме основные неизвестные X_1 , X_2 и X_3 (рис. 4.2.1,*a*), лежащие в плоскости рамы, вызывают перемещения только в этой плоскости. Поэтому все побочные перемещения от этих сил по направлению остальных основных неизвестных X_4 , X_5 и X_6 (рис. 4.2.1,*б*) равны нулю.

Следовательно, канонические уравнения для таких систем независимо от нагрузки распадаются на две независимые группы. В одну из них будут входить неизвестные типа X_1 , X_2 и X_3 , а в другую – неизвестные типа X_4 , X_5 и X_6 .

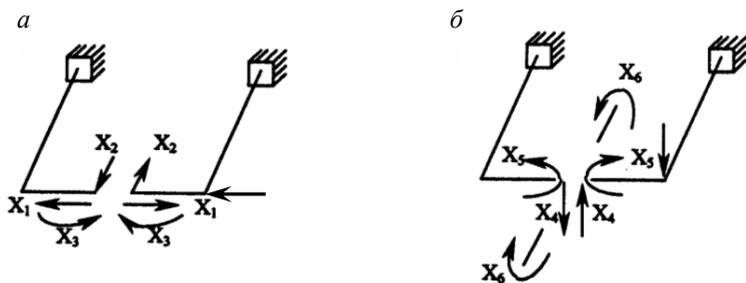


Рис. 4.2.1. Основные неизвестные для плоской рамы:
a – при нагрузке в плоскости рамы, *б* – при нагрузке в перпендикулярной плоскости

Если нагрузку также разложить на нагрузку, лежащую в плоскости рамы, и нагрузку, перпендикулярную ей, то нагрузка, лежащая в плоскости рамы (рис. 4.2.1,*a*), вызывает только основные неизвестные, расположенные в плоскости рамы (X_1 , X_2 и X_3), а нагрузка, перпендикулярная плоскости рамы (рис. 4.2.1,*б*), вызывает неизвестные X_4 , X_5 и X_6 .

4.3. Расчет по методу перемещений

Каждый узел пространственной рамы может иметь шесть перемещений: три угла поворота вокруг координатных осей и три поступательных перемещения по их направлению. Число неизвестных углов поворота равно утроенному числу жестких узлов, которые могут независимо поворачиваться. Для определения числа независимых поступательных перемещений необходимо во все углы рамы (рис. 4.3.1,*a*), в том числе и опорные, ввести шаровые шарниры и исследовать изменимость такой шарнирной схемы. Число независимых перемещений

равно числу дополнительных связей для получения из шарнирной схемы неизменяемой системы.

Моментная связь в основной системе препятствует повороту вокруг трех осей. Особенностью построения эпюр от поворота узлов является то, что все сходящиеся к одному узлу стержни деформируются. Если стержни взаимно перпендикулярны, то одни из них при повороте узла работают на изгиб, другие – на кручение.

Канонические уравнения имеют обычный вид:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kF} = 0.$$

Коэффициенты и свободные члены имеют прежний смысл. Для их определения удобен статический метод.

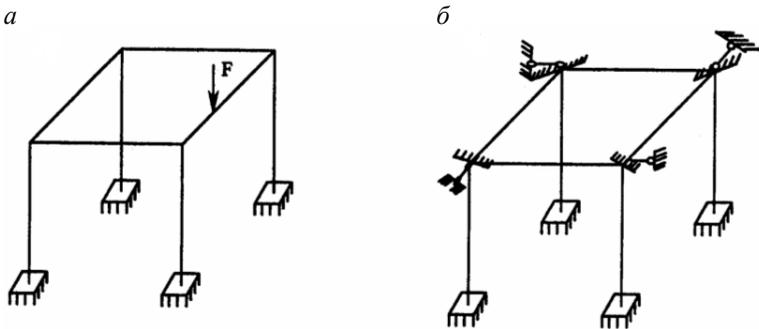


Рис. 4.3.1. Пространственная система:
а – заданная система, б – основная система метода перемещений

Внутренние усилия определяют по формуле

$$S = \bar{S}_1 Z_1 + \bar{S}_2 Z_2 + \dots + S_F.$$

Проверки эпюр, полученные после расчета, те же, что и в плоских системах. Симметрия системы должна быть использована аналогично тому, как это было указано при рассмотрении плоских систем.

5. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

5.1. Идея метода конечных элементов и его связь с вариационными методами

Уже давно делались попытки применения аппарата расчета статически неопределимых стержневых систем к расчету континуальных систем (пластинок, оболочек). Дискретизация расчетной схемы приводит к алгебраическим уравнениям (вместо дифференциальных), реше-

ние которых с помощью электронно-вычислительных машин не представляет больших трудностей. Со временем возникла более совершенная идея замены сплошного тела системой плоских или объемных элементов конечных размеров, соединенных в узлах. Форма элементов выбирается в зависимости от формы тела в целом или его областей. Наиболее простой расчет плоской системы получается при выборе формы элементов в виде треугольников или прямоугольников, для пространственной – в виде тетраэдров или параллелепипедов. Соединения в узлах могут быть жесткими, шарнирными, податливыми. Узлы могут быть соединены с абсолютно жестким телом. Расчленение тела на элементы сопровождается требованием выполнения условий сплошности, в частности на границах между элементами. Это существенно отличает *метод конечных элементов* (МКЭ) от методов, основанных на стержневых аналогиях. МКЭ можно применять и к стержневым и комбинированным системам. В общем случае элементы могут иметь разную форму, разные размеры и даже разную мерность.

Выделенный элемент обладает теми же физическими свойствами, что и среда в месте его расположения. Неоднородное тело разбивается на элементы, каждый из которых рассматривается как однородный.

С математической точки зрения метод конечных элементов можно рассматривать как дальнейшее развитие вариационных методов и как разновидность вариационно-разностного метода. В МКЭ функции задаются не для всей рассматриваемой области, а для отдельных ее частей; множество этих функций определяет состояние всей системы. Варьирование в традиционном методе ведется по неопределенным параметрам, имеющимся в каждом члене ряда, в МКЭ – по параметрам в местах стыка элементов. Вариационные постановки могут быть представлены либо в форме вариационных уравнений, либо в форме требования стационарности соответствующих функционалов. Получаемые системы алгебраических уравнений являются аналогами канонических уравнений классических методов строительной механики стержневых систем. Видоизменение МКЭ сводит задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, определенных на узловых линиях.

5.2. Основные положения метода конечных элементов

Используем вариационный метод Ритца-Тимошенко. Разобьем тело на элементы и вместо распределенной нагрузки и краевых напряжений введем статически эквивалентные силы, приложенные в вершинах элементов (узловые силы). Известные компоненты перемещений

n вершин элементов обозначим через u_i, v_i, w_i ($i=1, 2, \dots, n$). Поле перемещений зададим в виде следующих функций:

$$u = \sum_{i=1}^n u_i f_i(x, y, z), \quad v = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x, y, z), \quad w = \sum_{i=1}^n w_i \psi_i(x, y, z).$$

где f_i, φ_i, ψ_i – функции, удовлетворяющие граничным условиям и условиям сплошности.

Выражение потенциальной энергии системы имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{i=1}^n & \left[\alpha_i u_i^2 + \beta_i v_i^2 + \gamma_i w_i^2 + 2(\xi_i u_i v_i + \eta_i v_i w_i + \zeta_i w_i u_i) \right] - \\ & - \sum_{i=1}^n (F_{xi} u_i + F_{yi} v_i + F_{zi} w_i), \end{aligned}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \dots, \zeta_i$ – коэффициенты, зависящие от характеристик деформируемости тела и координат вершин элементов; F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} – компоненты узловых сил, соответствующих сосредоточенным силам, поверхностной нагрузке, объемным силам и краевым напряжениям.

Запишем это выражение в матричной форме:

$$\Pi = \frac{1}{2} \bar{Z}^T R \bar{Z} - \bar{Z}^T \bar{F},$$

где

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ \dots \\ F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \zeta_1 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_1 & \beta_1 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \xi_1 & \eta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \zeta_2 & \xi_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_2 & \beta_2 & \eta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2 & \eta_2 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n & \zeta_n & \xi_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \zeta_n & \beta_n & \eta_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_n & \eta_n & \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Варьирование выражения Π по u_i, v_i, w_i , дает $3n$ линейных уравнений относительно u_i, v_i, w_i :

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i=1}^n (\alpha_i u_i + \zeta_i v_i + \xi_i w_i) - \sum_{i=1}^n F_{xi} &= 0; \\
2 \sum_{i=1}^n (\zeta_i u_i + \beta_i v_i + \eta_i w_i) - \sum_{i=1}^n F_{yi} &= 0; \\
2 \sum_{i=1}^n (\xi_i u_i + \eta_i v_i + \gamma_i w_i) - \sum_{i=1}^n F_{zi} &= 0.
\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\vec{F} = R\vec{Z}.$$

Здесь \vec{F} – вектор узловых сил; \vec{Z} – вектор узловых перемещений; R – матрица жесткости системы, имеющая порядок $3n \times 3n$ (ее получение является ответственным этапом расчета).

Обратимся к условиям совместности работы элементов. Неразрывность перемещений в узлах обеспечивается удовлетворением условий

$$\vec{Z}_{ia} = \vec{Z}_{ib},$$

где a и b – номера сходящихся в i -ом узле элементов.

Кроме того, имеем равенство

$$\vec{F} = \sum_m \vec{F}_{in},$$

где \vec{F}_{in} – узловая сила, действующая на элемент n ; знак суммы распространяется на все соединяемые в узле элементы.

В свою очередь

$$\vec{F}_{in} = \sum r_{ij}^n \vec{Z}_j,$$

где матрица r_{ij}^n является блоком матрицы жесткости для элемента n , определяющим реакции в i -ом узле от единичных перемещений j -го узла; знак суммы распространяется на все узлы j элемента n , в том числе и на узел i .

Матрицу R представим как

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$R_{ij} = \sum_m r_{ij}^m.$$

Следовательно, матрица жесткости системы может быть получена, если известны матрицы жесткости отдельных элементов.

Если конструкция имеет жесткие опорные связи, матрицу R необходимо заменить матрицей \bar{R} , у которой d -е столбцы, соответствующие d -й ненулевой реакции R_d , в отличие от матрицы R имеют нули, исключая элементы d -й строки, равные 1, а вектор \bar{z} – вектором \bar{x} , у которого на месте d -го элемента вместо z_d стоит R_d . Следовательно,

$$\bar{R}\bar{x} = \bar{F}.$$

После определения перемещений находят напряжения и деформации в элементах.

Точность приближенного решения МКЭ определяется выбором формы элемента и функций перемещений для конкретных задач, что связано с изобретательностью и мастерством инженера. Сходимость приведенного решения к точному рассматривается обычно в энергетическом смысле. Потенциальная энергия деформирования от разности точного и приближенного решений должна стремиться к нулю при неограниченном возрастании числа функций перемещений. В этом смысле упомянутые функции должны: 1) обеспечивать геометрически возможные перемещения в пределах всего тела (удовлетворять граничным условиям в перемещениях и быть непрерывными), 2) быть линейно независимыми, 3) образовывать полную систему функций в смысле возможности с любой степенью точности аппроксимировать по энергии любые возможные перемещения.

Следует заметить, что усложнение формы элементов и вида функций наряду с уточнением решения приводит к существенному возрастанию громоздкости расчетов. Это следует иметь в виду при использовании ЭВМ.

5.3. Плоская задача

Выделим из системы (рис. 5.3.1) *треугольный элемент* (рис. 5.3.2). Компоненты сил, действующих в вершинах элемента, обозначим через $F_{xi}, F_{yi}, \dots, F_{yl}$, а вызванные ими перемещения – u_i, v_i, \dots, v_l .

Поле перемещений зададим в виде функций

$$u = \sum_m u_m f_m(x, y), \quad v = \sum_m v_m \phi_m(x, y),$$

$$m = (i, j, l).$$

При строгом подходе к решению задачи в качестве f_m и φ_m необходимо принять, *по крайней мере*, квадратичные функции координат, чтобы обеспечить неразрывность поля деформаций. При смягчении условий неразрывности стремятся удовлетворить лишь условие неразрывности перемещений:

$$u^* = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$v^* = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

где u, v и u^*, v^* — компоненты перемещений двух точек тела с координатами до деформирования x, y и $x + dx, y + dy$.

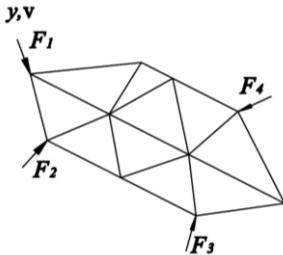


Рис. 5.3.1. Система с нагрузками в ее плоскости

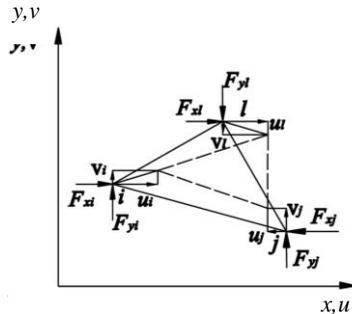


Рис. 5.3.2. Выделенный треугольный элемент

В этом случае компоненты перемещений достаточно принять линейными функциями координат:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y,$$

$$u^* = \alpha_1 + \alpha_2 (x + dx) + \alpha_3 (y + dy),$$

$$v^* = \alpha_4 + \alpha_5 (x + dx) + \alpha_6 (y + dy).$$

Действительно, продифференцировав первые два уравнения по x и y и подставив результаты вместе со значениями u и v в условие неразрывности, получаем последние два уравнения. Вдоль каждой стороны треугольного элемента перемещения изменяются по линейному

закону и полностью определяются при задании их значений в двух точках (вершинах) треугольника. Для соседних элементов с одинаковыми величинами u и v в узлах перемещения совпадают в любой точке их границы – стороны треугольника. Следовательно, принятые зависимости для перемещений удовлетворяют условию непрерывности последних при переходе от элемента к элементу.

Неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ определим из уравнений для перемещений в вершинах элемента:

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i,$$

$$u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j,$$

$$u_l = \alpha_1 + \alpha_2 x_l + \alpha_3 y_l,$$

$$v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i,$$

$$v_j = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j,$$

$$v_l = \alpha_4 + \alpha_5 x_l + \alpha_6 y_l.$$

В результате получаем

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_l + b_l x + c_l y) u_l],$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_l + b_l x + c_l y) v_l],$$

где

$$a_i = x_j y_l - x_l y_j, \quad a_j = x_l y_i - x_i y_l, \quad a_l = x_i y_j - x_j y_i,$$

$$b_i = y_j - y_l, \quad b_j = y_l - y_i, \quad b_l = y_i - y_j,$$

$$c_i = x_l - x_j, \quad c_j = x_i - x_l, \quad c_l = x_j - x_i,$$

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_l & y_l \end{vmatrix} = a_i + a_j + a_l,$$

(Δ – площадь треугольника ijl).

Итак,

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{a_l + b_l x + c_l y}{2\Delta} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_l \\ v_l \end{pmatrix} = \left\{ \text{E}\Phi_i(x, y) \quad \text{E}\Phi_j(x, y) \quad \text{E}\Phi_l(x, y) \right\} \times \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_l \\ v_l \end{pmatrix},$$

или

$$\vec{z} = \Phi^T,$$

где Φ^T — матрица, транспонированная по отношению к матрице

$$\Phi = \begin{pmatrix} \text{E}\Phi_i(x, y) \\ \text{E}\Phi_j(x, y) \\ \text{E}\Phi_l(x, y) \end{pmatrix},$$

\vec{z} — вектор перемещений.

Матрицу деформаций получаем при помощи формул Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \left\| \frac{b_i}{2\Delta} \quad \frac{b_j}{2\Delta} \quad \frac{b_l}{2\Delta} \right\| \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_l \\ \dots \end{pmatrix}, \dots$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_l & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_l \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_l & b_l \end{pmatrix},$$

или

$$\vec{\varepsilon} = B\vec{z},$$

где

$$B = \left\| B_i \quad B_j \quad B_l \right\|,$$

$$B_i = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{pmatrix},$$

$$B_j = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{pmatrix},$$

$$B_l = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} b_l & 0 \\ 0 & c_l \\ c_l & b_l \end{pmatrix}.$$

По закону Гука

$$\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon},$$

где

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}.$$

В случае изотропного материала для плоского напряженного состояния

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}.$$

Напряжения (деформации) оказываются постоянными в пределах элемента. Как следствие, появляются разрывы в полях напряжений (деформаций) на границах элементов. При принятом обходе вершин элемента i, j, l против часовой стрелки напряжения (деформации) сжатия обозначаются знаком плюс, напряжения растяжения – минус.

Запишем уравнение возможных работ узловых сил

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xl} \\ F_{yl} \end{pmatrix}$$

и внутренних сил, определяемых вектором $\vec{\sigma}$:

$$(\delta \vec{Z})^T \vec{F} - t \int_S (\delta \vec{\varepsilon})^T \vec{\sigma} dS = 0,$$

где t – размер элемента по направлению, перпендикулярному плоскости xu .

Учитывая, что

$$(\delta \vec{\varepsilon})^T \vec{\sigma} = [\delta(B\vec{Z})]^T \vec{\sigma} = (\delta \vec{Z})^T B^T \vec{\sigma},$$

и принимая $t=1$, получаем

$$(\delta \vec{Z})^T \vec{F} - (\delta \vec{Z})^T \int_S B^T \vec{\sigma} dS = 0,$$

откуда

$$\vec{F} = \left\{ \int_s B^T DBdS \right\} \vec{Z},$$

или

$$\vec{F} = r\vec{Z},$$

где

$$r = \int_s B^T DBdS = B^T DB \Delta.$$

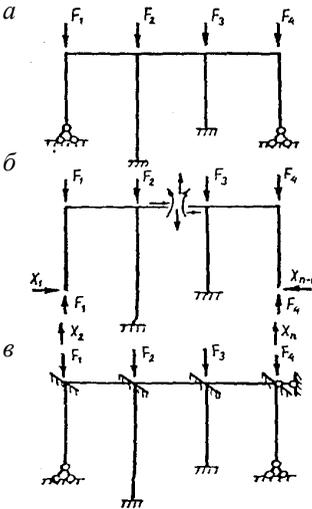
Здесь r есть матрица жесткости элемента, содержащая всю информацию о нем, поскольку матрица D определяет его физические характеристики, а матрица B – геометрические. Матрицу r можно записать в виде

$$r = \begin{pmatrix} r_{ii} & r_{ij} & r_{il} \\ r_{ji} & r_{jj} & r_{jl} \\ r_{li} & r_{lj} & r_{ll} \end{pmatrix},$$

где

$$r_{ks} = B_k^T DB_s \Delta \quad (k, s = i, j, n),$$

то есть r – блочная матрица, элементами которой являются подматрицы r_{ks} . Вообще же она представляет собой квадратную симметричную матрицу k -го порядка.



6. ОСНОВЫ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

6.1. Устойчивость равновесия рам

Рассмотрим рамы со сжатыми, а в некоторых случаях – со сжатыми и растянутыми элементами. Если пренебрегать укорочениями сжатых и удлинениями растянутых элементов, то такие рамы до потери устойчивости не будут испытывать изгиба. Продольные силы в их элементах, как правило, определяются без затруднений.

Рис. 6.1.1. Рама со сжатыми стержнями:

a – заданная рама, b (b) – эквивалентная система по методу сил (перемещений)

В момент потери устойчивости рама (рис. 6.1.1,*а*) превращается в сжато- и растянуто-изогнутую. Появляющиеся при этом дополнительные малые реакции связей, устраняемых при переходе к эквивалентной системе метода сил (рис. 6.1.1,*б*), примем за неизвестные X_1, X_2, \dots, X_n , которые и приложим к основной системе, а реакции от сил F_i отнесем к нагрузке. От нагрузки основная система не получает изгиба, поэтому $\Delta_{cF} = 0$ ($c = 1, 2, \dots, n$). При действии же X_1, X_2, \dots, X_n сжатые и растянутые от нагрузки элементы эквивалентной системы будут работать в условиях продольно-поперечно-го изгиба. Полагая в самый начальный момент потери устойчивости продольные силы сжатых и растянутых элементов неизменными, запишем на основе принципа независимости действия сил, применимого в данном случае к неизвестным X_1, X_2, \dots, X_n , канонические уравнения в виде

$$\delta_{c1} X_1 + \delta_{c2} X_2 + \dots + \delta_{cn} X_n = 0, \quad (c=1, 2, \dots, n).$$

Это однородные уравнения. Уравнение устойчивости получим из условия

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

При вычислении коэффициентов одна из эпюр моментов строится с учетом сжатия элементов от нагрузки, а другая – без учета нагрузки.

Эквивалентная система метода перемещений (рис. 6.1.1,*в*) такая же, как в обычном статическом расчете. Канонические уравнения имеют следующий вид:

$$r_{k1} Z_1 + r_{k2} Z_2 + \dots + r_{kn} Z_n = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Свободные члены равны нулю, так как рассматривается рама с узловой нагрузкой, которая до момента потери устойчивости вызывает только сжатие (или растяжение) отдельных стержней.

При потере устойчивости в общем случае Z_1, Z_2, \dots, Z_n не равны нулю. Поэтому для получения уравнения устойчивости необходимо использовать условие

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисление реакций от единичных перемещений фиктивных связей должно быть проведено с учетом влияния сжимающих сил. Для решения этой задачи используется метод сил. В результате реакции от обычной статической нагрузки получают поправочные множители, которые сведены в таблицу (см. приложение 2).

6.2. Устойчивость равновесия тонкостенного стержня прямоугольного сечения при чистом изгибе

Если тонкостенный стержень прямоугольного сечения изгибается в главной плоскости с наибольшей жесткостью, то плоская форма изгиба за порогом критической нагрузки становится неустойчивой и происходит выпучивание балки.

Рассмотрим балку (рис. 6.2.1,а) в начальный момент потери устойчивости. Сечение на расстоянии x от левой опоры повернулось на угол β , и новая нормаль к сечению (ось x_1) составляет в плане с осью x малый угол α .

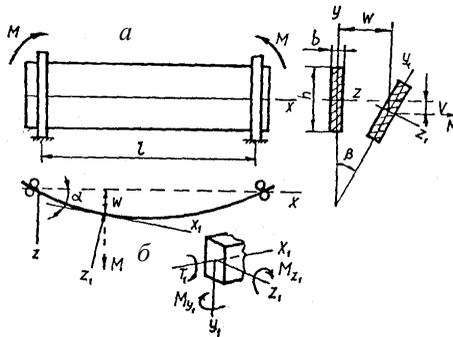


Рис. 6.2.1. Балка в начальный момент потери устойчивости:
a – заданная балка, *б* – положительные направления моментов

Принимаем положительные направления моментов T_1 , M_{y1} , M_{z1} в деформированном состоянии на левом торце правой части стержня

согласно рис. 6.2.1,б. Проекция момента $M_z = M$ на оси x_1, y_1, z_1 с точностью до бесконечно малых первого порядка будут

$$M_{z1} = M_z = M; \quad M_{y1} = M\beta; \quad T_1 = M\alpha = M(dw/dx).$$

Дифференциальные уравнения кручения и изгиба при согласовании знаков усилий и кривизны соответственно имеют вид

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{T_1}{GI_t} = \frac{M}{GI_t} \frac{dw}{dx}; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_{y1}}{EI_y} = -\frac{M\beta}{EI_y},$$

где $I_t = \frac{hb^3}{3} (1 - 0,63 \frac{b}{h}), \quad I_y = \frac{hb^3}{12},$

а синтезирующее уравнение
$$\frac{d^2 \beta}{dx^2} + k^2 \beta = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{M_{cr}^2}{EI_y GI_t}.$$

Решение уравнения: $\beta = A \sin kx + B \cos kx.$

Граничное условие на левом конце балки, где $\beta = 0$, дает $B = 0$; на правом конце балки (при $x = l$) $\beta = 0$, т.е. $A \sin kl = 0$. Таким образом, $\sin kl = 0, kl = n\pi; (n = 1, 2, \dots, \infty), k^2 = (n\pi)^2/l^2 = M_{cr}/(EI_y GI_t)$, откуда при $n = 1$ получаем наименьшую величину критического момента:

$$M_{cr} = (\pi/l) \sqrt{EI_y GI_t}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое потеря устойчивости?
2. Какая нагрузка на стержень называется критической?
3. Какие методы используются при расчете рам на устойчивость?
4. От чего зависит величина критического момента для стержня при чистом изгибе?
5. Как выглядит эквивалентная система при расчете на устойчивость?
6. Какой вид имеют канонические уравнения при расчете на устойчивость?

7. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

7.1. Колебания системы с несколькими степенями свободы

7.1.1. Дифференциальные уравнения движения системы

Рассмотрим невесомую балку с n сосредоточенными точечными массами m_i (рис. 7.1.1,а), на которую действует сила $F(t)$.

Действующие дополнительные силы инерции I_i и силы сопротивления движению масс F_i представим как силы в воображаемых упругих связях в виде пружин (с коэффициентами жесткости b_i), наложенных на систему в направлении совершаемых массами движений (рис. 7.1.1,б). При этом

$$b_i y_i(t) = I_i + F_i = m_i \ddot{y}_i(t) + F_i,$$

откуда

$$b_i = [m_i \ddot{y}_i(t) + F_i] / y_i(t).$$

Динамическая задача сводится к статической, при этом степень статической неопределенности системы увеличивается на n .

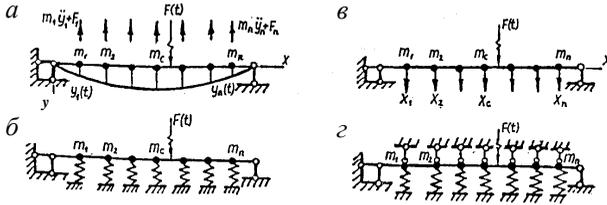


Рис. 7.1.1. Система с сосредоточенными массами:

а – заданная балка, б – балка с упругими связями в виде пружин, в (з) – эквивалентная система по методу сил (перемещений)

Эквивалентную систему метода сил (рис. 7.1.1,в) получаем исключением воображаемых связей, компенсирующих действие сил инерции и сил сопротивления движению масс. В соответствии с рис. 7.1.1,в имеем

$$X_c = -[m_c \ddot{y}_c(t) + F_c].$$

Запишем каноническое уравнение в виде

$$\delta_{c1} X_1 + \delta_{c2} X_2 + \dots + \delta_{cn} X_n + \Delta_{cF}(t) = -X_c / b_c.$$

Минус в правой части введен для согласования противоположных направлений перемещения упругой опоры и ее реакции X_c . Подставляя выражения X_1, X_2, \dots, X_n , получим уравнение в дифференциальной форме:

$$-\delta_{c1}[m_1\ddot{y}_1(t) + F_1] - \delta_{c2}[m_2\ddot{y}_2(t) + F_2] - \dots - \delta_{cn}[m_n\ddot{y}_n(t) + F_n] - y_c(t) + \Delta_{cF}(t) = 0,$$

где δ_{ci} – перемещение массы m_c от единичной силы, приложенной по направлению движения массы m_i в заданной системе.

Полагая $c = 1, 2, \dots, n$, получим систему n канонических уравнений для определения перемещений масс $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$.

Эквивалентную систему метода перемещений (рис. 7.1.1,з) принимаем с дополнительными жесткими силовыми связями по направлению движения масс. Положительное направление реакций силовых связей считаем совпадающим с положительным смещением масс. Отсутствие реакции в k -й силовой связи выразим уравнением

$$R_k^*(t) + m_k \ddot{y}_k(t) + F_k + R_k(t) = 0,$$

где $R_k^*(t)$ – реакция от смещений $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ (восстанавливающая сила), $R_k(t)$ – реакция от возмущающих факторов. Таким образом, каноническое уравнение имеет вид

$$r_{k1}y_1(t) + r_{k2}y_2(t) + \dots + r_{kn}y_n(t) + m_k \ddot{y}_k(t) + F_k + R_k(t) = 0.$$

7.1.2. Свободные колебания системы

Рассмотрим для простоты рассуждений колебания системы без учета сил сопротивления движению масс:

$$m_1\delta_{c1}\ddot{y}_1(t) + m_2\delta_{c2}\ddot{y}_2(t) + \dots + m_n\delta_{cn}\ddot{y}_n(t) + y_c(t) = 0, \quad (c=1, 2, \dots, n).$$

Будем искать решение уравнений в виде

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n y_{ci}(t) = \sum_{i=1}^n y_{ci}\phi_i(t),$$

где y_{ci} – постоянная величина.

Рассмотрим один частный интеграл для каждой массы, соответствующий значку i : $y_{ci}(t) = y_{ci}\phi_i(t)$. Тогда

$$(m_1\delta_{c1}y_{1i} + m_2\delta_{c2}y_{2i} + \dots + m_n\delta_{cn}y_{ni})\ddot{\phi}_i(t) + y_{ci}\phi_i(t) = 0,$$

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n y_{ci} (C_{1i} \sin \omega_i t + C_{2i} \cos \omega_i t).$$

Движение любой массы m_c состоит из суммы колебаний с n различными частотами.

После определения частот находят из канонических уравнений величины y_{ci} с точностью до любого постоянного множителя (по существу находят отношения между $y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}$ и одним из них).

Обозначим

$$\frac{y_{ci}(t)}{y_{1i}(t)} = \frac{y_{ci}}{y_{1i}} = \rho_{ci},$$

причем все $\rho_{1i} = 1$. Тогда

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n \rho_{ci} y_{1i} (C_{1i} \sin \omega_i t + C_{2i} \cos \omega_i t),$$

или

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n \rho_{ci} (D_{1i} \sin \omega_i t + D_{2i} \cos \omega_i t).$$

Это выражение имеет $2n$ произвольных постоянных вида $D_{1i} = y_{1i} C_{1i}$ и $D_{2i} = y_{1i} C_{2i}$, что соответствует n исходным дифференциальным уравнениям второго порядка (полный интеграл). Полагая $D_{1i} = E_i \cos \lambda_i$ и $D_{2i} = E_i \sin \lambda_i$, получаем

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n \rho_{ci} E_i \sin(\omega_i t + \lambda_i).$$

Все $2n$ произвольных постоянных вида E_i и λ_i , можно выразить через начальные условия движения каждой массы (при $t = 0$), которыми являются перемещение массы $y_c(0)$ и ее скорость $\dot{y}_c(0)$, и задача о свободных колебаниях будет решена.

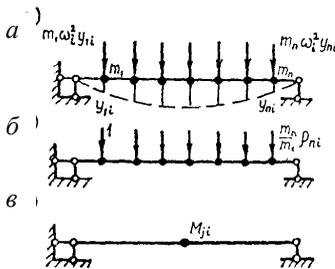


Рис. 7.1.2. Свободные колебания системы:

a – система с n степенями свободы, b – схема сил, определяющих главную форму, c – система с приведенной массой M_{ki}

7.1.3. Главные формы свободных колебаний

Положение масс при свободных колебаниях системы определяет ее форму в любой момент времени. Поскольку свободное движение масс в системе с n степенями свободы (рис. 7.1.2, a) являет-

ся сложным, состоящим из n колебаний с n различными частотами ω_i , то форма движения системы в общем случае будет переменна – отношения перемещений отдельных масс непрерывно меняются. Однако всегда можно задать такие начальные условия движения системы, чтобы колебания всех масс совершались только с одной какой-либо частотой ω_i из спектра частот. Такие колебания и соответствующие им формы называются *главными*, или *нормальными*. Число их равно числу степеней свободы системы. В главных формах колебаний отношения перемещений любых масс всегда постоянны, т. е. не зависят от времени.

Главную форму колебаний с частотой ω_i можно определить перемещениями масс от действующих на систему инерционных сил (рис. 7.1.2,а), поделенных на силу инерции какой-либо (например, первой) массы (рис. 7.1.2,б).

Доказано, что перемещение всех масс в главной форме можно определять как перемещение некоторой воображаемой системы с одной степенью свободы (рис. 7.1.2,в). При этом

$$\omega_i^2 = 1/(M_{ij} \delta_{ji}),$$

где M_{ji} – приведенная масса, равная

$$M_{ji} = m_1 \frac{\delta_{j1} y_{1i}}{\delta_{jj} y_{ji}} + m_2 \frac{\delta_{j2} y_{2i}}{\delta_{jj} y_{ji}} + \dots + m_j + \dots + m_n \frac{\delta_{jn} y_{ni}}{\delta_{jj} y_{ji}}.$$

Доказана также ортогональность главных форм колебаний, состоящая в том, что работа внешних (внутренних) сил одной главной формы на перемещениях (деформациях) другой главной формы равна нулю.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое степень свободы упругой системы, как она определяется?
2. Как определяется частота свободных колебаний для системы с одной степенью свободы?
3. Как определяется частота свободных колебаний для системы с n степенями свободы?
4. Что называется вековым уравнением?

5. Дайте определение спектра частот.
6. Какая частота называется основной?
7. Какие колебания называются главными?
8. Каким свойством обладают главные формы колебаний и в чем его суть?

8. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8.1. Расчет многопролетной статически определимой балки

Пример. Для заданной балки (рис. 8.1.1, а) требуется:

1. Провести анализ геометрической структуры.
2. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, определив при этом экстремальные значения моментов.
3. Построить линии влияния:
 - а) реакции крайней левой и одной промежуточной опор;
 - б) поперечной силы и изгибающего момента в заданных сечениях.
4. Пользуясь построенными линиями влияния, найти величины опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов при заданной нагрузке и сравнить их с соответствующими величинами, полученными в п. 2.

Решение:

1. Степень свободы $C^* = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0$.

Диск BK прикреплен к земле 3-мя опорными связями, следовательно, он геометрически неизменяем. Диск GB прикреплен к земле 1-ой опорной связью и к неподвижному участку балки BK – шарниром B . Следовательно, участок балки GK неизменяем. Диск KN прикреплен к земле 1-ой опорной связью и к неподвижному участку балки GK – шарниром K . Следовательно, участок балки GN неизменяем. Диск NS прикреплен к земле 1-ой опорной связью и к неподвижному участку балки GN – шарниром N . Следовательно, балка в целом неизменяема.

2. Расчет балки ведем, используя условия равновесия отдельных дисков. Последовательность расчета определяется поэтажной схемой (рис. 8.1.1, б)

Диск NS :

$$\sum M_N = q \cdot 4 \cdot 2 - R_p \cdot 4 + F \cdot 5 = 0 ; \quad R_p = 19,25 \text{ кН} ;$$

$$\sum M_p = F \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2 + R_N \cdot 4 = 0 ; \quad R_N = 5,75 \text{ кН} .$$

Проверка: $\sum Y = R_N - q \cdot 4 + R_p - F = 5,75 - 4 \cdot 4 + 19,25 - 9 = 0 .$

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_y = F = 9 \text{ кН} ;$$

$$M_z = Fx_1 \Big|_{x_1=0}^1 = 0 \Big|_{x_1=0}^1 = 9 \text{ кНм} .$$

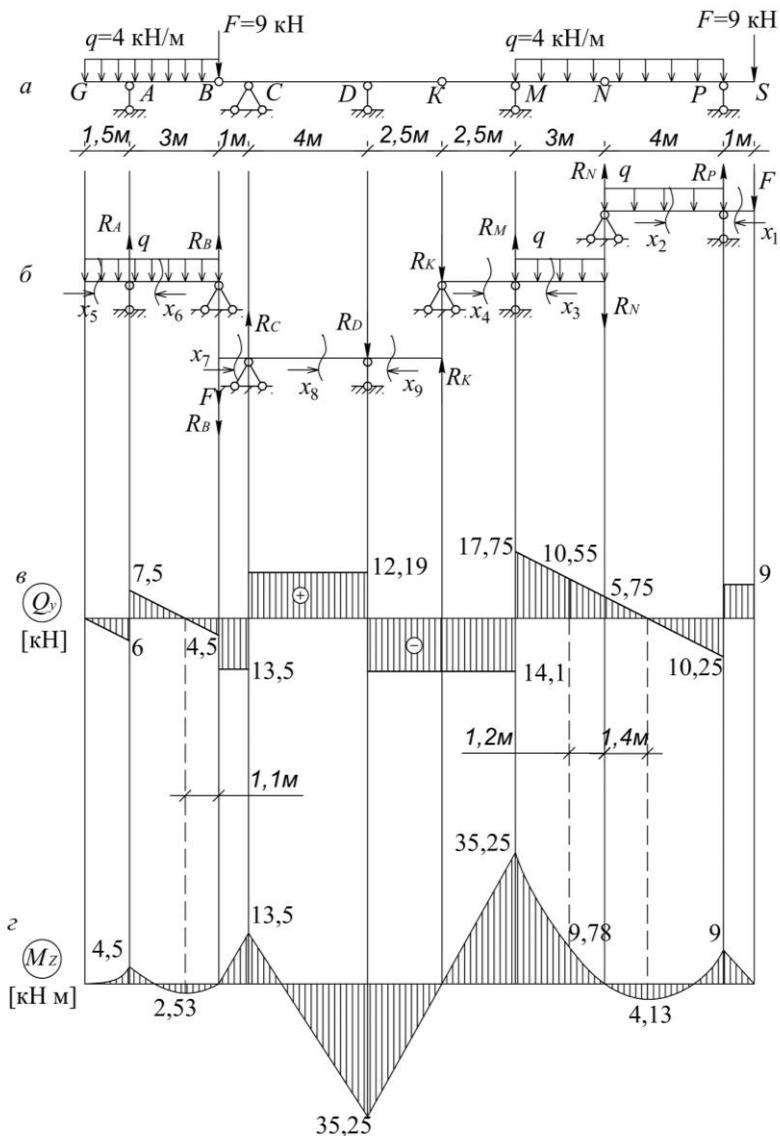


Рис. 8.1.1. К расчету балки на постоянную нагрузку:
 а – расчетная схема; б – поэтажная схема; в – эпюры поперечных сил;
 г – эпюры изгибающих моментов

$$0 \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$$

$$Q_y = R_N - qx_2 \Big|_{x_2=0}^{\Big|_{x_2=4 \text{ м}}} = 5,75 \Big|_{x_2=0}^{\Big|_{x_2=4 \text{ м}}} = -10,25 \text{ кН} ;$$

$$M_Z = R_N x_2 - q \frac{x_2^2}{2} \Big|_{x_2=0}^{\Big|_{x_2=4 \text{ м}}} = 0 \Big|_{x_2=0}^{\Big|_{x_2=4 \text{ м}}} = -9 \text{ кНм} .$$

Экстремум:

$$Q_y = 0 ; \quad R_N - qx_2 = 0 ; \quad x_2 = \frac{R_N}{q} = 1,4 \text{ м} ;$$

$$M_Z^{\text{экстр}} = 5,75 \cdot 1,4 - 4 \cdot \frac{1,4^2}{2} = 4,13 \text{ кНм} .$$

Диск KN:

$$\sum M_K = -R_M \cdot 2,5 + q \cdot 3 \cdot 4 + R_N \cdot 5,5 = 0 ; \quad R_M = 31,85 \text{ кН} ;$$

$$\sum M_M = R_N \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - R_K \cdot 2,5 = 0 ; \quad R_K = 14,1 \text{ кН} .$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = -R_K + R_M - q \cdot 3 - R_N = -14,1 + 31,85 - 4 \cdot 3 - 5,75 = 0 .$$

$$0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$$

$$Q_y = R_N + qx_3 \Big|_{x_3=0}^{\Big|_{x_3=3 \text{ м}}} = 5,75 \Big|_{x_3=0}^{\Big|_{x_3=3 \text{ м}}} = 17,75 \text{ кН} ;$$

$$M_Z = R_N x_3 + q \frac{x_3^2}{2} \Big|_{x_3=0}^{\Big|_{x_3=3 \text{ м}}} = 0 \Big|_{x_3=0}^{\Big|_{x_3=3 \text{ м}}} = 35,25 \text{ кНм} .$$

$$0 \leq x_4 \leq 2,5 \text{ м}$$

$$Q_y = -R_K = -14,1 \text{ кН} ;$$

$$M_Z = -R_K x_4 \Big|_{x_4=0}^{\Big|_{x_4=2,5 \text{ м}}} = 0 \Big|_{x_4=0}^{\Big|_{x_4=2,5 \text{ м}}} = -35,25 \text{ кНм} .$$

Диск GB:

$$\sum M_A = -q \cdot 1,5 \cdot 0,75 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - R_B \cdot 3 = 0 ; \quad R_B = 4,5 \text{ кН} ;$$

$$\sum M_B = -q \cdot 4,5 \cdot 2,25 + R_A \cdot 3 = 0 ; \quad R_A = 13,5 \text{ кН} .$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = R_A + R_B - q \cdot 4,5 = 13,5 + 4,5 - 4 \cdot 4,5 = 0 .$$

$$0 \leq x_5 \leq 1,5 \text{ м}$$

$$Q_y = -qx_5 \Big|_{x_5=0}^{\Big|_{x_5=1,5 \text{ м}}} = 0 \Big|_{x_5=0}^{\Big|_{x_5=1,5 \text{ м}}} = -6 \text{ кН} ;$$

$$M_Z = -q \frac{x_5^2}{2} \Big|_{x_5=0} = 0 \quad \Big|_{x_5=1,5\text{ м}} = -4,5 \text{ кНм} .$$

$$0 \leq x_6 \leq 3 \text{ м}$$

$$Q_y = -R_B + qx_6 \Big|_{x_6=0} = -4,5 \quad \Big|_{x_6=3\text{ м}} = 7,5 \text{ кН} ;$$

$$M_Z = -R_B x_6 + q \frac{x_6^2}{2} \Big|_{x_6=0} = 0 \quad \Big|_{x_6=3\text{ м}} = 4,5 \text{ кНм} .$$

Экстремум:

$$Q_y = 0 ; \quad -R_B + qx_6 = 0 ; \quad x_6 = \frac{R_B}{q} = 1,1 \text{ м} ;$$

$$M_Z^{\text{экстр}} = -4,5 \cdot 1,1 + 4 \cdot \frac{1,1^2}{2} = -2,53 \text{ кНм} .$$

Диск ВК:

$$\sum M_C = -F \cdot 1 - R_B \cdot 1 + R_D \cdot 4 - R_K \cdot 6,5 = 0 \quad R_D = 26,29 \text{ кН} ;$$

$$\sum M_D = -R_K \cdot 2,5 + R_C \cdot 4 - F \cdot 5 - R_B \cdot 5 = 0 \quad R_C = 25,69 \text{ кН} .$$

Проверка:

$$\sum Y = -F - R_B + R_C - R_D + R_K = -9 - 4,5 + 25,69 - 26,29 + 14,1 = 0 .$$

$$0 \leq x_7 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_y = -F - R_B = -13,5 \text{ кН} ;$$

$$M_Z = -Fx_7 - R_B x_7 \Big|_{x_7=0} = 0 \quad \Big|_{x_7=1\text{ м}} = -13,5 \text{ кНм} .$$

$$0 \leq x_8 \leq 4 \text{ м}$$

$$Q_y = -F - R_B + R_C = 12,9 \text{ кН} ;$$

$$M_Z = -F(1 + x_8) - R_B(1 + x_8) + R_C x_8 \Big|_{x_8=0} = -13,5 \quad \Big|_{x_8=4\text{ м}} = 35,25 \text{ кНм} .$$

$$0 \leq x_9 \leq 2,5 \text{ м}$$

$$Q_y = -R_K = -14,1 \text{ кН} ;$$

$$M_Z = -R_K x_9 \Big|_{x_9=0} = 0 \quad \Big|_{x_9=2,5\text{ м}} = -35,25 \text{ кНм} .$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов представлены на рис. 8.1.1, в, з.

3. При построении линий влияния руководствуемся поэтажной схемой (рис. 8.1.2, б)

Построение л. в. R_A (рис. 8.1.2, в):

$$0 \leq x \leq 4,5$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 3 - Fx = 0 ; \quad R_A = \frac{Fx}{3} \Big|_{x=0}^0 \Big|_{x=3}^1 \Big|_{x=4,5}^{1,5} .$$

Согласно полученным данным в начале участка (точка B) откладываем ноль, в точке A (при $x=3$ м) откладываем единицу, а в точке G (при $x=4,5$ м) откладываем «1,5». Правее точки B линия влияния отсутствует, т. к. диск BK находится ниже диска GB .

Построение л. в. R_D (рис. 8.1.2, г):

$$0 \leq x \leq 4$$

$$\sum M_C = -R_D \cdot 4 + Fx = 0 ; \quad R_D = \frac{Fx}{4} \Big|_{x=0}^0 \Big|_{x=4}^1 .$$

Согласно полученным данным в C откладываем ноль, в точке D – единицу. Продлевать линию влияния следует и вправо и влево, т. к. диски GB , KN и NS расположены выше диска BK . Недостающие ординаты находим по подобию треугольников:

$$y_K = \frac{6,5 \cdot 1}{4} = 1,625 ; \quad y_S = \frac{1,95 \cdot 1}{4} = 0,4875 ; \quad y_G = \frac{0,25 \cdot 1,5}{3} = 0,125 ;$$

$$y_N = \frac{3 \cdot 1,625}{2,5} = 1,95 ; \quad y_B = \frac{1 \cdot 1}{4} = 0,25 .$$

Построение л. в. $Q_C^{\text{лев}}$ (рис. 8.1.2, д):

Данная линия влияния относится к сечению, расположенному на консоли бесконечно близко к опоре C . Если груз находится справа от сечения, $Q_C^{\text{лев}} = 0$. Если груз находится слева от рассматриваемого сечения, $Q_C^{\text{лев}} = -F = -1$. Кроме того, следует продлить линию влияния на диск GB , т. к. он находится выше диска BK . Недостающую ординату находим по подобию треугольников:

$$y_G = \frac{1,5 \cdot 1}{3} = 0,5 .$$

Построение л. в. $Q_C^{\text{пр}}$ (рис. 8.1.2, е):

Данная линия влияния относится к сечению, расположенному в пролете CD , бесконечно близко к опоре C . Если груз находится справа от сечения, $Q_C^{\text{пр}} = R_C$ (правая прямая). Если груз находится слева от сечения, $Q_C^{\text{пр}} = -R_D$ (левая прямая). Таким образом, линия влияния

состоит из двух параллельных прямых, причем в точке C между левой и правой прямой получается уступ, равный единице. Продлеваем левую прямую влево, а правую – вправо на вышележащие диски. Недостающие ординаты находим по подобию треугольников:

$$y_B = \frac{1 \cdot 1}{4} = 0,25 ; \quad y_K = \frac{1 \cdot 2,5}{4} = 0,625 ; \quad y_S = \frac{0,75 \cdot 1}{4} = 0,1875 ;$$

$$y_G = \frac{1,5 \cdot 0,25}{3} = 0,125 ; \quad y_N = \frac{3 \cdot 0,625}{2,5} = 0,75 .$$

Построение л. в. M_C (рис. 8.1.2, ж):

Если груз находится справа от сечения, т. е. в пролете, консоль BC не деформируется. Следовательно, $M_C=0$, и линия влияния M_C на участке CD имеет нулевые ординаты. Если груз находится слева от

сечения, т. е. на консоли, $M_C = -Fx$ $\left. \begin{array}{l} = 0 \\ x = 0 \end{array} \right|_{x=1} = -1$.

Согласно полученным данным в точке C откладываем ординату ноль, а в точке B – единицу. Продлеваем линию влияния на вышележащий диск GB . Недостающую ординату определяем по подобию тре-

угольников: $y_G = \frac{1 \cdot 1,5}{3} = 0,5$.

Построение л. в. Q_I (рис. 8.1.2, з):

Данная линия влияния относится к сечению, расположенному на консоли. Если груз находится слева от сечения I , $Q_I = 0$. Если груз находится справа от рассматриваемого сечения, то $Q_I = F = 1$. Линию влияния продлеваем на вышележащий диск NS . Недостающую ординату определяем по подобию треугольников:

$$y_S = \frac{1 \cdot 1}{4} = 0,25 .$$

Построение л. в. M_I (рис. 8.1.2, и):

Данная линия влияния относится к сечению, расположенному на консоли. Если груз находится слева от сечения I , $M_I = 0$. Если груз находится справа от рассматриваемого сечения, то

$$M_I = -Fx \left. \begin{array}{l} = 0 \\ x = 0 \end{array} \right|_{x=1,2} = -1,2 .$$

Продлеваем линию влияния на вышележащий диск NS . Недостающую ординату определяем по подобию треугольников:

$$y_S = \frac{1,2 \cdot 1}{4} = 0,3 .$$

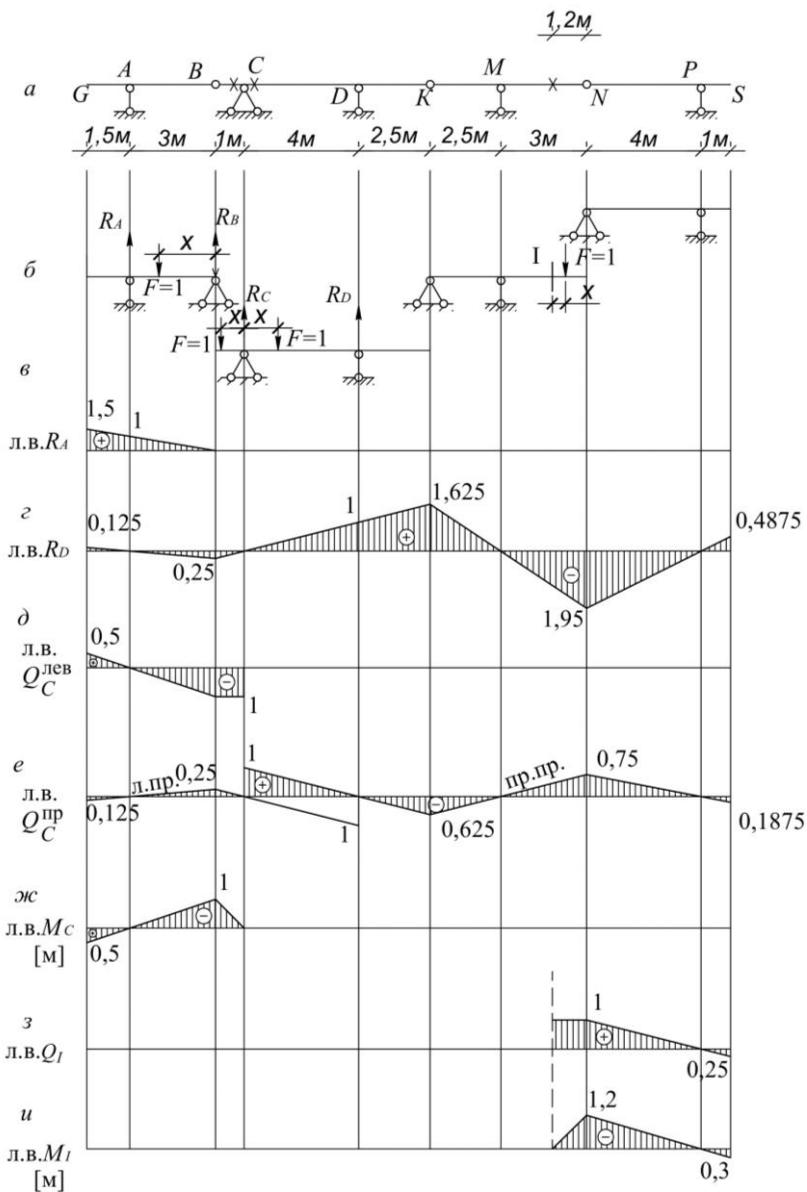


Рис. 8.1.2. К расчету балки на подвижную нагрузку:
 а – расчетная схема; б – поштатная схема; в-и – линии влияния
 опорных реакций и внутренних усилий

4. Используя построенные линии влияния определим величину опорных реакций и внутренних усилий от заданной нагрузки:

$$R_A = q \left(\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 4,5 \right) = 13,5 \text{ кН} ;$$

$$R_D = q \left(\frac{1}{2} \cdot 0,125 \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 3 \right) + F(-0,25) + q \left(-\frac{1}{2} \cdot 1,95 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1,95 \cdot 4 \right) + F(0,4875) = -26,29 \text{ кН};$$

$$Q_C^{\text{лев}} = q \left(\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \right) + F(-1) = -13,5 \text{ кН} ;$$

$$Q_C^{\text{пр}} = q \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,125 \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 3 \right) + F(0,25) + q \left(\frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 7 \right) + F(-0,1875) = 12,19 \text{ кН};$$

$$M_C = q \left(\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \right) + F(-1) = -13,5 \text{ кНм} ;$$

$$Q_I = q \left(1 \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \right) + F(-0,25) = 10,55 \text{ кН} ;$$

$$M_I = q \left(-\frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 5,2 \right) + F \cdot 0,3 = -9,78 \text{ кНм} .$$

Как и следовало полагать, имеем совпадение с расчетом в п. 2.

8.2. Расчет многодисковой системы

Пример. Для многодисковой системы (рис. 8.2.1, а) требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Решение. Степень свободы $W = 3Д - 2Ш - C_{\text{он}} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$. Система статически определима.

Анализ геометрической структуры: диск ADB присоединен к земле тремя связями и является неизменяемым. К нему диск CA присоединен диском CD и шарниром A . Система геометрически неизменяема.

Из условия равновесия системы (рис. 8.2.1, а) определим значения опорных реакций:

$$\sum F_x = q \cdot 5 - F - H_B = 0 ; H_B = 11 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 7 - F \cdot 4 - F \cdot 5 - M + q \cdot 5 \cdot 2,5 = 0 ; R_A = 20,93 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = -R_B \cdot 7 + F \cdot 3 - F \cdot 5 - M + q \cdot 5 \cdot 2,5 = 0; \quad R_B = 3,07 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = R_A - F + R_B = 20,93 - 24 + 3,07 = 0.$$

Далее для решения задачи используем способ расчленения системы на диски.

Сечение I-I (рис. 8.2.1, б).

$$\sum M_A = -O_C \cdot 5 - M + q \cdot 5 \cdot 2,5 = 0; \quad O_C = 13,9 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = O_A \cdot 5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 - M = 0; \quad O_A = 21,1 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = q \cdot 5 - O_C - O_A = 35 - 13,9 - 21,1 = 0.$$

Диск CD (рис. 8.2.1, в).

$$\sum M_D = 13,9 \cdot 2,5 - F \cdot 2,5 + V_C \cdot 3 = 0; \quad V_C = 8,42 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 13,9 - F + O_D = 0; \quad O_D = 10,1 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = -10,1 \cdot 2,5 + V_D \cdot 3 = 0; \quad V_D = 8,42 \text{ кН};$$

Уравнение для проверки равновесия диска:

$$\sum F_y = 8,42 - 8,42 = 0.$$

Диск AC (рис. 8.2.1, б).

Перенесем в шарнир C найденное значение $V_C = 8,42 \text{ кН}$ и из уравнения $\sum F_y = -V_C - V_A + R_A = 0$ найдем значение $V_A = 12,51 \text{ кН}$.

Диск ADB (рис. 8.2.1, г).

Уравнения для проверки его равновесия:

$$\sum F_x = 21,1 - 10,1 - 11 = 0;$$

$$\sum F_y = 12,51 + 8,42 - F + R_B = 12,51 + 8,42 - 24 + 3,07 = 0.$$

Далее составим выражения для определения внутренних усилий по дискам (рис. 8.2.1, б-г).

Участок 1 ($0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$).

$$Q = V_C = 8,42 \text{ кН};$$

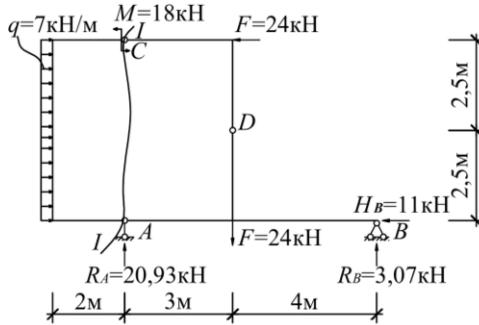
$$M = M - V_C x_1 = 18 - 8,42 x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=2} = \begin{matrix} 18 \\ 1,16 \text{ кНм} \end{matrix};$$

$$N = -O_C = -13,9 \text{ кН}.$$

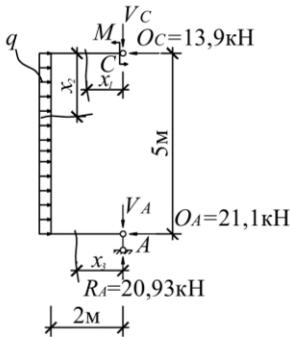
Участок 2 ($0 \leq x_2 \leq 5 \text{ м}$).

$$Q = -O_C + qx_2 = -13,9 + 7x_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=5} = \begin{matrix} -13,9 \\ 21,1 \text{ кН} \end{matrix};$$

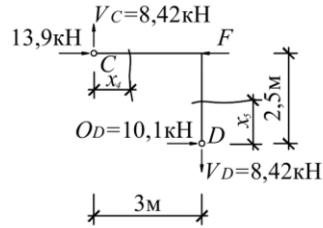
a



б



в



г

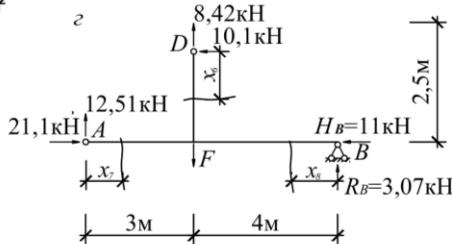


Рис. 8.2.1. Многодисковая система:

a – расчетная схема системы; б-г – расчетные схемы отдельных дисков

$$M = M - V_C \cdot 2 + O_C x_2 - q \frac{x_2^2}{2} = 18 - 8,42 \cdot 2 + 13,9 x_2 - 7 \frac{x_2^2}{2} \Big|_{x_2 = 0} \Big|_{x_2 = 5 \text{ м}} = -16,84 \text{ кНм}$$

Определим экстремальное значение момента.

$$Q = -O_C + qx = 0, \quad x = \frac{O_C}{q} = 1,99 \text{ м},$$

$$M \Big|_{x=1,99} = M - V_C \cdot 2 + O_C \cdot 1,99 - q \cdot \frac{1,99^2}{2} = 14,96 \text{ кН м};$$

$$N = -V_C = -8,42 \text{ кН}.$$

Участок 3 ($0 \leq x_3 \leq 2\text{м}$).

$$Q = V_A - R_A = 12,51 - 20,93 = -8,42 \text{ кН};$$

$$M = (R_A - V_A) \cdot x_3 = \begin{cases} 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Big|_{x_3=2\text{ м}} = 16,84 \text{ кНм};$$

$$N = -O_A = -21,1 \text{ кН}.$$

Участок 4 ($0 \leq x_4 \leq 3\text{м}$).

$$Q = V_C = 8,42 \text{ кН}; \quad M = V_C x_4 \Big|_{x_4=0}^0 = 25,25 \text{ кНм};$$

$$N = -13,9 \text{ кН}.$$

Участок 5 ($0 \leq x_5 \leq 2,5\text{м}$).

$$Q = -O_D = -10,1 \text{ кН}; \quad M = -O_D x_5 \Big|_{x_5=0}^0 = 25,25 \text{ кНм};$$

$$N = V_D = 8,42 \text{ кН}.$$

Участок 6 ($0 \leq x_6 \leq 2,5\text{м}$).

$$Q = -10,1 \text{ кН}; \quad M = 10,1 x_6 \Big|_{x_6=0}^0 = 25,25 \text{ кНм};$$

$$N = 8,42 \text{ кН}.$$

Участок 7 ($0 \leq x_7 \leq 3\text{м}$).

$$Q = 12,51 \text{ кН}; \quad M = 12,51 x_7 \Big|_{x_7=0}^0 = 37,53 \text{ кНм};$$

$$N = -21,1 \text{ кН}.$$

Участок 8 ($0 \leq x_8 \leq 4\text{м}$).

$$Q = -R_B = -3,07 \text{ кН}; \quad M = R_B x_8 \Big|_{x_8=0}^0 = 12,28 \text{ кНм};$$

$$N = -H_B = -11 \text{ кН}.$$

Эпюры внутренних усилий Q , M , N даны на рис. 8.2.2, а-в.

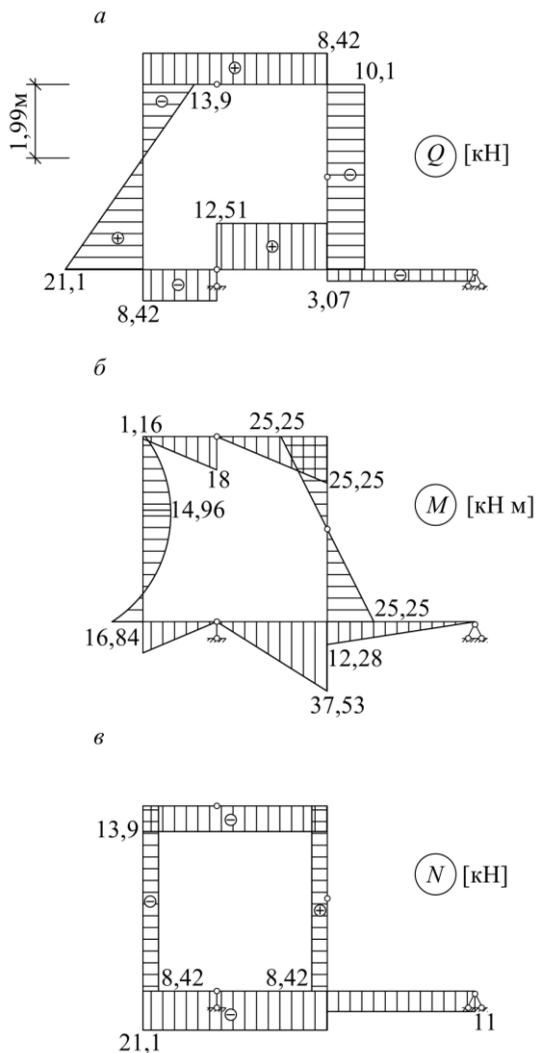


Рис. 8.2.2. Эпюры внутренних усилий:
 а – эпюра поперечных сил ; б – эпюра изгибающих моментов;
 в – эпюра продольных сил

8.3. Расчет плоской статически определимой балочно-консольной фермы

Пример. Для заданной фермы (рис. 8.3.1) требуется:

1. Провести анализ изменяемости.
2. Определить с помощью аналитических методов усилия в заданных стержнях.
3. Построить линии влияния этих усилий при перемещении груза $F=1$ по верхнему и нижнему поясам фермы.
4. Определить усилия по линиям влияния и сравнить их с вычислениями в п. 2.

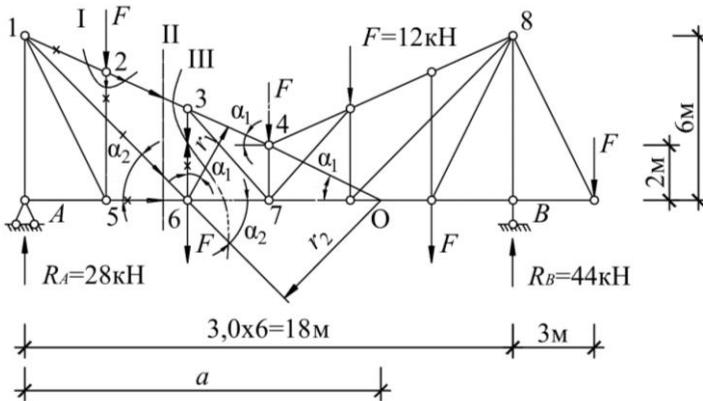


Рис. 8.3.1. Расчетная схема балочно-консольной фермы

Решение:

1. Заданная ферма имеет 15 узлов ($У$), 27 стержней ($С$) и 3 опорных связи ($С_{оп}$). Имеем $2У-С-С_{оп}=2 \cdot 15-27-3=0$ – статически определима. Ферма состоит только из треугольников и, следовательно, геометрически неизменяема.

2. Из условия равновесия фермы определим реакции:

$$\sum M_B = R_A \cdot 18 - F \cdot (15 + 12 + 9 + 6 + 3) + F \cdot 3 = 0; \quad R_A = 28 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = -R_B \cdot 18 + F \cdot (21 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3) = 0; \quad R_B = 44 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = R_A + R_B - 6F = 28 + 44 - 6 \cdot 12 = 0.$$

Усилие N_{25} , Сечение I:

$$N_{25} = -F = -12 \text{ кН}.$$

Усилие N_{12} .

Ввиду сложности его определения, определим усилие N_{23} , т. к. $N_{12}=N_{23}$.

Усилие N_{23} . Сечение II:

$$\sum M_6 = R_A \cdot 6 - F \cdot 3 + N_{23} r_1 = 0 .$$

Здесь $r_1 = \ell_{3-6} \cos \alpha_1$; $\ell_{3-6} = 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 3,33 \text{ м}$;

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{4}{9} = 0,444 \quad ; \quad \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,444^2}} = 0,914 \quad ;$$

$$r_1 = 3,33 \cdot 0,914 = 3,04 \text{ м} . \quad N_{23} = \frac{-28 \cdot 6 + 12 \cdot 3}{3,04} = -43,42 \text{ кН} .$$

Усилие N_{56} . Сечение II:

$$\sum M_1 = F \cdot 3 - N_{56} \cdot 6 = 0 ; \quad N_{56} = \frac{12 \cdot 3}{6} = 6 \text{ кН} .$$

Усилие N_{16} . Сечение II:

$$\sum M_0 = R_A a - F(a-3) - N_{16} r_2 = 0 ;$$

Здесь $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{6}{a}$; $a = \frac{6}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{6}{0,444} = 13,51 \text{ м}$;

$$r_2 = (a-6) \cdot \sin \alpha_2 ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{6}{6} = 1 ; \quad \sin \alpha_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1^2}} = 0,707 \quad ;$$

$$r_2 = (13,51 - 6) \cdot 0,707 = 5,31 \text{ м} .$$

$$N_{16} = \frac{28 \cdot 13,51 - 12 \cdot (13,51 - 3)}{5,31} = 47,49 \text{ кН} .$$

Усилие N_{36} . Сечение III:

$$\sum M_0 = R_A \cdot a - F(a-3) - F(a-6) + N_{36}(a-6) = 0 ;$$

$$N_{36} = \frac{-28 \cdot 13,51 + F \cdot (10,51 + 7,51)}{7,51} = -21,58 \text{ кН} .$$

3. Для построения линий влияния усилий в стержнях фермы (рис. 8.3.2) используем те же методы и уравнения, которые использовались при определении усилий от неподвижной нагрузки.

Линия влияния N_{25} (рис. 8.3.2, б). Сечение I:

При положении единичного груза в узле 2 усилие $N_{25} = -1$. Эту ординату линии влияния соединим прямыми с нулевыми ординатами в крайних узлах 1 и 3.

Линия влияния N_{12} .

Поскольку усилия $N_{12}=N_{23}$, то в целях простоты построения построим линию влияния N_{23} .

Линия влияния N_{23} (рис. 8.3.2, в). Сечение II:

Рассмотрим два положения груза:

а) груз правее сечения:

$$\sum M_6 = R_A \cdot 6 + N_{23} r_1 = 0 ; \quad N_{23} = -R_A \cdot \frac{6}{3,04} = -1,97 R_A ;$$

б) груз левее сечения:

$$\sum M_6 = -R_B \cdot 12 - N_{23} r_1 = 0 ; \quad N_{23} = -R_B \cdot \frac{12}{3,04} = -3,94 R_B .$$

Увеличивая линии влияния R_A и R_B в 1,97 и 3,94 раза соответственно, проводим прямые, пересекающиеся под моментной точкой б. Передаточная прямая на участке 2-3 совпадает с прямой $3,94 R_B$.

Линия влияния N_{56} (рис. 8.3.2, г). Сечение II:

а) груз находится справа от сечения:

$$\sum M_1 = R_A \cdot 0 - N_{56} \cdot 6 = 0 ; \quad N_{56} = 0 ;$$

б) груз находится слева от сечения:

$$\sum M_1 = -R_B \cdot 18 + N_{56} \cdot 6 = 0 ; \quad N_{56} = 3R_B .$$

Влияние груза выражается передаточной прямой между узлами рассеченной панели. Ордината под узлом 5 будет $\frac{1}{6} \cdot 3 = 0,5$.

Линия влияния N_{16} (рис. 8.3.2, д). Сечение II:

а) при расположении груза правее сечения имеем:

$$\sum M_0 = R_A \cdot a - N_{16} r_2 = 0 ; \quad N_{16} = R_A \frac{13,51}{5,31} = 2,54 R_A ;$$

б) при расположении груза левее сечения имеем:

$$\sum M_0 = -R_B (18 - a) + N_{16} r_2 = 0 ; \quad N_{16} = R_B \frac{18 - 13,51}{5,31} = 0,85 R_B .$$

Передаточная прямая – между узлами рассеченной панели.

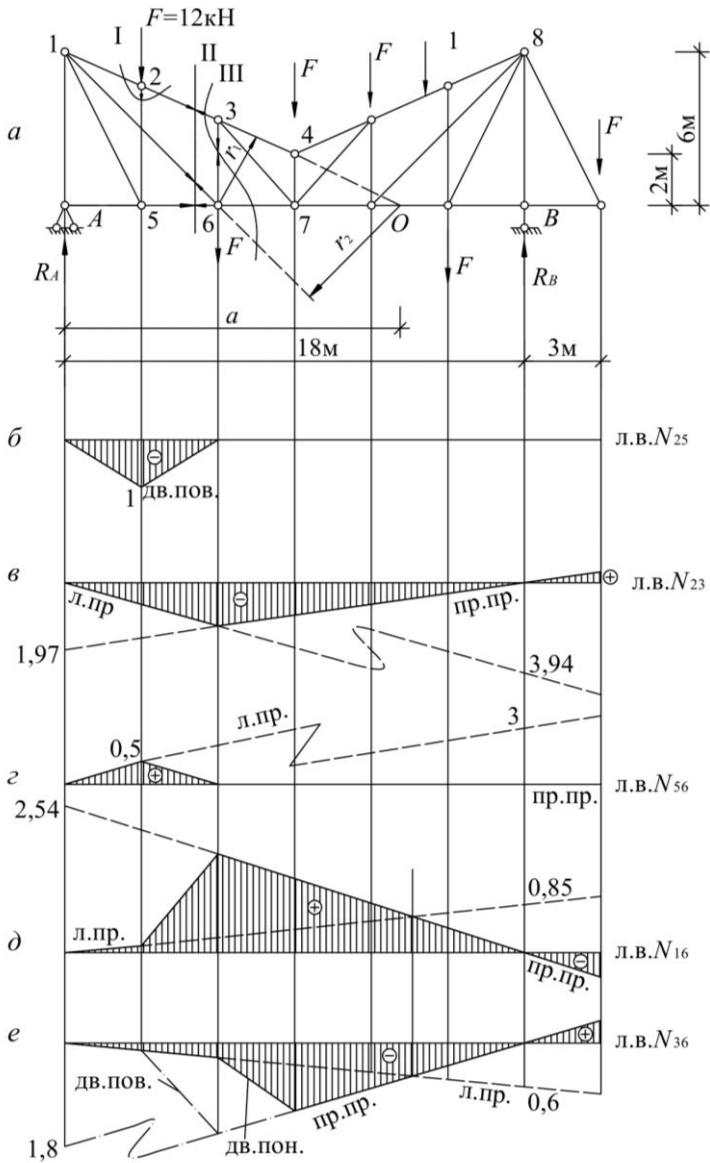


Рис. 8.3.2. К построению линий влияния:
 а – расчетная схема; б-е – линии влияния усилий в стержнях фермы

Линия влияния N_{36} (рис. 8.3.2, е). Сечение III:

а) груз правее сечения:

$$\sum M_0 = R_A a + N_{36} (a - 6) = 0; \quad N_{36} = -R_A \frac{13,51}{13,51 - 6} = -1,8 R_A;$$

б) груз левее сечения:

$$\sum M_0 = -R_B (18 - a) - N_{36} (a - 6) = 0; \quad N_{36} = -R_B \frac{18 - 13,51}{13,51 - 6} = -0,5 R_B.$$

Здесь следует разграничить движение по верхнему и нижнему поясам фермы. При движении поверху передаточная прямая – между узлами 2 и 3, при движении по низу – между узлами 6 и 7.

4. Для определения усилий в стержнях фермы от заданной нагрузки используем построенные линии влияния.

$$N_{25} = -12 \cdot 1 = -12 \text{ кН}, \quad (-12 \text{ кН});$$

$$N_{23} = -12 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 3,94 + \frac{2}{6} \cdot 3,94 + \frac{3}{6} \cdot 1,97 + \frac{2}{6} \cdot 1,97 + \frac{1}{6} \cdot 1,97 \right) + 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,97 =$$

$$= -43,34 \text{ кН}, \quad (-43,42 \text{ кН}), \quad \Delta = 0,18 \%;$$

$$N_{56} = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН}, \quad (6 \text{ кН});$$

$$N_{16} = 12 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 0,85 + \frac{4}{6} \cdot 2,54 + \frac{3}{6} \cdot 2,54 + \frac{2}{6} \cdot 2,54 + \frac{1}{6} \cdot 2,54 - \frac{1}{6} \cdot 2,54 \right) = 47,42 \text{ кН},$$

$$(47,49 \text{ кН}), \quad \Delta = 0,15 \%;$$

$$N_{23} = -12 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 0,6 + \frac{2}{6} \cdot 0,6 + \frac{3}{6} \cdot 1,8 + \frac{2}{6} \cdot 1,8 + \frac{1}{6} \cdot 1,8 \right) + 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,8 = -21,59 \text{ кН},$$

$$(-21,58 \text{ кН}), \quad \Delta = 0,05 \%.$$

Полученные величины усилий совпадают или незначительно отличаются от результатов в п. 2 (указаны в скобках).

8.4. Расчет консольной фермы

Пример. Для заданной фермы (рис. 8.4.1) требуется:

1. Провести анализ изменяемости.
2. Определить с помощью аналитических методов усилия в заданных стержнях.
3. Построить линии влияния этих усилий при перемещении груза $F=1$ по верхнему и нижнему поясам фермы.
4. Определить усилия по линиям влияния и сравнить их с вычислениями в п. 2.

$$\sin \alpha_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{1,9}{\sqrt{1 + 1,9^2}} = 0,885 ;$$

$$r_1 = 7,5 \cdot 0,885 = 6,64 \text{ м} .$$

$$N_{B6} = \frac{8(1,5 + 3,5 + 2 \cdot 5,5 + 7,5)}{6,64} = 28,31 \text{ кН} .$$

Усилие N_{23} . Сечение II:

$$\sum M_8 = F \cdot 2 - N_{23} \cdot 3 = 0 ; \quad N_{23} = 5,33 \text{ кН} .$$

Усилие N_{25} – усилие в раскосе полураскосной фермы. Используем способ двух сечений (сечения III и IV). Каждое сечение содержит четыре неизвестных, причем два из них повторяются в обоих сечениях.

$$\text{Сечение III: } \sum X = N_{25} \cos \alpha_3 + N_{57} \cos \alpha_3 = 0 ; \quad N_{25} = -N_{57} .$$

$$\text{Сечение IV: } \sum Y = -2F + N_{25} \sin \alpha_3 - N_{57} \sin \alpha_3 = 0 ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{1,5}{2} = 0,75 ; \quad \sin \alpha_3 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_3}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_3}} = \frac{0,75}{\sqrt{1 + 0,75^2}} = 0,6 .$$

$$N_{25} = \frac{2F}{2 \sin \alpha_3} = 13,33 \text{ кН} .$$

Усилие N_{24} . Сечение V:

$$\sum Y = F + N_{24} + N_{25} \sin \alpha_3 = 0 ;$$

$$N_{24} = -F - N_{25} \sin \alpha_3 = -8 - 13,33 \cdot 0,6 = -16 \text{ кН} .$$

3. Для построения линий влияния усилий в стержнях консольной фермы (рис. 8.4.2, а) используем те же методы и уравнения, которые использовались при определении усилий от неподвижной нагрузки. При этом положение единичного груза рассмотрим правее необходимых сечений.

Линия влияния N_{A6} (рис. 8.4.2, б). Сечение I ($0 \leq x_1 \leq 8 \text{ м}$):

$$\sum M_B = 1x_1 + N_{A6} \cdot 3,8 = 0 ;$$

$$N_{A6} = -1 \frac{x_1}{3,8} \Big|_{x_1=0}^0 = -2,11 \Big|_{x_1=0}^{x_1=8 \text{ м}} .$$

Линия влияния N_{B6} (рис. 8.4.2, в). Сечение I ($0 \leq x_2 \leq 6 \text{ м}$):

$$\sum M_0 = -1(6 + a - x_2) + N_{B6} r_1 = 0 ;$$

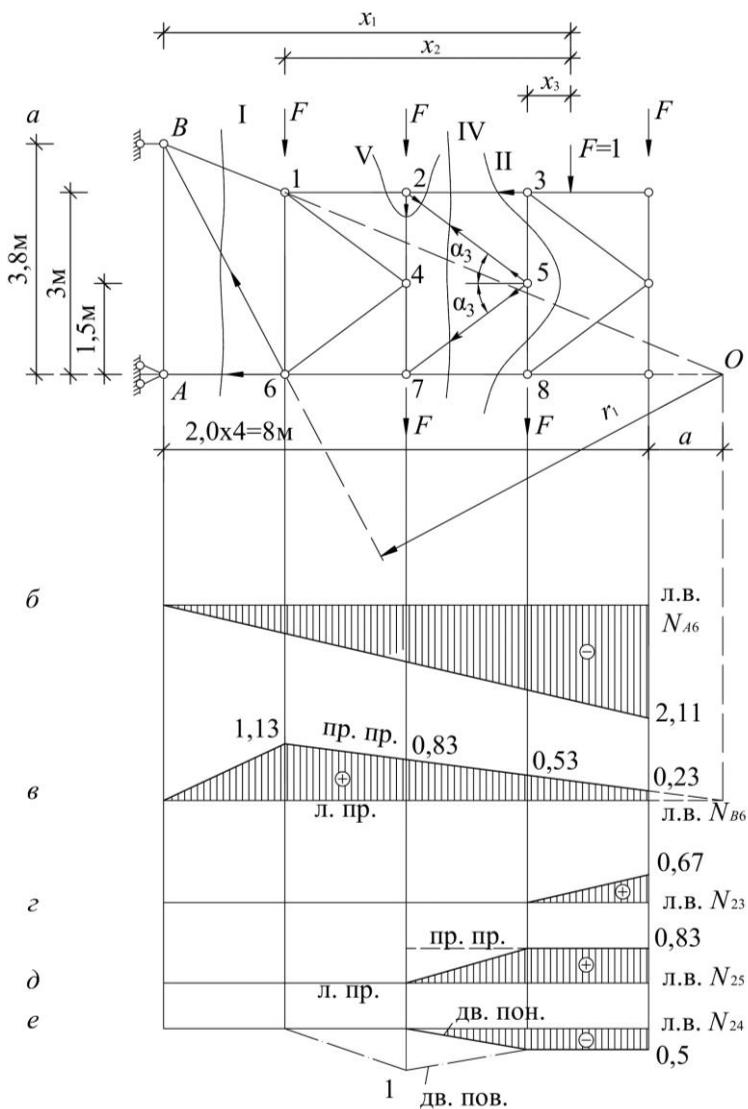


Рис. 8.4.2. К построению линий влияния:
 а – расчетная схема; б-е – линии влияния усилий в стержнях фермы

$$N_{B6} = 1 \frac{7,5 - x_2}{6,64} \Big|_{x_2=0}^{1,13} = 0,23 \Big|_{x_2=0}^{6 \text{ м}} .$$

Передаточная прямая проходит в пределах рассеченной панели между узлами В и 1, соединяя правую прямую и левую (базисную).

Линия влияния N_{23} (рис. 8.4.2, з). Сечение II ($0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$):

$$\sum M_8 = 1x_3 - N_{23} \cdot 3 = 0 ;$$

$$N_{23} = 1 \frac{x_3}{3} \Big|_{x_3=0}^0 = 0 \Big|_{x_3=0}^{2 \text{ м}} .$$

Линия влияния N_{25} (рис. 8.4.2, д). Сечение IV:

$$\sum Y = -1 + N_{25} \sin \alpha_3 - N_{57} \sin \alpha_3 = 0 ; \quad \text{т. к. } N_{25} = -N_{57}, \text{ то}$$

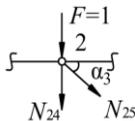
$$N_{25} = \frac{1}{2 \sin \alpha_3} = \frac{1}{2 \cdot 0,6} = 0,83 .$$

Правая прямая с ординатой 0,83 параллельна базисной, передаточная прямая – между узлами 2 и 3 рассеченной панели.

Линия влияния N_{24} (рис. 8.4.2, е). Сечение V (рис. 8.4.3):

Рассмотрим два положения груза:

а) движение груза понизу:



$$\sum Y = N_{24} + N_{25} \sin \alpha_3 = 0 ;$$

$$N_{24} = -N_{25} \sin \alpha_3 = -N_{25} \cdot 0,6 = -0,5 ;$$

Рис. 8.4.3. Расчетная схема узла 2

б) движение груза поверху, при нагрузке в узле 2:

$$\sum Y = N_{24} + N_{25} \sin \alpha_3 + 1 = 0 ;$$

$$N_{24} = -N_{25} \sin \alpha_3 - 1 .$$

Под узлом 2 усилие равно -1. Эту ординату линии влияния соединяем слева с нулевой ординатой, справа – с ординатой 0,5.

4. Определим усилия в стержнях фермы, используя построенные линии влияния:

$$N_{A6} = -8 \left(\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + 1 \right) \cdot 2,11 = -50,64 \text{ кН (погрешность 0,22%);}$$

$$N_{B6} = 8(1,13 + 2 \cdot 0,83 + 0,53 + 0,23) = 28,4 \text{ кН (погрешность 0,32%);}$$

$$N_{23} = 8 \cdot 0,67 = 5,36 \text{ кН (погрешность 0,56%);}$$

$$N_{25} = 8 \cdot 0,83 \cdot 2 = 13,28 \text{ кН (погрешность } 0,33\%);$$

$$N_{24} = -8(1 \cdot 0,5 + 0,5) = -16 \text{ кН .}$$

Полученные величины усилий отличаются от найденных в п. 2 в пределах допускаемого 1%.

8.5. Расчет трехшарнирной арки

Пример. Для заданной трехшарнирной арки (рис. 8.5.1) требуется:

1. Определить опорные реакции трехшарнирной арки.
2. От заданной нагрузки определить усилия N , Q , M в сечении K .
3. Построить линии влияния N , Q , M в указанном сечении.
4. Определить усилия по линиям влияния от заданной нагрузки и сравнить с данными, полученными в пункте 2.

Ось арки очерчена по параболе $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$.

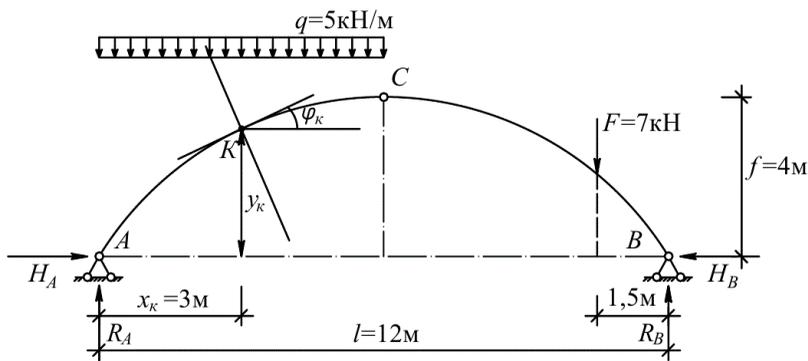


Рис. 8.5.1. Расчетная схема арки

Решение:

1. Для определения опорных реакций составим уравнения, используя рис. 8.5.1.

$$\sum M_A = q \cdot 6 \cdot 3 + F \cdot 10,5 - R_B \cdot 12 = 0 \rightarrow R_B = 13,625 \text{ кН ;}$$

$$\sum M_B = -F \cdot 1,5 - q \cdot 6 \cdot 9 + R_A \cdot 12 = 0 \rightarrow R_A = 23,375 \text{ кН .}$$

Проверка: $\sum Y = R_A - q \cdot 6 - F + R_B = 23,375 - 5 \cdot 6 - 7 + 13,625 = 0 .$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = -q \cdot 6 \cdot 3 + R_A \cdot 6 - H_A \cdot 4 = 0 \rightarrow H_A = 12,56 \text{ кН ;}$$

$$\sum M_C^{\text{вп}} = F \cdot 4,5 - R_B \cdot 6 + H_B \cdot 4 = 0 \rightarrow H_B = 12,56 \text{ кН} .$$

Проверка: $\sum X = H_A - H_B = 12,56 - 12,56 = 0$.

2. Для определения внутренних усилий следует найти значения коэффициентов.

Абсцисса точки K задана: $x_K=3\text{м}$. Ординату точки K вычисляем исходя из заданного уравнения оси арки:

$$y_K = \frac{4f}{\ell^2} \cdot x_K (\ell - x_K) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} \cdot 3 \cdot (12 - 3) = 3 \text{ м} .$$

Значение тангенса угла наклона касательной к оси арки находим из выражения:

$$\text{tg } \varphi_K = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{\ell^2} (\ell - 2x_K) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} \cdot (12 - 2 \cdot 3) = 0,667 .$$

Следовательно, $\varphi_K = 33,69^\circ$, $\cos \varphi_K = 0,832$, $\sin \varphi_K = 0,555$.

Усилия в сечении K с координатами центра тяжести x_K и y_K определяем по формулам, указанным в п. 1.6.

$$M_K = R_A x_K - q x_K \frac{x_K}{2} - H_A y_K = 23,375 \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 12,56 \cdot 3 = 9,9 \text{ кНм};$$

$$Q_K = R_A \cos \varphi_K - q x_K \cos \varphi_K - H_A \sin \varphi_K = 23,375 \cdot 0,832 - 5 \cdot 3 \cdot 0,832 - 12,56 \cdot 0,555 = 0;$$

$$N_K = -R_A \sin \varphi_K + q x_K \sin \varphi_K - H_A \cos \varphi_K = -23,375 \cdot 0,555 + 5 \cdot 3 \cdot 0,555 - 12,56 \cdot 0,832 = -15,1 \text{ кН} .$$

3. Для построения линий влияния N , Q , M нам потребуется построить линию влияния распора H . При вертикальной нагрузке распор

определяется уравнением $H = \frac{M_C^0}{f}$, из которого следует, что линия

влияния имеет такой же вид, как и линия влияния балочного момента

M_C^0 и отличается от нее лишь постоянным множителем $\frac{1}{f}$. Линия

влияния распора представлена на рис. 8.5.2, б.

Для построения линий влияния N , Q , M воспользуемся формулами, указанными в п. 1.6.

Линия влияния M_K (рис. 8.5.2, д) в сечении K представляет собой сумму двух линий влияния: линии влияния балочного изгибающего момента M_K^0 (рис. 8.5.2, в) и линии влияния распора H , все ординаты которой умножены на постоянное число $(-y_K)$ (рис. 8.5.2, г).

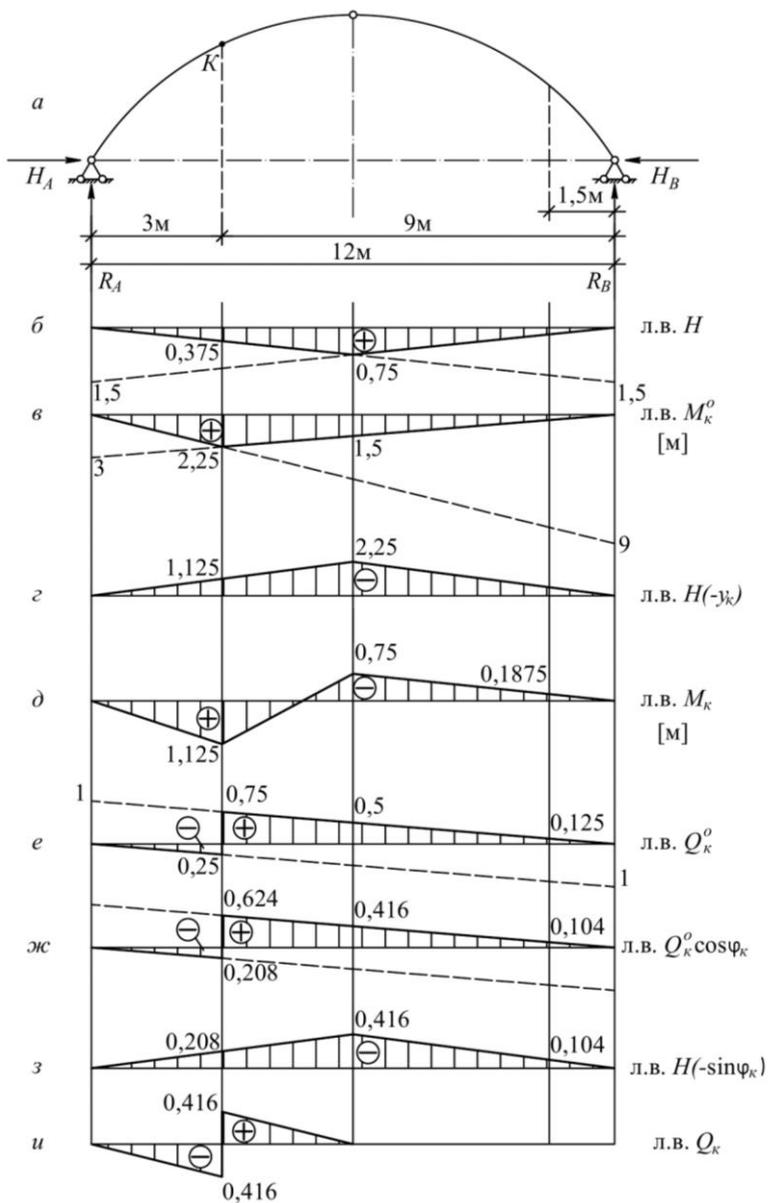


Рис. 8.5.2. К построению линий влияния изгибающего момента и поперечной силы:
 а – расчетная схема; б-д – построение л.в. M_K ; е-и – построение л.в. Q_K

При построении линий влияния Q_K и N_K используются уравнения:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K ;$$

$$N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K .$$

Поэтапное построение линий влияния показано на рис. 8.5.2, *e-u* и рис. 8.5.3, *б-г*.

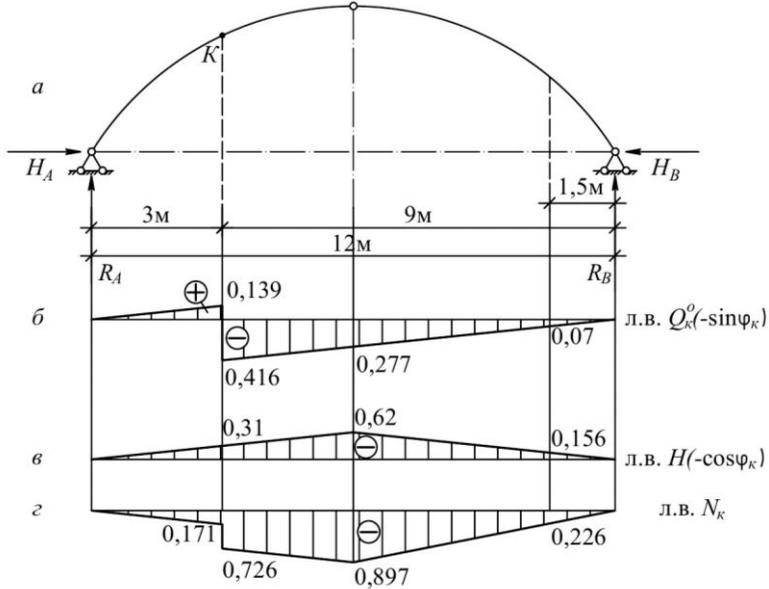


Рис. 8.5.3. К построению линии влияния продольной силы:
a – расчетная схема; *б-г* – построение л.в. N_K

4. Используем линии влияния для определения усилий в точке K от заданной нагрузки.

$$M_K = -F \cdot 0,1875 + q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1,125 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1,125 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 3 \right) = 9,9 \text{ кНм} ;$$

$$Q_K = q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,416 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 0,416 \cdot 3 \right) = 0 ;$$

$$N_K = -F \cdot 0,226 - q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,171 \cdot 3 + 0,726 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,171 \right) = -15,1 \text{ кН} .$$

Как и следовало ожидать, имеет место совпадение с расчетом в п. 2.

8.6. Расчет плоской дважды статически неопределимой рамы методом сил

Пример. Для заданной рамы (рис. 8.6.1, *a*) требуется:

1. Определить степень статической неопределимости и выбрать вариант основной системы.
2. Построить единичные и грузовую эпюры.
3. Вычислить коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений.
4. Произвести их проверку.
5. Решив систему канонических уравнений, определить значения лишних неизвестных.
6. Построить эпюры внутренних усилий M , Q , N .
7. Произвести деформационную проверку и проверку равновесия рамы.

Решение:

1. Заданная рама имеет два диска, один однократный шарнир и шесть опорных связей. Следовательно, система два раза статически неопределима:

$$n = 2 \text{ Ш} + C_{\text{оп}} - 3D = 2 \cdot 1 + 6 - 3 \cdot 2 = 2.$$

Основную систему получаем из заданной путем удаления «лишних» связей и внешней нагрузки. Выбранный вариант представлен на рис. 8.6.1, *б*.

2. Для построения единичных эпюр к основной системе прикладываем поочередно единичные усилия в направлении X_1 и X_2 и строим эпюры моментов (рис. 8.6.1, *в*, *г*).

Для построения грузовой эпюры к основной системе прикладываем внешнюю нагрузку и строим эпюру моментов (рис. 8.6.1, *д*, *е*).

3. Система канонических уравнений для заданной рамы, содержащей две «лишних» связи, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений используем правило Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{4EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 6 \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 4 \cdot 6 \cdot \left(4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(4 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] = \frac{124}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{4EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 \right] + \frac{1}{3EI} [6 \cdot 6 \cdot 6] = \frac{108}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{4EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 6 \right) \right] + \frac{1}{3EI} [6 \cdot 6 \cdot (4 + \frac{1}{2} \cdot 4)] = \frac{108,33}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{4EI} \left[-8 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 41 \cdot 6 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 49 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 6 \right) + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{5 \cdot 6^2}{8} \cdot \left(2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \right) \right] + \frac{1}{3EI} \left[\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{5 \cdot 3^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 14,5 \cdot 3 \cdot \left(4 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \left(4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + 14,5 \cdot 3 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (49 - 14,5) \cdot \left(6 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right] = \frac{445,75}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{4EI} \left[-8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 41 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{5 \cdot 6^2}{8} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right] + \frac{1}{3EI} \cdot \left[6 \cdot 3 \cdot \left(14,5 + \frac{1}{2} \cdot 34,5 \right) + 6 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 14,5 - \frac{1}{2} \cdot 8 \right) \right] = \frac{327}{EI}.$$

4. Для проверки коэффициентов «перемножим» суммарную эпюру \overline{M}_s (рис. 8.6.2) саму на себя:

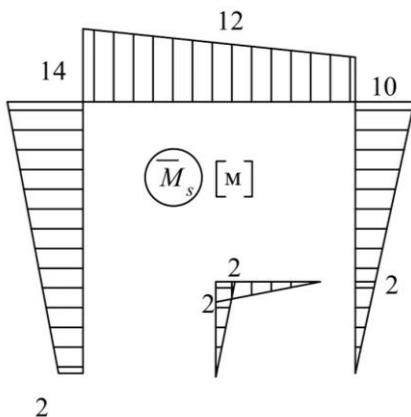


Рис. 8.6.2. Суммарная единичная эпюра моментов

$$\delta_{SS} = \frac{1}{4EI} \left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 8 \right) + 2 \cdot 6 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 12 \right) \right] + \frac{1}{3EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 10 \cdot 6 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(10 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] = \frac{448,66}{EI}.$$

Результат равен сумме коэффициентов:

$$\delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} = \frac{124}{EI} + \frac{108}{EI} + 2 \cdot \frac{108,33}{EI} = \frac{448,66}{EI}.$$

Для проверки свободных членов системы канонических уравнений «перемножим» суммарную эпюру \overline{M}_s (рис. 8.6.2) и грузовую эпюру M_F (рис. 8.6.1, е):

$$\Delta_{SF} = \frac{1}{4EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 41 \cdot 6 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 12 \right) + \frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 6 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 12 \right) + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{5 \cdot 6^2}{8} \cdot 8 \right] + \frac{1}{3EI} \left[\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 5,625 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \left(10 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 14,5 \cdot 3 \cdot \left(10 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + 14,5 \cdot 3 \cdot 13 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (49 - 14,5) \cdot \left(12 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right] = \frac{772,75}{EI}.$$

Результат равен сумме свободных членов:

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{445,75}{EI} + \frac{327}{EI} = \frac{772,75}{EI}.$$

5. Решим систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 124 X_1 + 108,33 X_2 + 445,75 = 0; \\ 108,33 X_1 + 108 X_2 + 327 = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = -0,8736 X_2 - 3,595 ;$$

$$108,33(-0,8736 X_2 - 3,595) + 108 X_2 + 327 = 0 ;$$

$$13,36 X_2 = 62,42 ;$$

$$X_2 = 4,67 \text{ кН} ; \quad X_1 = -7,68 \text{ кН} .$$

6. Ординаты эпюры моментов M вычисляем по формуле:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + M_F, \text{ предварительно построив эпюры } \overline{M}_1 X_1 \text{ и } \overline{M}_2 X_2 \text{ (рис. 8.6.3, а, б). Эпюра } M \text{ представлена на рис. 8.6.3, в.}$$

Эпюру поперечных сил строим, рассматривая равновесие отдельных элементов, нагруженных по концам моментами, взятыми с эпюры M и внешними силами (рис. 8.6.4).

Участок AB:

$$Q_A = - \frac{15,58 + 56,36 + q \cdot 6 \cdot 3}{6} = -27 \text{ кН} ;$$

$$Q_B = - \frac{56,36 + 15,58 - q \cdot 6 \cdot 3}{6} = 3 \text{ кН} .$$

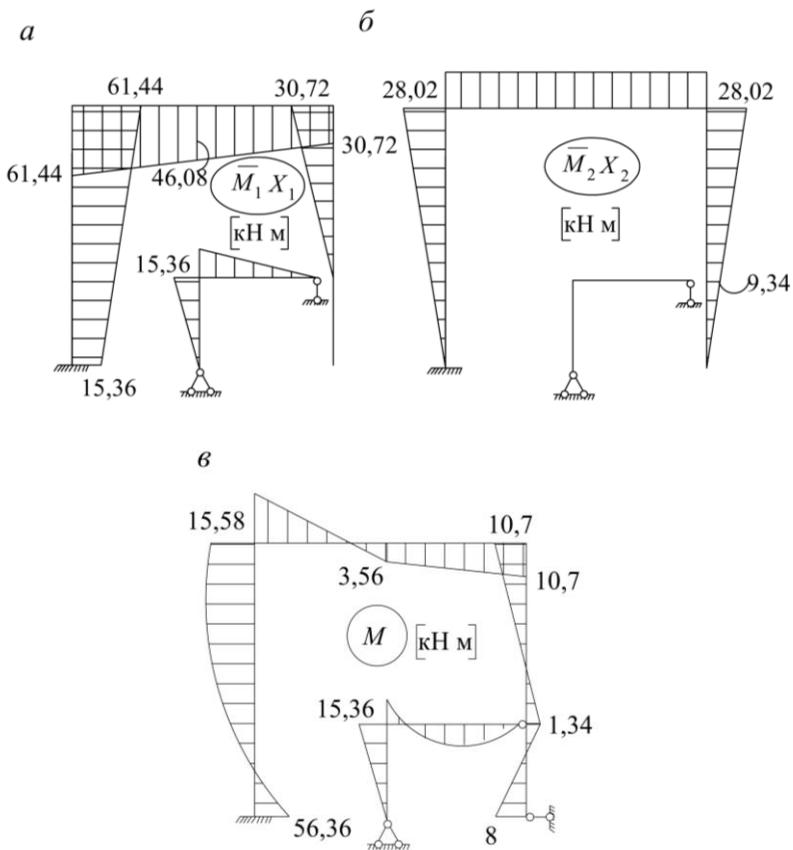


Рис. 8.6.3. Построение эпюры изгибающих моментов:

a, б – эпюры от X_1 и X_2 в основной системе; в – окончательная эпюра

Участок BC:

$$Q_B = \frac{10,7 + 15,58 + F \cdot 3}{6} = 6,38 \text{ кН} ;$$

$$Q_C = \frac{10,7 + 15,58 - F \cdot 3}{6} = 2,38 \text{ кН} .$$

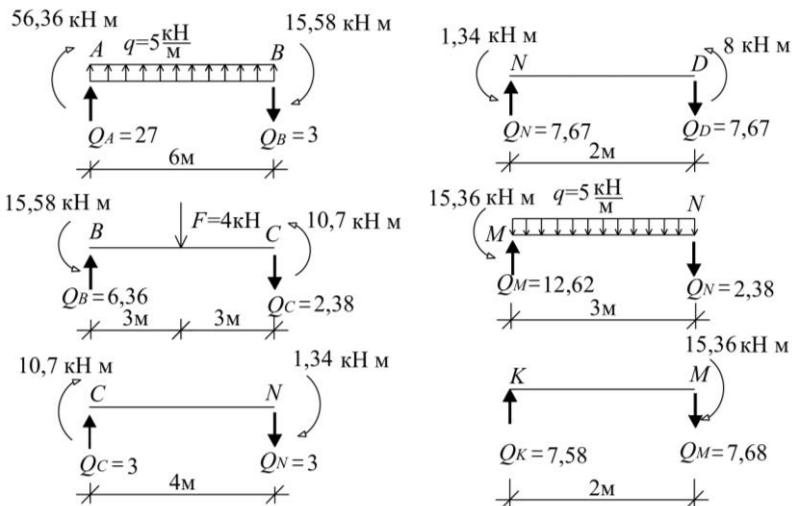


Рис. 8.6.4. Расчетные схемы при построении эпюры поперечных сил

Участок CN:

$$Q_C = Q_N = -\frac{10,7 + 1,34}{4} = -3 \text{ кН} .$$

Участок ND:

$$Q_N = Q_D = \frac{1,34 + 8}{2} = 4,67 \text{ кН} .$$

Участок MN:

$$Q_M = \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5 + 15,36}{3} = 12,62 \text{ кН} ;$$

$$Q_N = \frac{15,36 - q \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = -2,38 \text{ кН} .$$

Участок KM:

$$Q_K = Q_M = -\frac{15,36}{2} = -7,68 \text{ кН} .$$

Окончательная эпюра Q представлена на рис. 8.6.5.

Эпюру продольных сил строим, рассматривая равновесие каждого узла, придерживаясь рационального порядка их рассмотрения (рис. 8.6.6). Окончательная эпюра N представлена на рис. 8.6.7.

Узел B:

$$\sum X = -3 + N_{BC} = 0 ;$$

$$N_{BC} = 3 \text{ кН} .$$

$$\sum Y = -6,38 + N_{BA} = 0 ;$$

$$N_{BA} = 6,38 \text{ кН} .$$

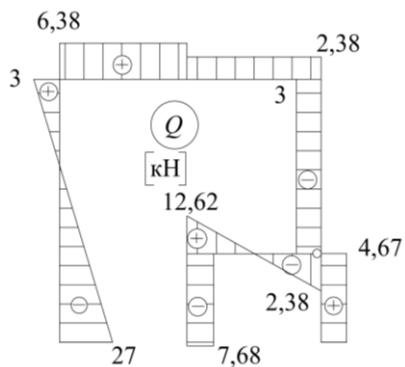


Рис. 8.6.5. Эпюры поперечных сил

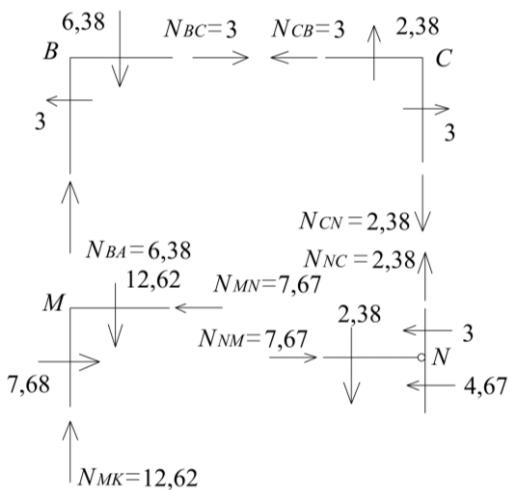


Рис. 8.6.6. Расчетные схемы при построении эпюры продольных сил

Узел С:

$$\sum X = 3 - N_{CB} = 0 ;$$

$$N_{CB} = 3 \text{ кН} .$$

$$\sum Y = 2,38 - N_{CN} = 0 ;$$

$$N_{CN} = 2,38 \text{ кН} .$$

Узел М:

$$\sum X = 7,68 - N_{MN} = 0 ;$$

$$N_{MN} = 7,68 \text{ кН} .$$

$$\sum Y = -12,62 + N_{MK} = 0 ;$$

$$N_{MK} = 12,62 \text{ кН} .$$

Узел N:

$$\sum X = N_{MN} - 3 - 4,67 = 0 ;$$

$$N_{MN} = 7,67 \text{ кН} .$$

$$\sum Y = N_{NC} - 2,38 = 0 ;$$

$$N_{NC} = 2,38 \text{ кН} .$$

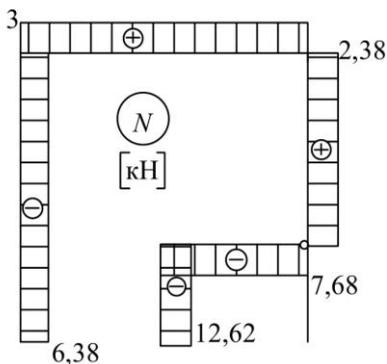


Рис. 8.6.7. Эпюра продольных сил

7. Для контроля правильности решения задачи проведем проверку равновесия рамы и деформационную проверку. Проверим равновесие системы (рис. 8.6.8).

$$\sum X = -q \cdot 6 + 27 + 7,68 - 4,67 = -34,67 + 34,68 = 0,01 \quad (\text{погрешность } 0,02\%);$$

$$\sum Y = 6,38 + 12,62 - F - q \cdot 3 = 0 ;$$

$$\sum M_N = 6,38 \cdot 6 - 27 \cdot 2 + 41 - q \cdot 6 \cdot 1 - M + 4,67 \cdot 2 - F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - 7,68 \cdot 2 + 12,62 \cdot 3 = 141,84 - 141,86 = -0,02 \text{ (погрешность } 0,014\%)$$

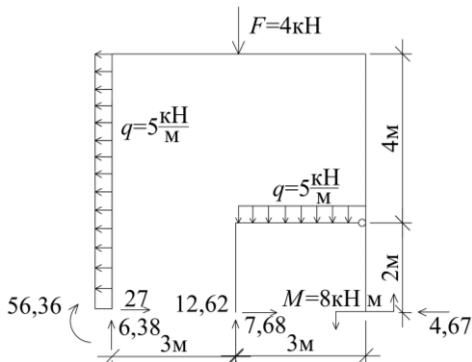


Рис. 8.6.8. К проверке равновесия системы

Деформационная проверка. «Перемножим» окончательную эпюру моментов M_z (рис. 8.6.3) на любую из единичных, например, \bar{M}_2 (рис. 8.6.1, з):

$$\Delta = \frac{1}{4EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,34 - \frac{1}{3} \cdot 8 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1,34 \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 15,58 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 56,36 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{5 \cdot 6^2}{8} \cdot 3 \right] + \frac{1}{3EI} \left[-6 \cdot 3 \cdot \left(3,56 + \frac{1}{2} \cdot 7,14 \right) + 6 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 15,58 - \frac{1}{2} \cdot 3,56 \right) \right] = -153,17 + 152,53 = -0,64$$

(погрешность 0,42%).

8.7. Расчет плоской трижды статически неопределимой рамы методом сил

Пример. Для заданной рамы (рис. 8.7.1) требуется:

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать рациональный вариант основной системы (представить минимум два варианта).
3. Построить единичные и грузовую эпюры.

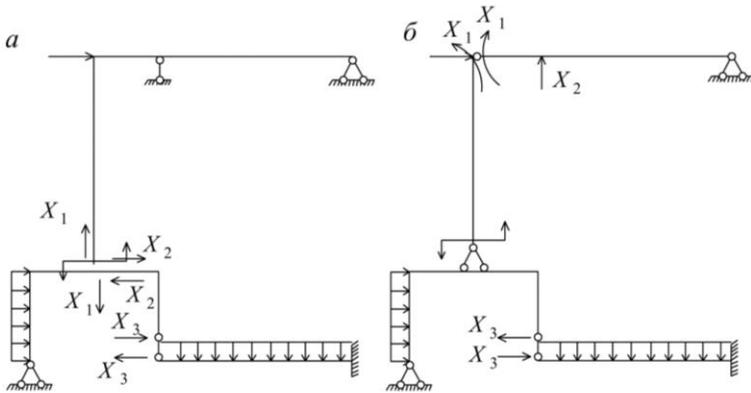


Рис. 8.7.2. К выбору основной системы:
а, б – варианты основной системы

3. Система канонических уравнений для заданной рамы, содержащей три лишние связи, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1F} = 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2F} = 0, \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} = 0. \end{cases}$$

Поскольку наибольшее влияние на перемещения оказывают изгибающие моменты, при определении перемещений влиянием продольных и поперечных сил пренебрегаем.

Единичные эпюры показаны на рис. 8.7.3, а-в. Суммарная эпюра (рис. 8.7.3, г) построена от одновременного приложения неизвестных X_1, X_2, X_3 . Грузовая эпюра (рис. 8.7.4) построена, исходя из равновесия отдельных дисков.

4. При вычислении коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений воспользуемся правилом «перемножения» эпюр (правилом Верещагина):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right] = \frac{21,08}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[2 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,75 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,75 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{207,94}{EI};$$

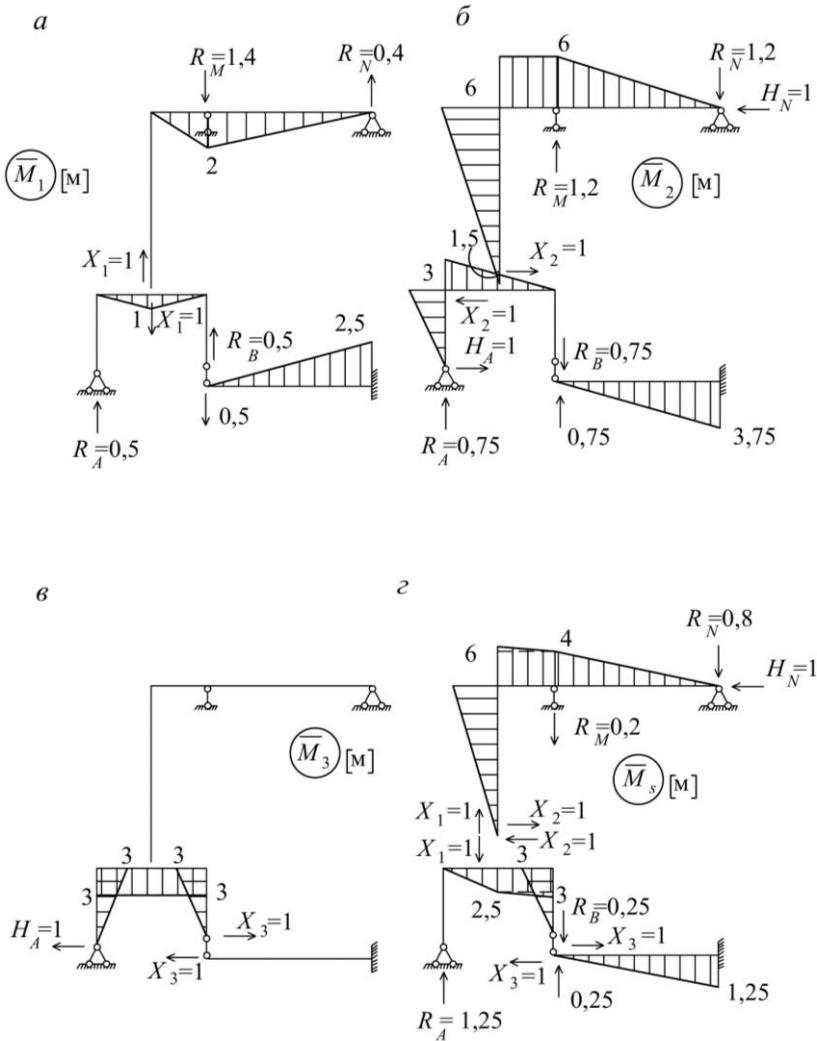


Рис. 8.7.3. Единичные эпюры для основной системы:
a-*в* – единичные эпюры от X_1, X_2, X_3 ; *г* – суммарная единичная эпюра

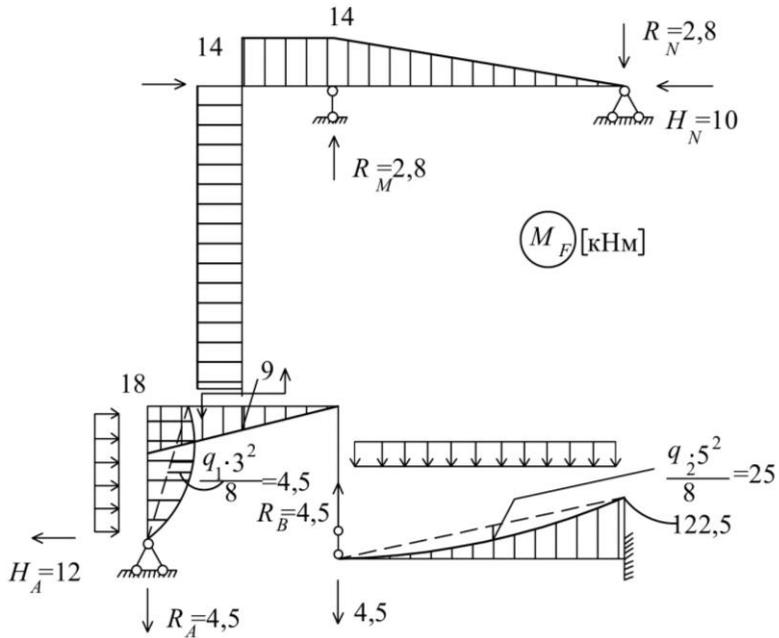


Рис. 8.7.4. Грузовая эпюра

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} [4 \cdot 3 \cdot 3] + \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 \right] = \frac{45}{EI};$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(1,5 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,75 \right] = -\frac{50,63}{EI};$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{6}{EI};$$

$$\delta_{23} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \right] - \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = -\frac{22,5}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 14 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(9 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 122,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 - \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,5 \right] = \frac{349,58}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \left[2 \cdot 6 \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 14 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 122,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,75 + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,75 \right] + \frac{1}{2EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 14 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] = -\frac{281,13}{EI};$$

$$\Delta_{3F} = \frac{1}{EI} \left[4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \right] + \frac{1}{2EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] = \frac{141,75}{EI}.$$

Для проверки коэффициентов «перемножим» суммарную эпюру \overline{M}_s (рис. 8.7.3, з) саму на себя:

$$\begin{aligned} \delta_{ss} &= \frac{1}{EI} \left[2 \cdot 4 \cdot \left(4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(4 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 + \right. \\ &+ 2 \cdot 2,5 \cdot \left(2,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot \left(2,5 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + \left. \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,25 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,25 \right] + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{139,77}{EI}. \end{aligned}$$

Результат равен сумме коэффициентов:

$$\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23}) = \frac{1}{EI} [21,08 + 207,94 + 45 + 2 \cdot (-50,63 + 6 - 22,5)] = \frac{139,76}{EI}.$$

Для проверки свободных членов системы канонических уравнений «перемножим» суммарную единичную (рис. 8.7.3, г) и грузовую эпюры (рис. 8.7.4):

$$\begin{aligned} \Delta_{sF} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{6+4}{2} \cdot 2 \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,5 \cdot \left(9 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 \cdot \left(2,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 122,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,25 + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,25 \right] + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 14 = \frac{210,21}{EI}. \end{aligned}$$

Результат равен сумме свободных членов:

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \Delta_{3F} = \frac{1}{EI} [349,58 - 281,13 + 141,75] = \frac{210,2}{EI}.$$

5. Система канонических уравнений после сокращения на общий множитель имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 21,08 & -50,63 & 6 \\ -50,63 & 207,94 & -22,5 \\ 6 & -22,5 & 45 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 349,58 \\ -281,13 \\ 141,75 \end{vmatrix} = 0.$$

Реакции отброшенных связей равны:

$$X_1 = -31,97 \text{ кН}; \quad X_2 = -6,67 \text{ кН}; \quad X_3 = -2,22 \text{ кН} .$$

б. Ординаты эпюры моментов вычислим по формуле:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3 + M_F ,$$

предварительно построив эпюры $\overline{M}_1 X_1$, $\overline{M}_2 X_2$, $\overline{M}_3 X_3$ (рис. 8.7.5,а-в).

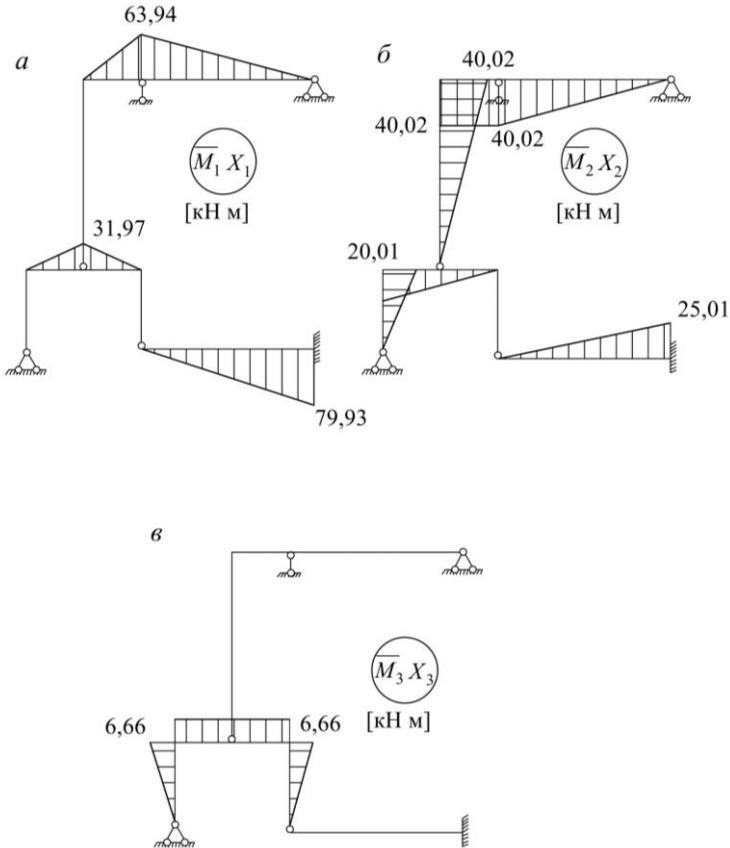


Рис. 8.7.5. К построению эпюры изгибающих моментов:

а-в – эпюры от сил X_1, X_2, X_3

Эпюра M представлена на рис. 8.7.6.

Значения поперечных сил определим, рассматривая равновесие отдельных элементов, нагруженных по концам моментами, взятыми с эпюры M (рис. 8.7.6) и внешними силами.

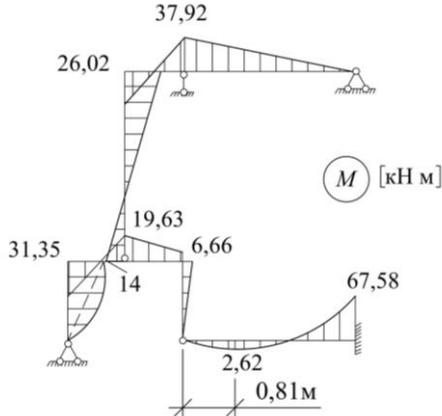


Рис. 8.7.6. Эпюра изгибающих моментов

Стержень КМ (рис. 8.7.7, а):

$$Q_K = Q_M = -\frac{26,02 + 37,92}{2} = -31,97 \text{ кН} .$$

Стержень MN (рис. 8.7.7, б):

$$Q_M = Q_N = \frac{37,92}{5} = 7,58 \text{ кН} .$$

Стержень KE (рис. 8.7.7, в):

$$Q_E = Q_K = \frac{14 + 26,02}{6} = 6,67 \text{ кН} .$$

Стержень DE (рис. 8.7.7, г):

$$Q_D = Q_E = -\frac{31,35 + 19,63}{2} = -25,49 \text{ кН} .$$

Стержень EF (рис. 8.7.7, д):

$$Q_E = Q_F = \frac{19,63 - 6,66}{2} = 6,49 \text{ кН} .$$

Стержень AD (рис. 8.7.7, е):

$$Q_A = \frac{31,35 + q_1 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 16,45 \text{ кН} ;$$

$$Q_D = \frac{31,35 - q_1 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 4,45 \text{ кН} .$$

Проверка: $\sum X = Q_A - q_1 \cdot 3 - Q_D = 16,45 - 4 \cdot 3 - 4,45 = 0 .$

Стержень *BF* (рис. 8.7.7, *ж*):

$$Q_B = Q_F = \frac{6,67}{3} = 2,22 \text{ кН} .$$

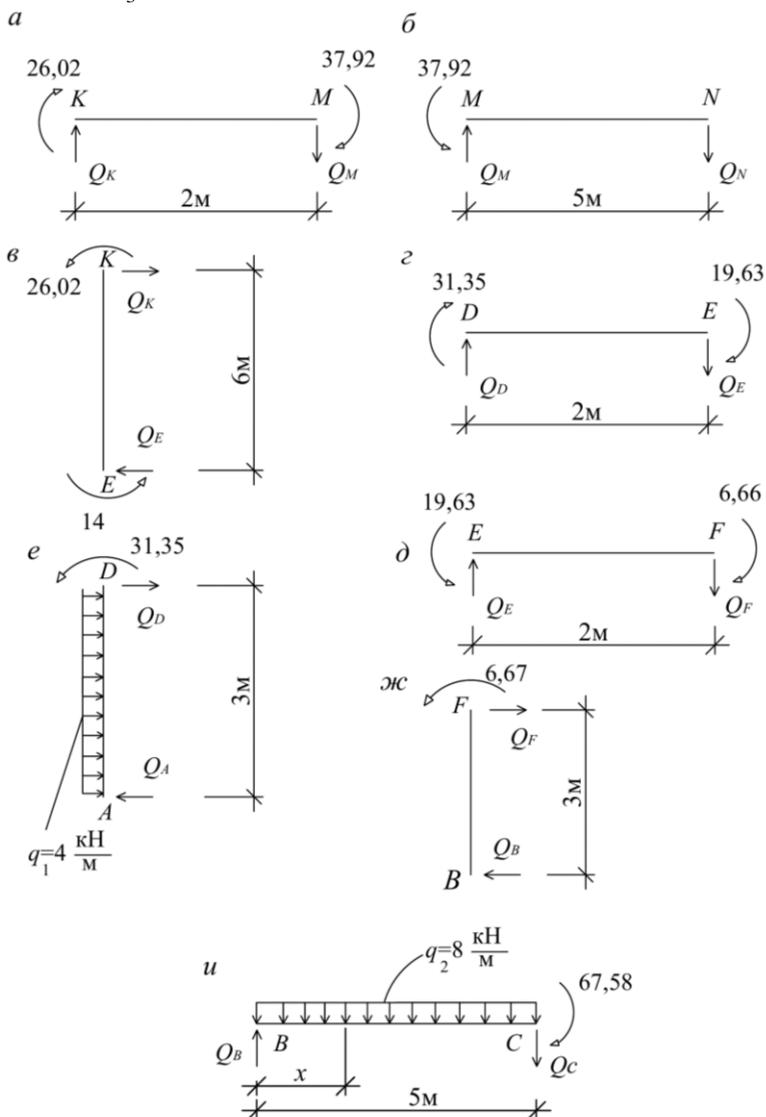


Рис. 8.7.7. К построению эпюры поперечных сил:
a-i – расчетные схемы элементов системы

Стержень ВС (рис. 8.7.7, *и*):

$$Q_B = \frac{-67,58 + q_2 \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = 6,48 \text{ кН} ;$$

$$Q_C = \frac{-67,58 - q_2 \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = -33,52 \text{ кН} .$$

Проверка: $\sum Y = Q_B - q_2 \cdot 5 - Q_C = 6,48 - 8 \cdot 5 + 33,52 = 0 .$

Определим экстремальное значение момента:

$$Q_x = Q_B - q_2 x = 0 , \quad x = \frac{Q_B}{q_2} = \frac{6,48}{8} = 0,81 \text{ м} .$$

$$M \Big|_{x=0,81 \text{ м}} = Q_B \cdot 0,81 - q_2 \cdot \frac{0,81^2}{2} = 2,62 \text{ кН м} .$$

Эпюра Q дана на рис. 8.7.8, *а*.

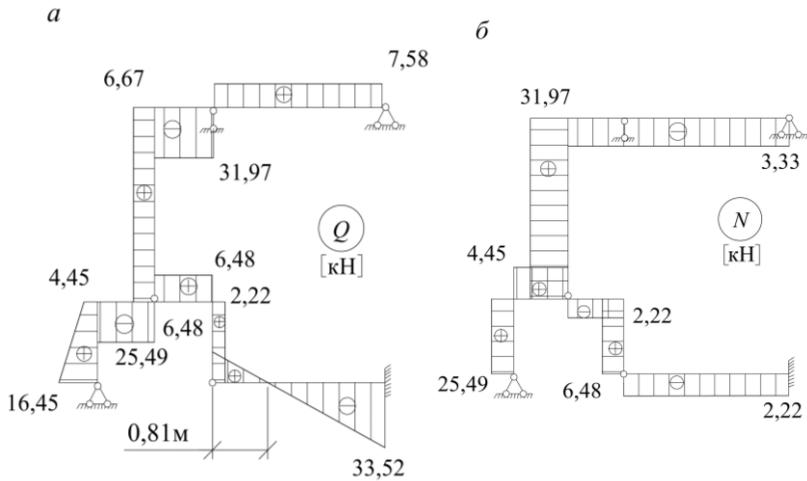


Рис. 8.7.8. Эпюры сил:
а – поперечных; *б* – продольных

Продольные силы определим из условий равновесия узлов, придерживаясь рационального порядка их рассмотрения.

Узел К (рис. 8.7.9, *а*):

$$N_{KE} = 31,97 \text{ кН} ; \quad N_{KN} = -10 + 6,67 = -3,33 \text{ кН} .$$

Узел D (рис. 8.7.9, *б*):

$$N_{AD} = 25,49 \text{ кН} ; \quad N_{DE} = 4,45 \text{ кН} .$$

Узел E (рис. 8.7.9, в):

$$N_{EF} = -6,67 + 4,45 = -2,22 \text{ кН} ,$$

$$\sum Y = -25,49 + 31,97 - 6,48 = 0 .$$

Узел B (рис. 8.7.9, з):

$$N_{BF} = 6,48 \text{ кН} ; \quad N_{BC} = 2,22 \text{ кН} .$$

Эпюра N дана на рис. 8.7.8, б.

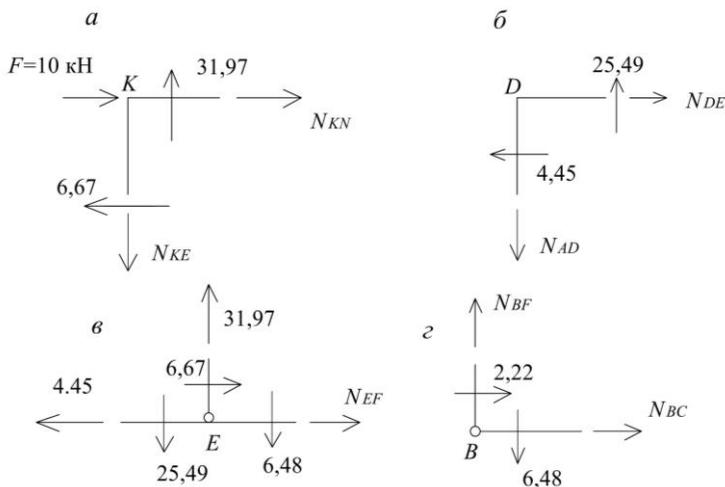


Рис. 8.7.9. К построению эпюры продольных сил:

a-z – расчетные схемы узлов системы

7. Проведем деформационную проверку и проверку равновесия системы, принимая допускаемую погрешность в пределах 2%.

Вычислим перемещение по направлению связи 2. «Перемножим» эпюры M (рис. 8.7.6) и \bar{M}_2 (рис. 8.7.3, б).

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{EI} \left[2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 37,92 - \frac{1}{2} \cdot 26,02 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 37,92 + 2 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 19,63 - \frac{1}{2} \cdot 31,35 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 19,63 - \frac{2}{3} \cdot 31,35 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot \left(6,66 + \frac{2}{3} \cdot 12,97 \right) - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 67,58 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,75 + \\ & + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{8 \cdot 5^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,375 \left. \right] + \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \left(\frac{1}{3} \cdot 14 - \frac{2}{3} \cdot 26,02 \right) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 31,35 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{4 \cdot 3^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] = \frac{1}{EI} (629,81 - 629,38) = \frac{0,43}{EI} \text{ (погрешность составляет } 0,07\% \text{)}. \end{aligned}$$

При проверке равновесия системы освободим ее от опорных связей (рис. 8.7.10):

$$\sum X = 10 - 3,33 + 4 \cdot 3 - 16,45 - 2,22 = 22 - 22 = 0 ;$$

$$\sum Y = -25,49 + 39,55 - 8 \cdot 5 - 7,58 + 33,52 = -73,07 + 73,07 = 0 ;$$

$$\sum M_E^{\text{верхн}} = -14 + 10 \cdot 6 - 39,55 \cdot 2 + 7,58 \cdot 7 - 3,33 \cdot 6 = -113,08 + 113,06 = 0 .$$

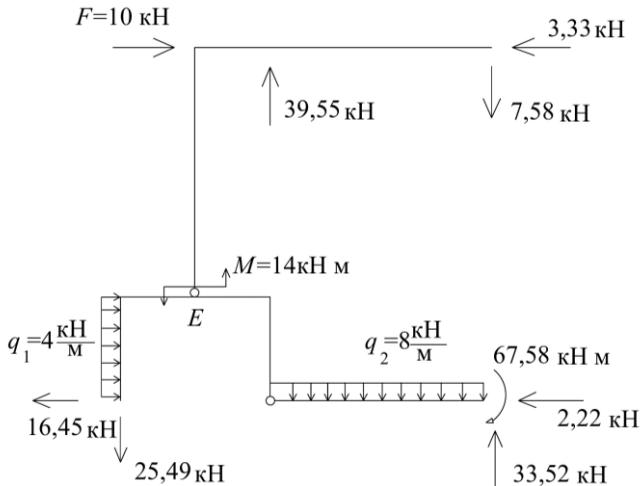


Рис. 8.7.10. К проверке равновесия системы

8.8. Расчет балки на осадку опор методом перемещений

Пример. Для заданной балки (рис. 8.8.1, а) требуется:

1. Определить степень кинематической неопределимости и образовать основную систему.
2. Построить единичные эпюры и эпюру от перемещения опорных связей.
3. Вычислить коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений.
4. Решить систему канонических уравнений, определив значения неизвестных.
5. Построить эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q .
6. Произвести деформационную проверку и проверку равновесия балки.

Решение:

1. Основная система (рис. 8.8.1, б) включает три связи, препятствующие поворотам. Следовательно, неизвестными являются три угла поворота (Z_1, Z_2, Z_3).

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + R_{1\Delta} = 0, \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2\Delta} = 0, \\ r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3\Delta} = 0. \end{cases}$$

2. Эпюры изгибающий моментов от единичных поворотов и от смещения опорных связей изображены на рис. 8.8.1, в-е. При их построении использовалась таблица стандартных решений (приложение 1). При построение эпюры M_Δ следует учитывать величину смещения опоры Δ , умножив ее на ординаты эпюр, соответствующих данному смещению.

3. Коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений определяются из условия равновесия узлов (рис. 8.8.2):

$$\begin{aligned} r_{11} &= 0,775 EI ; & r_{12} &= 0,2 EI ; & r_{13} &= 0 ; & R_{1\Delta} &= -1,88 \cdot 10^{-3} EI ; \\ r_{21} &= 0,2 EI ; & r_{22} &= 0,8 EI ; & r_{23} &= 0,2 EI ; & R_{2\Delta} &= -3 \cdot 10^{-3} EI ; \\ r_{31} &= 0 ; & r_{32} &= 0,2 EI ; & r_{33} &= 0,65 EI ; & R_{3\Delta} &= -1,96 \cdot 10^{-3} EI . \end{aligned}$$

4. Система канонических уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 0,775 EIZ_1 + 0,2 EIZ_2 - 1,88 \cdot 10^{-3} EI = 0, \\ 0,2 EIZ_1 + 0,8 EIZ_2 + 0,2 EIZ_3 - 3 \cdot 10^{-3} EI = 0, \\ 0,2 EIZ_2 + 0,65 EIZ_3 - 1,96 \cdot 10^{-3} EI = 0. \end{cases}$$

Ее решение: $Z_1 = 1,70 \cdot 10^{-3}$, $Z_2 = 2,78 \cdot 10^{-3}$, $Z_3 = 2,16 \cdot 10^{-3}$.

5. Ординаты эпюры моментов вычисляем по формуле:

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \overline{M}_3 Z_3 + M_\Delta .$$

Эпюры $\overline{M}_1 Z_1$, $\overline{M}_2 Z_2$, $\overline{M}_3 Z_3$ даны на рис. 8.8.1, ж-и, эпюра M – на рис. 8.8.3, б.

Значения поперечных сил определим, рассматривая равновесие отдельных элементов, нагруженных по концам моментами, взятыми с эпюры M .

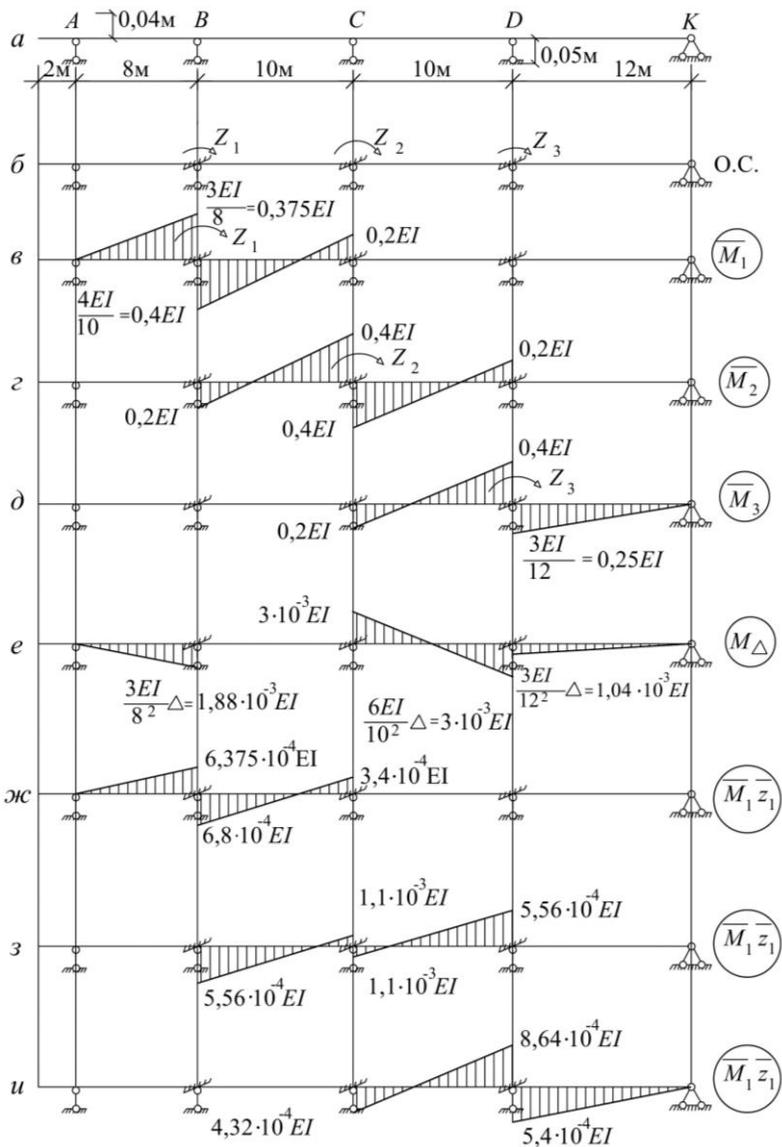


Рис. 8.8.1. Построение эпюр изгибающих моментов для балки:
 а – расчетная схема; б – основная система; в-д – единичные эпюры; е – эпюры от смещения опорных связей; ж-и – эпюры от перемещений Z_1, Z_2, Z_3 в основной системе

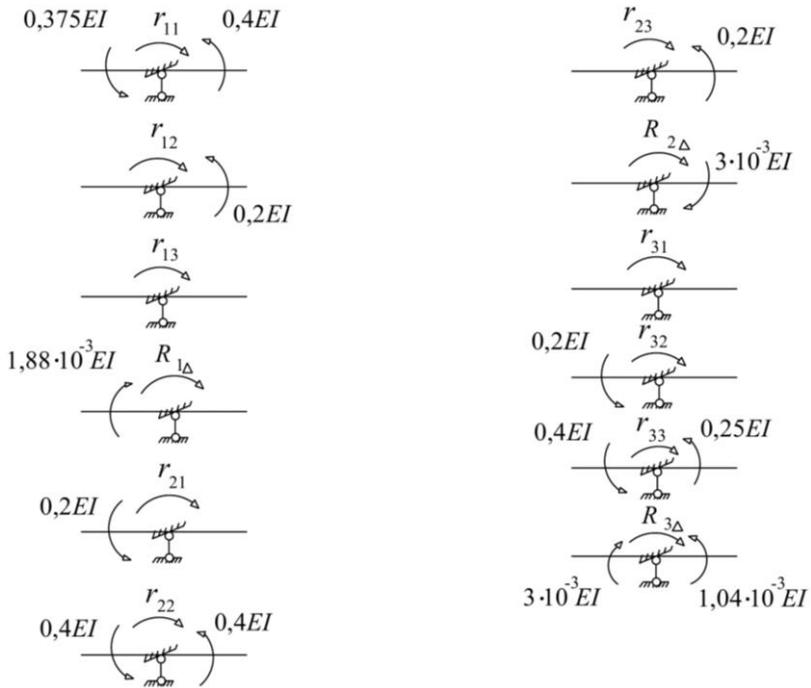


Рис. 8.8.2. К определению коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Стержень AB (рис. 8.8.4, a):

$$Q_A = Q_B = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} EI}{8} = 1,5 \cdot 10^{-4} EI .$$

Стержень BC (рис. 8.8.4, b):

$$Q_B = Q_C = - \frac{1,2 \cdot 10^{-3} EI + 1,4 \cdot 10^{-3} EI}{10} = -2,6 \cdot 10^{-4} EI .$$

Стержень CD (рис. 8.8.4, $в$):

$$Q_C = Q_D = \frac{1,4 \cdot 10^{-3} EI + 1,58 \cdot 10^{-3} EI}{10} = 2,98 \cdot 10^{-4} EI .$$

Стержень DK (рис. 8.8.4, $з$):

$$Q_D = Q_K = - \frac{1,58 \cdot 10^{-3} EI}{12} = -1,32 \cdot 10^{-4} EI .$$

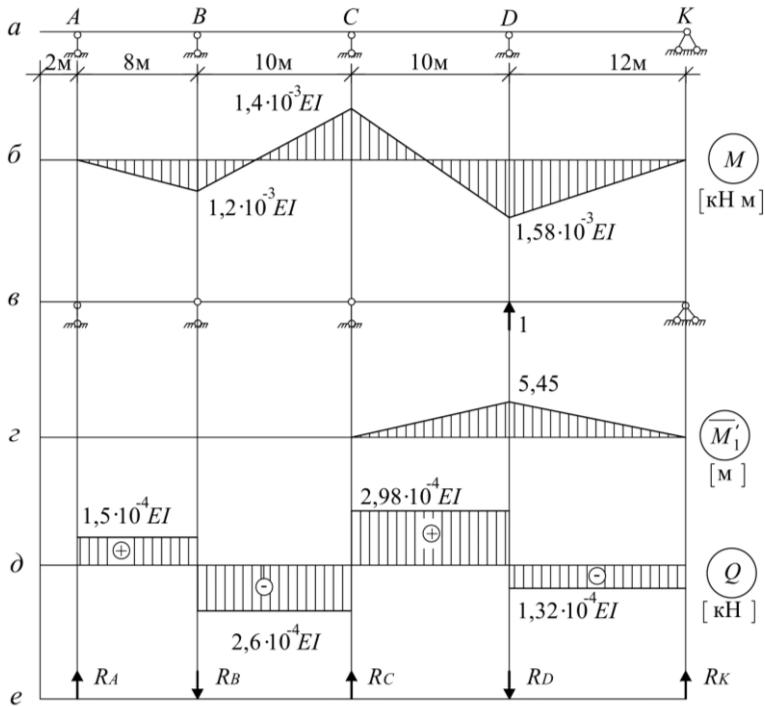


Рис. 8.8.3. К построению эпюр внутренних усилий и их проверке:
a – расчетная схема; *б* – эпюра изгибающих моментов; *в* – основная система
 для построения единичной эпюры \overline{M}'_1 ; *г* – единичная эпюра \overline{M}'_1 ;
д – эпюра поперечных сил; *е* – схема опорных реакций

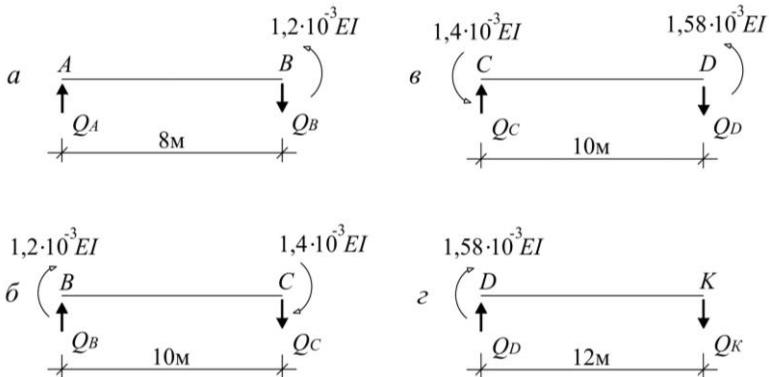


Рис. 8.8.4. К построению эпюры поперечных сил:
a-г – расчетные схемы стержней системы

Эпюра Q представлена на рис. 8.8.3, δ .

7. Для контроля правильности решения задачи проведем деформационную проверку и проверку равновесия системы. Заданная балка является трижды статически неопределимой. Выберем вариант основной системы метода сил (рис. 8.8.3, ϵ) и вычислим перемещение по направлению одной из лишних связей, например, в точке D . Для этого перемножим эпюры M (рис. 8.8.3, δ) и \overline{M}'_i (рис. 8.8.3, ζ). Результат перемножения должен быть равен величине заданного в этой опоре перемещения, то есть 0,05 м.

$$\Delta = \frac{EI}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 1,58 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,45 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5,45 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1,4 \cdot 10^{-3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{3} \cdot 1,58 \cdot 10^{-3} \right) \right] = -0,05 \text{ м.}$$

Погрешность составляет 0% (допускается 2%). Минус показывает, что перемещение точки D направлено противоположно единичной силе (рис. 8.8.3, ϵ), то есть вниз. Проверяем условие равновесия системы. Для этого сначала определим значения опорных реакций балки по формуле: $R = -Q^n + Q^{mp}$ (рис. 8.8.3, δ , e):

$$R_A = Q_A^{mp} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ кН ;}$$

$$R_B = -Q_B^n + Q_B^{mp} = -1,5 \cdot 10^{-4} EI + (-2,6 \cdot 10^{-4} EI) = -4,1 \cdot 10^{-4} EI \text{ кН ;}$$

$$R_C = -Q_C^n + Q_C^{mp} = -(-2,6 \cdot 10^{-4} EI) + 2,98 \cdot 10^{-4} EI = 5,58 \cdot 10^{-4} EI \text{ кН ;}$$

$$R_D = -Q_D^n + Q_D^{mp} = -2,98 \cdot 10^{-4} EI + (-1,32 \cdot 10^{-4} EI) = -4,3 \cdot 10^{-4} EI \text{ кН ;}$$

$$R_K = -Q_K^n = -(-1,32 \cdot 10^{-4} EI) = 1,32 \cdot 10^{-4} EI \text{ кН .}$$

Проверим равновесие всей балки.

$$\sum Y = R_A - R_B + R_C - R_D + R_K = [1,5 \cdot 10^{-4} - 4,1 \cdot 10^{-4} + 5,58 \cdot 10^{-4} - 4,3 \cdot 10^{-4} + \\ + 1,32 \cdot 10^{-4}] EI = -8,4 \cdot 10^{-4} EI + 8,4 \cdot 10^{-4} EI = 0.$$

8.9. Расчет плоской рамы методом перемещений

Пример. Для заданной рамы (рис. 8.9.1, a) требуется:

1. Определить степень кинематической неопределимости и представить основную систему.
2. Построить единичные и грузовую эпюры.
3. Вычислить коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений. Произвести их проверку.

4. Решив систему канонических уравнений, определить значения неизвестных.

5. Построить эпюры внутренних усилий.

6. Произвести деформационную проверку и проверку равновесия рамы.

Решение:

1. Основная система (рис. 8.9.1, б) включает две связи (1 и 2), препятствующие поворотам, и одну связь, препятствующую линейному перемещению (3). Таким образом, неизвестными являются два угла поворота (Z_1, Z_2) и одно линейное смещение (Z_3).

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + R_{1F} = 0, \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

2. Эпюры изгибающих моментов от единичных поворотов связей 1 и 2 и единичного горизонтального смещения связи 3, а также от внешней нагрузки изображены на рис. 8.9.2 и рис. 8.9.3. При их построении использовалась таблица приложения 1.

3. Коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений определяются из условий равновесия узлов со связями 1 и 2, а также отсеченной части рамы (рис. 8.9.4).

$$\begin{aligned} r_{11} &= 5,67 EI ; & r_{21} &= 0,5 EI ; & r_{31} &= -2 EI ; \\ r_{12} &= 0,5 EI ; & r_{22} &= 6,4 EI ; & r_{32} &= 0,28 EI ; \\ r_{13} &= -2 EI ; & r_{23} &= 0,28 EI ; & r_{33} &= 1,95 EI ; \\ R_{1F} &= 30 - 18 = 12 \text{ кНм} ; & R_{2F} &= 6,78 \text{ кНм} ; & R_{3F} &= 27,43 \text{ кН} . \end{aligned}$$

Для проверки коэффициентов «перемножим» суммарную эпюру $\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3$ (рис. 8.9.5) саму на себя:

$$\begin{aligned} r_{SS} &= \frac{E^2 I^2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,34 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,34 - \frac{1}{3} \cdot 0,67 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,67 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,67 - \frac{1}{3} \cdot 0,34 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{2}{3} \cdot 1,5 - \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) \cdot 2 \right] + \frac{E^2 I^2}{3EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,68 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,68 - \frac{1}{3} \cdot 0,48 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0,48 \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{2}{3} \cdot 0,48 - \frac{1}{3} \cdot 1,68 \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = 11,58 EI. \end{aligned}$$

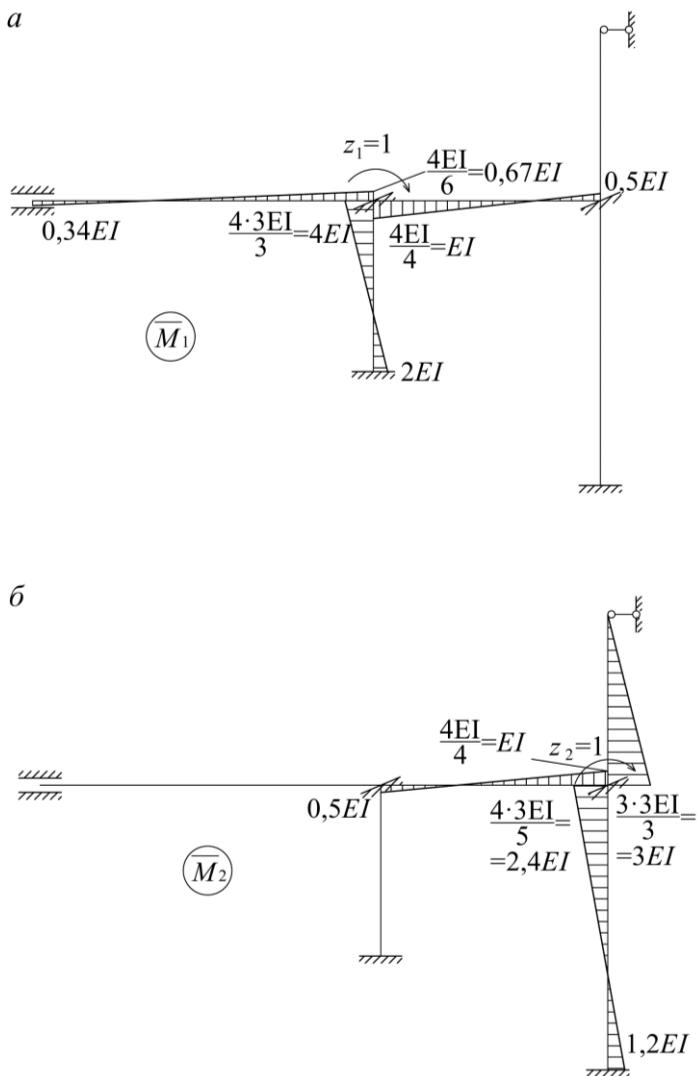
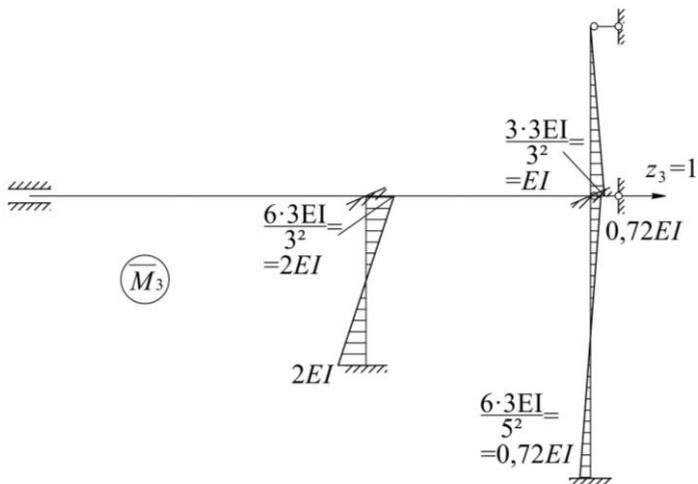


Рис. 8.9.2. Единичные эпюры изгибающих моментов:
a – от поворота $Z_1 = 1$; *b* – от поворота $Z_2 = 1$

a



б

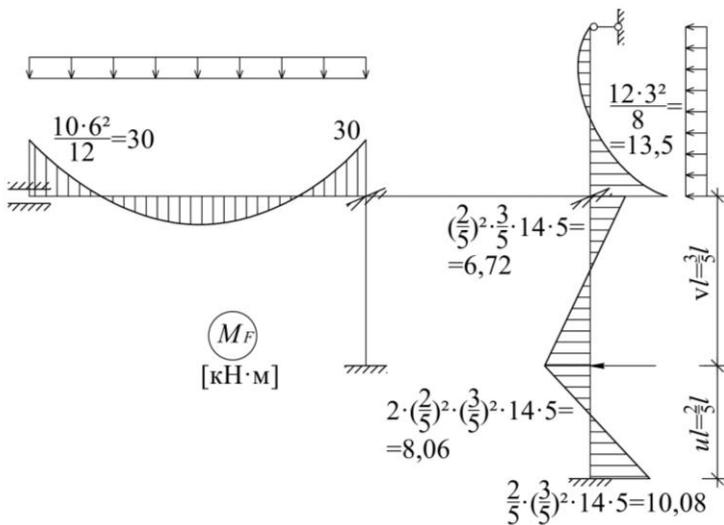


Рис. 8.9.3. Единичная и грузовая эпюры изгибающих моментов:
 а – от горизонтального смещения $Z_3=1$; б – от внешней нагрузки

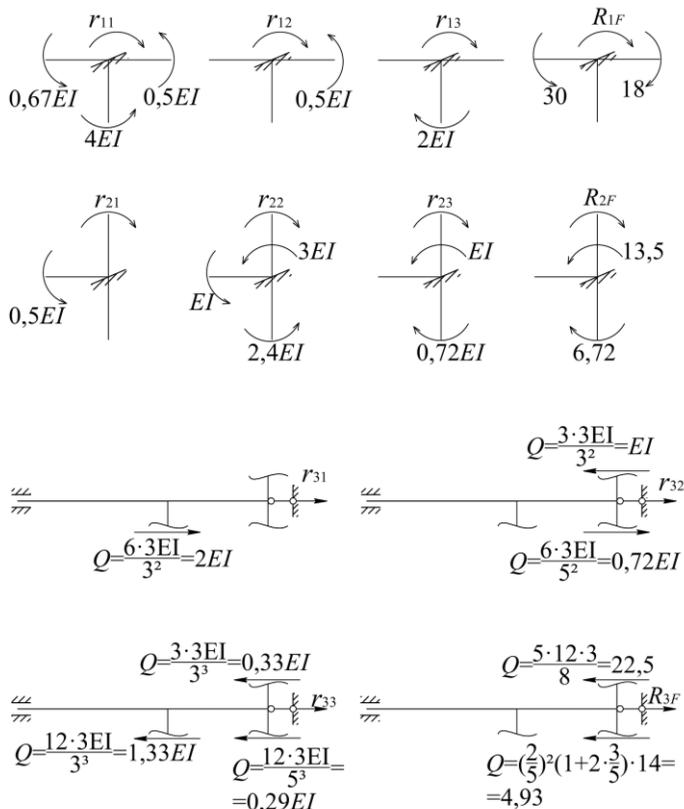


Рис. 8.9.4. К определению коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Результат равен сумме коэффициентов:

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} + 2 \cdot (r_{12} + r_{13} + r_{23}) = EI [5,67 + 6,4 + 1,95 + 2 \cdot (0,5 - 2 + 0,28)] = 11,58 EI.$$

Для проверки свободных членов системы канонических уравнений построим эпюры M'_{1F} и M'_{2F} (рис. 8.9.6, а, б) от внешней нагрузки в статически определимых системах, полученных из заданной путем удаления лишних связей, в том числе обязательно тех, реакции которых определяются. Причем, при построении эпюры M'_{1F} не учитывался момент $M=18$ кНм, приложенный в узле 1. Поэтому при вычислении R_{1F} должны получить значение узлового момента, то есть 30 кНм.

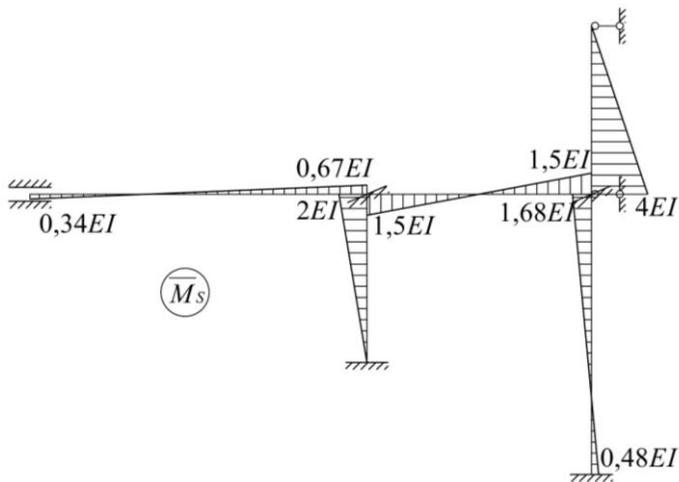


Рис. 8.9.5. Суммарная единичная эпюра

$$R_{1F} = - \int \frac{\overline{M}_1 M'_{1F}}{EI} dx ;$$

$$R_{1F} = - \frac{I}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,67 - \frac{2}{3} \cdot 0,34 \right) EI + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 45 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,34 - \frac{1}{2} \cdot 0,67 \right) EI \right] =$$

$$= 29,7 \text{ кНм} .$$

Погрешность составляет 1%.

При проверке R_{2F} и R_{3F} используем элементы эпюр, показанные на рис.8.9.7 и рис.8.9.8.

$$R_{2F} = - \int \frac{\overline{M}_2 M'_{1F}}{EI} dx ;$$

$$R_{2F} = - \frac{I}{3EI} \left[- \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 13,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 16,8 \cdot \left(0,24 + \frac{1}{3} \cdot 2,16 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 16,8 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,24 - \frac{1}{3} \cdot 1,2 \right) \right] EI = -6,78 \text{ кНм} .$$

$$R_{3F} = - \int \frac{\overline{M}_3 M'_{2F}}{EI} dx ;$$

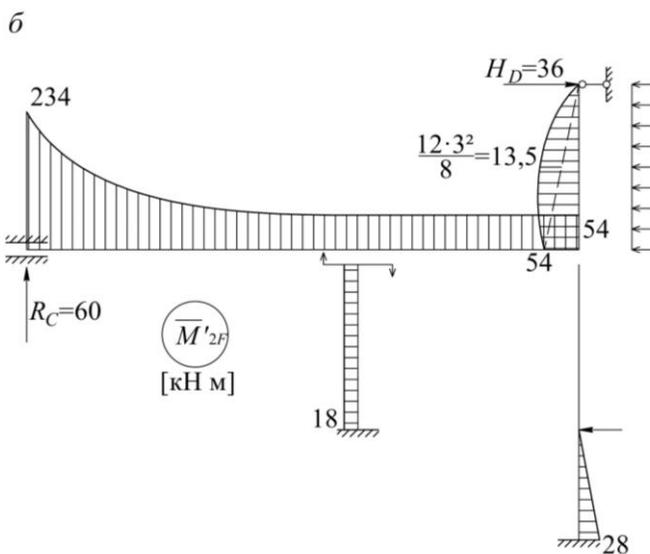
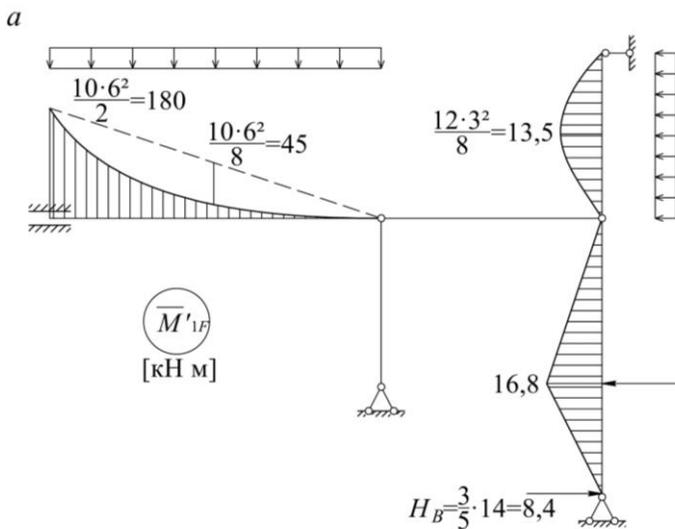


Рис. 8.9.6. Эпюры моментов для проверки свободных членов:
a, б – варианты статически определимых систем

$$R_{3F} = -\frac{I}{3EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 54 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 13,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 28 \cdot \left(0,14 + \frac{2}{3} \cdot 0,58 \right) \right] EI =$$

$$= 27,42 \text{ кН}.$$

Эти значения совпадают с величинами свободных членов, вычисленных статическим способом.

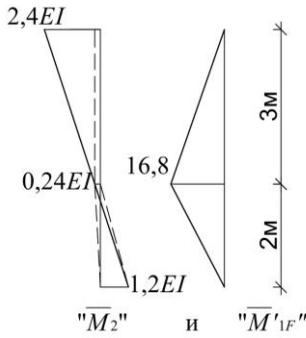


Рис. 8.9.7. К проверке R_{2F}
(участок BK)

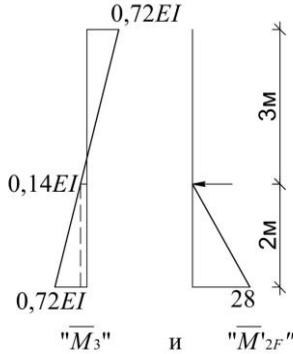


Рис. 8.9.8. К проверке R_{3F}
(участок BK)

4. Система канонических уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 5,67 EIZ_1 + 0,5 EIZ_2 - 2 EIZ_3 + 12 = 0, \\ 0,5 EIZ_1 + 6,4 EIZ_2 + 0,28 EIZ_3 + 6,78 = 0, \\ -2 EIZ_1 + 0,28 EIZ_2 + 1,95 EIZ_3 + 27,43 = 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим значения перемещений:

$$Z_1 = -\frac{11,27}{EI}; \quad Z_2 = \frac{0,95}{EI}; \quad Z_3 = -\frac{25,7}{EI}.$$

5. Ординаты эпюры моментов вычисляем по формуле:

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \overline{M}_3 Z_3 + M_F.$$

Эпюра M дана на рис. 8.9.9.

Значения поперечных и продольных сил, кроме стержней, на которые действует распределенная нагрузка, определим так же, как в п. б решения примера расчета рамы методом сил.

Для этих стержней (*CE* и *KD*) приведем определение Q и значения экстремальных моментов.

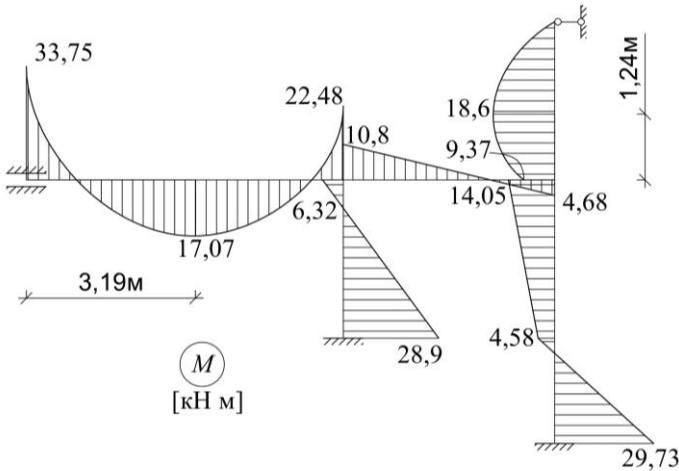


Рис. 8.9.9. Эпюра изгибающих моментов

Стержень *CE* (рис. 8.9.10, *a*):

$$Q_C = \frac{33,75 - 22,48 + 10 \cdot 6 \cdot 3}{6} = 31,88 \text{ кН} ,$$

$$Q_E = \frac{33,75 - 22,48 - 10 \cdot 6 \cdot 3}{6} = -28,12 \text{ кН} .$$

$$\text{Проверка: } \sum X = Q_C - q_1 \cdot 6 - Q_E = 31,88 - 10 \cdot 6 + 28,12 = 0 .$$

$$Q_X = Q_C - q_1 x = 0 ; \quad x = \frac{Q_C}{q_1} = \frac{31,88}{10} = 3,19 \text{ м} ,$$

$$M \Big|_{x=3,19} = Q_C \cdot 3,19 - 33,75 - q_1 \cdot \frac{3,19^2}{2} = 17,07 \text{ кНм} .$$

Стержень *KD* (рис. 8.9.10, *б*):

$$Q_K = \frac{9,37 - 12 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = -14,88 \text{ кН} ,$$

$$Q_D = \frac{9,37 + 12 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 21,12 \text{ кН} ,$$

$$\text{Проверка: } \sum X = -Q_K - q_2 \cdot 3 + Q_D = 14,88 - 12 \cdot 3 + 21,12 = 0 .$$

$$Q_X = -Q_K + q_2 x = 0 , \quad x = \frac{Q_K}{q_2} = \frac{14,88}{12} = 1,24 \text{ м} .$$

$$M \Big|_{x=1,24} = Q_K \cdot 1,24 - 9,37 + q_2 \cdot \frac{1,24^2}{2} = -18,6 \text{ кНм} .$$

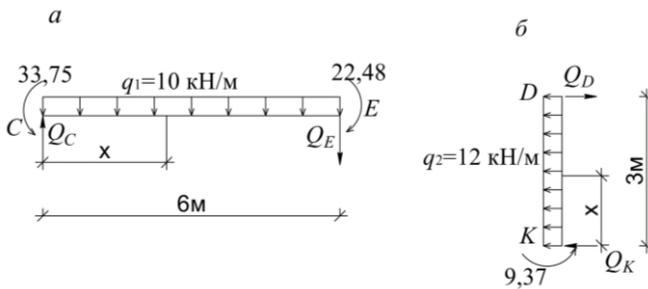


Рис. 8.9.10. К построению эпюры поперечных сил:
a, б – расчетные схемы для стержней *CE* и *KD*

Эпюры поперечных и продольных сил показаны на рис. 8.9.11 и рис. 8.9.12.

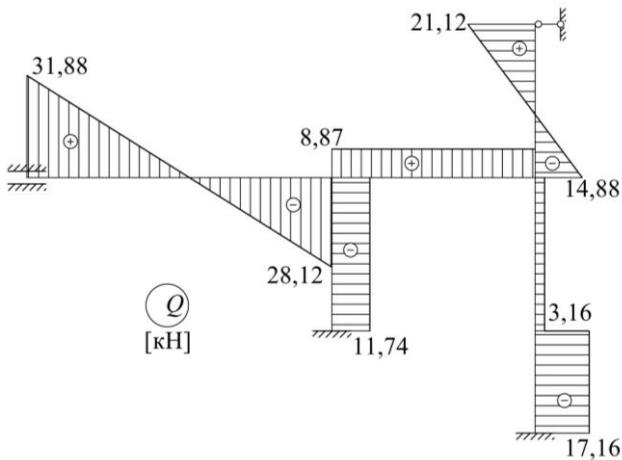


Рис. 8.9.11. Эпюра поперечных сил

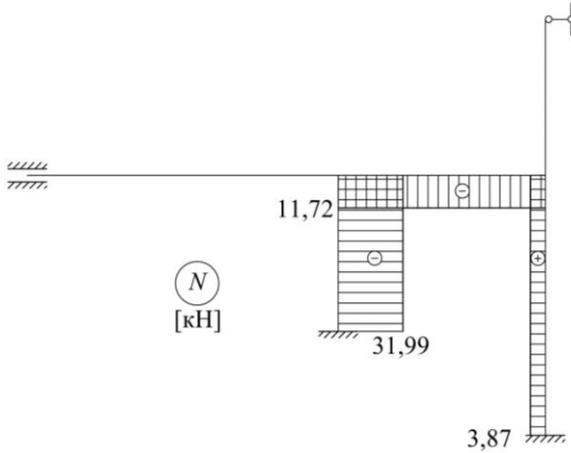


Рис. 8.9.12. Эпюра продольных сил

6. Для контроля правильности решения задачи проведем деформационную проверку и проверку равновесия системы, принимая допускаемую погрешность в пределах 2%.

Заданная рама является шесть раз статически неопределимой. Выберем вариант основной системы метода сил (рис. 8.9.13, а) и вычислим перемещение по направлению одной из лишних связей, например, связи 1 (с реакцией X_1). Для этого перемножим эпюры M (рис. 8.9.9) и \bar{M}'_1 (рис. 8.9.13, а).

$$\Delta = \frac{1}{EI} \left[-\frac{33,75 + 22,48}{2} \cdot 6 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{6^2}{8} \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4,68 - \frac{1}{2} \cdot 10,8 \right) \right] + \frac{1}{3EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 28,9 - \frac{1}{3} \cdot 6,32 \right) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9,37 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 12 \cdot \frac{3^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} (565,74 - 565,66) = \frac{0,08}{EI} \text{ (погрешность } \approx 0,014 \text{ \%)}.$$

Проверим условия равновесия системы (рис. 8.9.13, б):

$$\sum X = 11,74 - 12 \cdot 3 + 21,12 - 14 + 17,16 = 50,02 - 50 \quad \text{(погрешность } 0,04\%);$$

$$\sum Y = 31,88 + 31,99 - 10 \cdot 6 - 3,87 = 63,87 - 63,87 = 0;$$

$$\sum M_E^{\text{лев}} = -33,75 + 31,88 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 - 11,74 \cdot 3 + 28,9 + 18 = -10,79 \text{ кНм},$$

что приблизительно соответствует значению момента $M=10,8$ кНм на эпюре M (погрешность 0,1%).

8.10. Расчет статически неопределимой рамы на действие температуры и на смещение опоры

Пример. Для заданной рамы требуется:

1. Построить эпюры внутренних усилий от теплового воздействия.
2. Построить эпюры внутренних усилий от смещения жесткой заделки по вертикали, горизонтали и угла поворота.
3. В обоих случаях выполнить кинематические проверки.

1. Расчет рамы на температурное воздействие (рис.8.10.1).

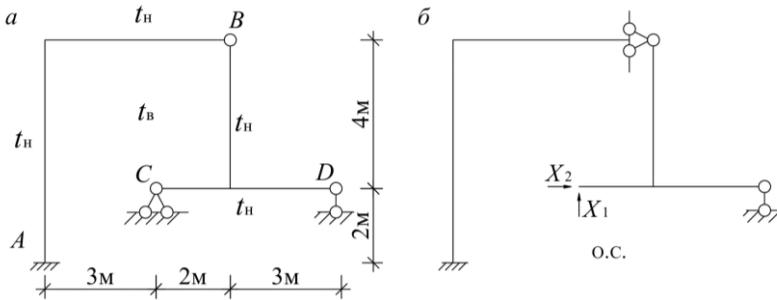


Рис. 8.10.1. Плоская рама:
а – расчетная схема; б – основная система

Исходные данные: коэффициент линейного расширения материала $\alpha = 1 \cdot 10^{-15} \frac{1}{\text{град}}$; высота поперечного сечения стержней рамы $h=0,3\text{м}$; жесткость на изгиб $EJ = 12,5 \cdot 10^3 \text{ кН м}^2$; температура внутреннего волокна $t_B = 25^\circ \text{С}$, наружного $t_H = -15^\circ \text{С}$.

Решение:

Заданная рама (рис. 8.10.1, а) дважды статически неопределима. Основная система показана на рис. 8.10.1, б. При этом канонические уравнения имеют вид:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1t} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2t} = 0.$$

Единичные эпюры продольных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 8.10.2.

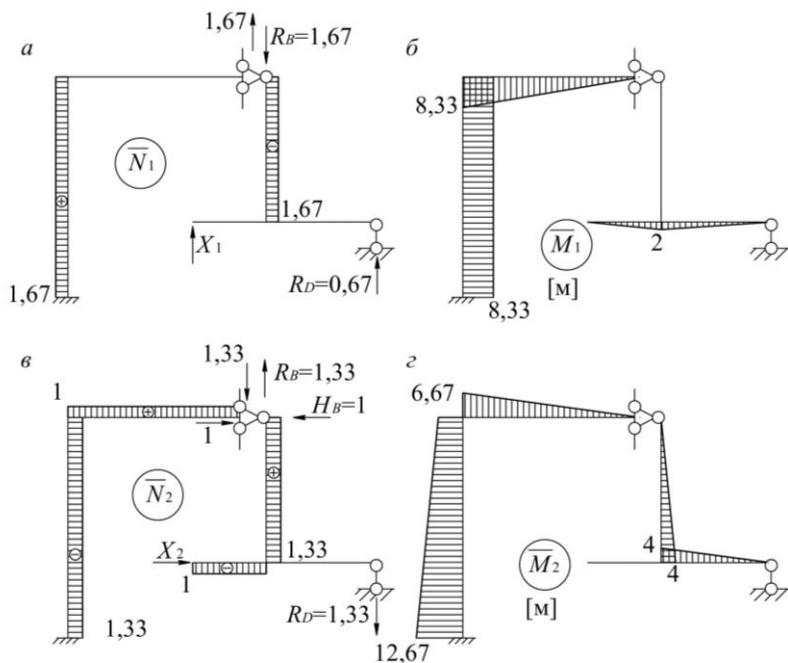


Рис. 8.10.2. Единичные эпюры:
a, c – продольных сил; *б, д* – изгибающих моментов

При вычислении перемещений в интегралах Мора удерживались слагаемые с изгибающими моментами, т.е.

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx; \quad \delta_{22} = \int \frac{\overline{M}_2^2}{EI} dx; \quad \delta_{12} = \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EI} dx.$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(6 \cdot 8,33 \cdot 8,33 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,33 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) =$$

$$= \frac{538,65}{EI} = \frac{538,65}{12,5 \cdot 10^3} = 4309,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[6 \cdot 6,67 \cdot \left(6,67 + \frac{1}{2} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(6,67 + \frac{2}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6,67 \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{3} \cdot 6,67 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{690,53}{EI} = \frac{690,53}{12,5 \cdot 10^3} = \\ = 5524,24 \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}}{\text{кН}}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left(- \frac{6,67 + 12,67}{2} \cdot 6 \cdot 8,33 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6,67 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,33 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \\ = - \frac{583,91}{EI} = - \frac{583,91}{12,5 \cdot 10^3} = -4671,28 \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}}{\text{кН}}$$

Для проверки коэффициентов «перемножим» суммарную эпюру \overline{M}_s (рис. 8.10.3) саму на себя

$$\delta_{ss} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4,34 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4,34 - \frac{1}{3} \cdot 1,66 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,66 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,66 - \frac{1}{3} \cdot 4,34 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,66 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,66 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{61,37}{EI}$$

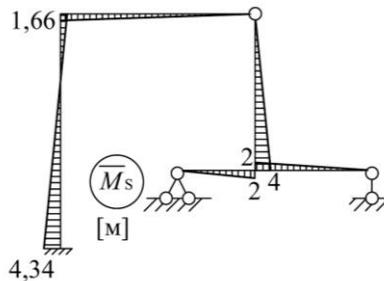


Рис. 8.10.3. Суммарная единичная эпюра изгибающих моментов

Результат равен сумме коэффициентов:

$$\delta_{11} + \delta_{22} + 2 \cdot \delta_{12} = \frac{1}{EI} (538,65 + 690,53 - 2 \cdot 583,91) = \frac{61,36}{EI}$$

Свободные члены системы канонических уравнений вычислим по формуле

$$\Delta_{ii} = \sum \left(\alpha t_0 \Omega \overline{N}_i + \alpha \frac{\Delta t}{h} \Omega \overline{M}_i \right);$$

$$\Delta_{1r} = 1 \cdot 10^{-5} \left[\left| \frac{-15 + 25}{2} \right| \cdot (6 \cdot 1,67 - 4 \cdot 1,67) + \left| \frac{-15 - 25}{0,3} \right| \cdot \left(6 \cdot 8,33 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8,33 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) + \left| \frac{-15 + 15}{0,3} \right| \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \right] \right] = 9190,7 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta_{2r} = 1 \cdot 10^{-5} \left[\left| \frac{-15 + 25}{2} \right| \cdot (-6 \cdot 1,33 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1,33 - 2 \cdot 1) + \left| \frac{-15 - 25}{0,3} \right| \cdot \left(-\frac{6,67 + 12,67}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6,67 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right) + \left| \frac{-15 + 15}{0,3} \right| \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \right] \right] = -11074,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Система канонических уравнений после сокращения на величину 10^5 примет вид

$$\begin{vmatrix} 4309,2 & -4671,28 \\ -4671,28 & 5524,24 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9190,7 \\ -11074,3 \end{vmatrix} = 0.$$

Реакции «лишних» связей равны:

$$X_1 = 0,48 \text{ кН}; \quad X_2 = 2,41 \text{ кН}.$$

Ординаты эпюры моментов и продольных сил вычислим по формулам:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2, \quad N = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2.$$

Эпюры M и N приведены на рис. 8.10.4, а, б. Значения поперечных сил определим, используя эпюру M . Эпюра Q дана на рис. 8.10.4, в.

Проведем универсальную кинематическую проверку:

$$\Delta = \int \frac{M \overline{M}_x}{EI} dx + \sum \Delta_{it} = 0;$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4,34 \cdot \left(12,07 + \frac{2}{3} \cdot 14,46 \right) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,66 \cdot \left(12,07 + \frac{1}{3} \cdot 14,46 \right) - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,66 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12,07 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,64 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,96 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,68 \right] + \Delta_{1r} + \Delta_{2r} = \frac{235,21}{EI} + \Delta_{1r} + \Delta_{2r} = \frac{235,21}{12,5 \cdot 10^3} + (9190,7 - 11074,3) \cdot 10^{-5} = 1881,68 \cdot 10^{-5} - 1883,6 \cdot 10^{-5} = 1,92 \cdot 10^{-5} \text{ (погрешность } \approx 0,1\%).$$

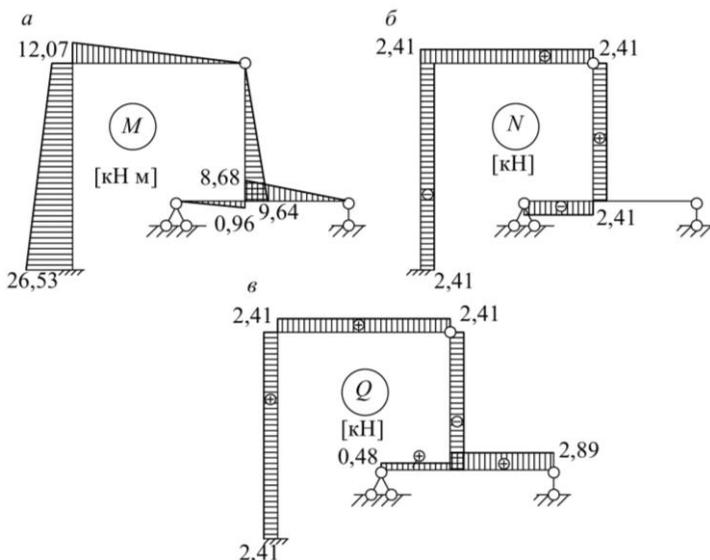


Рис. 8.10.4. Эпюры внутренних усилий:
a – изгибающих моментов; *б* – продольных сил; *в* – поперечных сил

2. Расчет рамы на смещение опоры (рис. 8.10.5)

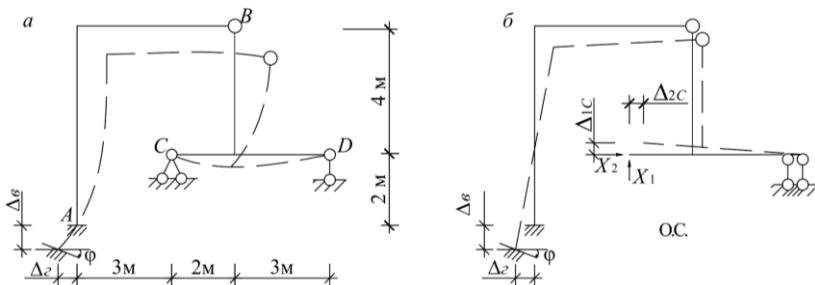


Рис. 8.10.5. Плоская рама:
a – расчетная схема; *б* – основная система

Для рассмотренной выше рамы построить эпюру изгибающих моментов от горизонтального, вертикального и углового смещений опоры с жестким защемлением (рис. 8.10.5, *a*).

Исходные данные: $\Delta_{\Gamma} = 0,012$ м, $\Delta_B = 0,015$ м, $\varphi = 0,01$ рад .

Решение:

Основная система показана на рис. 8.10.5, б.

Канонические уравнения:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1C} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2C} = 0.$$

Из предыдущих вычислений (в разделе 1) имеем:

$$\delta_{11} = \frac{538,65}{EI}; \quad \delta_{22} = \frac{690,53}{EI}; \quad \delta_{12} = -\frac{583,91}{EI}.$$

Покажем значения реакций в жестком защемлении от сил X_1 и X_2 (рис. 8.10.6).

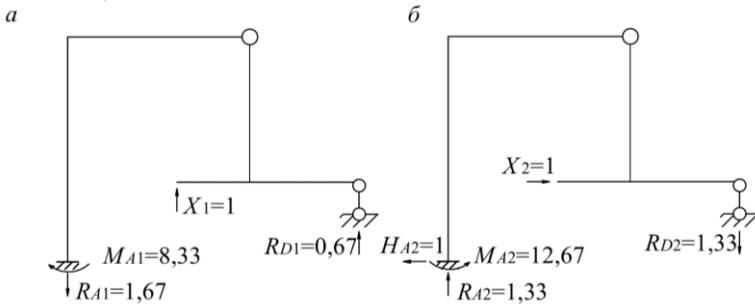


Рис. 8.10.6. Значения реакций в жестком защемлении:
а – от $X_1=1$; б – от $X_2=1$

Свободные члены системы канонических уравнений представляют собой перемещения от заданных смещений C_A связи A . Так как неизвестные приложены не в том сечении, которое подверглось смещениям, то для их определения воспользуемся формулой

$$\Delta_{ic} = \sum V_i C_i .$$

Увеличим в EI раз свободные члены и тогда соответственно коэффициенты при неизвестных X_i равны:

$$EI \Delta_{1C} = EI \sum V_{A1} C_A = EI (-R_{A1} \Delta_B - M_{A1} \varphi) = -EI (1,67 \cdot 0,015 + 8,33 \cdot 0,01) = -EI \cdot 0,10835 = -12,5 \cdot 10^3 \cdot 0,10835 = -1354,38 ;$$

$$EI \Delta_{2C} = EI \sum V_{A2} C_A = EI (R_{A2} \Delta_B - H_{A2} \Delta_{\Gamma} + M_{A2} \varphi) = EI (1,33 \cdot 0,015 - 1 \cdot 0,012 + 12,67 \cdot 0,01) = EI \cdot 0,13465 = 12,5 \cdot 10^3 \cdot 0,13465 = 1683,13 .$$

Система канонических уравнений примет вид:

$$\begin{vmatrix} 538,65 & -583,91 \\ -583,91 & 690,53 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1354,38 \\ 1683,13 \end{vmatrix} = 0.$$

Реакции «лишних» связей равны:

$$X_1 = -1,53 \text{ кН}, \quad X_2 = -3,73 \text{ кН}.$$

Ординаты эпюры моментов вычислим по формуле:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2.$$

Эпюра M приведена на рис. 8.10.7.

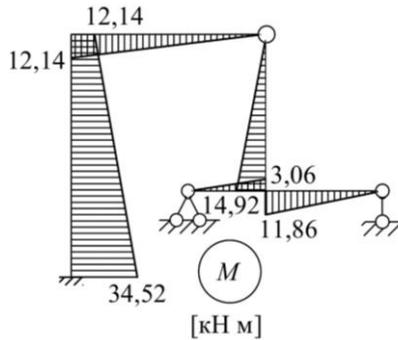


Рис. 8.10.7. Эпюра изгибающих моментов

Проведем кинематическую проверку:

$$\Delta_C = \sum \frac{M \overline{M}_s}{EI} dx + \sum \Delta_{ic} = 0.$$

Используя эпюру \overline{M}_s (рис. 8.10.3), получим:

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{1}{EI} \left[12,14 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1,66 - \frac{1}{2} \cdot 4,34 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 22,38 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1,66 - \frac{2}{3} \cdot 4,34 \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12,14 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,66 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 14,92 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3,06 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \\ &- \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 11,88 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \Big] + \Delta_{1C} + \Delta_{2C} = -\frac{326,54}{EI} - \frac{1354,38}{EI} + \frac{1683,13}{EI} = \\ &= \frac{1}{EI} (-1680,92 + 1683,13) = \frac{2,21}{EI} \text{ (погрешность } 0,13 \%). \end{aligned}$$

8.11. Расчет пластинки методом конечных элементов

Пример. Определить напряженно-деформированное состояние пластинки единичной толщины (рис. 8.11.1), на которую действует равномерно распределенная нагрузка p , приложенная в ее плоскости вертикально вниз. Коэффициент Пуассона равен 0,3.

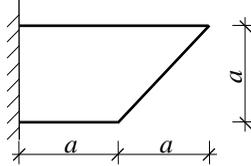


Рис. 8.11.1. Заданная пластинка

Решение. Разобьем пластинку на треугольники (рис. 8.11.2, а) и рассмотрим сначала элемент I. Координаты его узлов указаны на рис. 8.11.2, б. Находим коэффициенты a, b, c и площадь элемента:

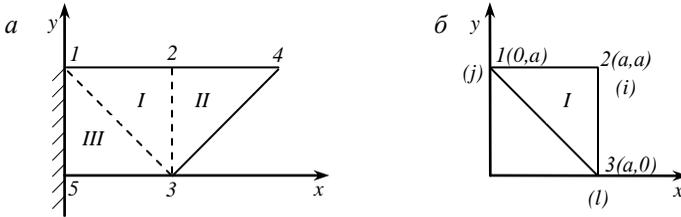


Рис. 8.11.2. Разбивка пластинки на треугольные элементы:
а – схема разбивки; б – элемент I

$$a_1 = x_3 y_2 - x_2 y_3 = a \cdot a - a \cdot 0 = a^2; \quad b_1 = y_3 - y_2 = 0 - a = -a;$$

$$c_1 = x_2 - x_3 = 0;$$

$$a_2 = x_1 y_3 - x_3 y_1 = 0 \cdot 0 - a \cdot a = -a^2; \quad b_2 = y_1 - y_3 = a - 0 = a;$$

$$c_2 = x_3 - x_1 = a - 0 = a;$$

$$a_3 = x_2 y_1 - x_1 y_2 = a \cdot a - 0 \cdot a = a^2; \quad b_3 = y_2 - y_1 = a - a = 0;$$

$$c_3 = x_1 - x_2 = 0 - a = -a;$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{1}{2}a^2.$$

Определим функции Φ :

$$\Phi_1(x, y) = \frac{a^2 - ax}{a^2}; \Phi_2(x, y) = \frac{-a^2 + ax + ay}{a^2}; \Phi_3(x, y) = \frac{a^2 - ay}{a^2}.$$

Получаем матрицы B :

$$B_1 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix}; \quad B_2 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ a & a \end{vmatrix}; \quad B_3 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix}.$$

Для рассматриваемого плоского напряженного состояния имеем

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{vmatrix}.$$

Переходим к определению матрицы жесткости элемента Φ_1 :

$$r_1 = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}.$$

Находим подматрицы:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\ &= \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0,549 & 0 \\ 0 & 0,192 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ a & a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\ &= \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \begin{vmatrix} -1 & -\nu \\ 1 - \nu & -\frac{1 - \nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,549 & -0,165 \\ -0,192 & -0,192 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$r_{13} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 0 & \nu \\ \frac{1-\nu}{2} & 0 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0 & 0,165 \\ 0,192 & 0 \end{vmatrix};$$

$$r_{21} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1-\nu}{2} \\ -\nu & -\frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,549 & -0,192 \\ -0,165 & -0,192 \end{vmatrix};$$

$$r_{22} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ a & a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} \frac{3-\nu}{2} & \frac{1+\nu}{2} \\ \frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0,742 & 0,357 \\ 0,357 & 0,742 \end{vmatrix};$$

$$r_{23} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

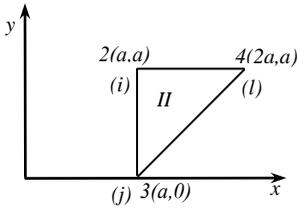
$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -\frac{1-\nu}{2} & \nu \\ -\frac{1-\nu}{2} & -1 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,192 & -0,165 \\ -0,192 & -0,549 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned}
r_{31} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ \nu & 0 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0 & 0,192 \\ 0,165 & 0 \end{vmatrix}; \\
r_{32} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ a & a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \\ -\nu & -1 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,192 & -0,192 \\ -0,165 & -0,549 \end{vmatrix}; \\
r_{33} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0,192 & 0 \\ 0 & 0,549 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица жесткости элемента I имеет вид

$$r_I = \begin{vmatrix} 0,549 & 0 & -0,549 & -0,165 & 0 & 0,165 \\ 0 & 0,192 & -0,192 & -0,192 & -0,192 & 0 \\ -0,549 & -0,192 & 0,742 & 0,357 & -0,192 & -0,165 \\ -0,165 & -0,192 & 0,357 & 0,742 & -0,192 & -0,549 \\ 0 & 0,192 & -0,192 & -0,192 & 0,192 & 0 \\ 0,165 & 0 & -0,165 & -0,549 & 0 & 0,549 \end{vmatrix}.$$

Аналогичные вычисления выполним для получения матрицы жесткости конечного элемента II (рис. 8.11.3):



$$r_{II} = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{vmatrix}.$$

Рис. 8.11.3. ЭЛЕМЕНТ II

$$a_2 = x_3 y_4 - x_4 y_3 = a \cdot a - 2a \cdot 0 = a^2; \quad b_2 = y_3 - y_4 = 0 - a = -a;$$

$$c_2 = x_4 - x_3 = 2a - a = a;$$

$$a_3 = x_4 y_2 - x_2 y_4 = 2a \cdot a - a \cdot a = a^2; \quad b_3 = y_4 - y_2 = a - a = 0;$$

$$c_3 = x_2 - x_4 = a - 2a = -a;$$

$$a_4 = x_2 y_3 - x_3 y_2 = a \cdot 0 - a \cdot a = -a^2; \quad b_4 = y_2 - y_3 = a - 0 = a;$$

$$c_4 = x_3 - x_2 = a - a = 0;$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + a_4) = \frac{1}{2}a^2.$$

$$\Phi_2(x, y) = \frac{a^2 - ax + ay}{a^2}; \quad \Phi_3(x, y) = \frac{a^2 - ay}{a^2}; \quad \Phi_4(x, y) = \frac{-a^2 + ax}{a^2};$$

$$B_2 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \\ a & -a \end{vmatrix}; \quad B_3 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix}; \quad B_4 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
r_{22} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a & -a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \\ a & -a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} \frac{3-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} \\ -\frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0,742 & -0,357 \\ -0,357 & 0,742 \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{23} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a & -a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -\frac{1-\nu}{2} & \nu \\ \frac{1-\nu}{2} & -1 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,192 & 0,165 \\ 0,192 & -0,549 \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{24} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a & -a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -1 & \frac{1-\nu}{2} \\ \nu & -\frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,549 & 0,192 \\ 0,165 & -0,192 \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{32} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \\ 0 & -a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} \\ \nu & -1 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,192 & 0,192 \\ 0,165 & -0,549 \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{33} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0,192 & 0 \\ 0 & 0,549 \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{34} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1-\nu}{2} \\ -\nu & 0 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0 & -0,192 \\ -0,165 & 0 \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{42} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \\ a & -a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -1 & \nu \\ \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,549 & 0,165 \\ 0,192 & -0,192 \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

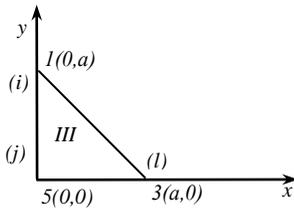
$$\begin{aligned}
r_{43} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\
&= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 0 & -\nu \\ -\frac{1-\nu}{2} & 0 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0 & -0,165 \\ -0,192 & 0 \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

$$r_{44} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0,549 & 0 \\ 0 & 0,192 \end{vmatrix};$$

$$r_{II} = E \begin{vmatrix} 0,742 & -0,357 & -0,192 & 0,165 & -0,549 & 0,192 \\ -0,357 & 0,742 & 0,192 & -0,549 & 0,165 & -0,192 \\ -0,192 & 0,192 & 0,192 & 0 & 0 & -0,192 \\ 0,165 & -0,549 & 0 & 0,549 & -0,165 & 0 \\ -0,549 & 0,165 & 0 & -0,165 & 0,549 & 0 \\ 0,192 & -0,192 & -0,192 & 0 & 0 & 0,192 \end{vmatrix}.$$

Выполним вычисления для получения матрицы жесткости конечного элемента III (рис. 8.11.4):



$$r_{III} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{13} & r_{15} \\ r_{31} & r_{33} & r_{35} \\ r_{51} & r_{53} & r_{55} \end{vmatrix}.$$

Рис. 8.11.4. Элемент III

$$a_1 = x_5 y_3 - x_3 y_5 = 0 \cdot 0 - a \cdot 0 = 0; \quad b_1 = y_5 - y_3 = 0 - 0 = 0;$$

$$c_1 = x_3 - x_5 = a - 0 = a;$$

$$a_3 = x_1 y_5 - x_5 y_1 = 0 \cdot 0 - 0 \cdot a = 0; \quad b_3 = y_1 - y_5 = a - 0 = a;$$

$$c_3 = x_5 - x_1 = 0 - 0 = 0;$$

$$a_5 = x_3 y_1 - x_1 y_3 = a \cdot a - 0 \cdot 0 = a^2; \quad b_5 = y_3 - y_1 = 0 - a = -a;$$

$$c_5 = x_1 - x_3 = 0 - a = -a;$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(a_1 + a_3 + a_5) = \frac{1}{2}a^2.$$

Определим функции Φ :

$$\Phi_1(x, y) = \frac{y}{a};$$

$$\Phi_3(x, y) = \frac{x}{a};$$

$$\Phi_5(x, y) = \frac{a-x-y}{a}.$$

Получаем матрицы B :

$$B_1 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix}; \quad B_3 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}; \quad B_5 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \\ -a & -a \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0,192 & 0 \\ 0 & 0,549 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ \nu & 0 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0 & 0,192 \\ 0,165 & 0 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{15} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \\ -a & -a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \\ -\nu & -1 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,192 & -0,192 \\ -0,165 & -0,549 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{31} &= \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} = \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 0 & \nu \\ \frac{1-\nu}{2} & 0 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0 & 0,165 \\ 0,192 & 0 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$r_{33} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0,549 & 0 \\ 0 & 0,192 \end{vmatrix};$$

$$r_{35} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \\ -a & -a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -1 & -\nu \\ \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,549 & -0,165 \\ -0,192 & -0,192 \end{vmatrix};$$

$$r_{51} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & -a & -a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -\frac{1-\nu}{2} & -\nu \\ -\frac{1-\nu}{2} & -1 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,192 & -0,165 \\ -0,192 & -0,549 \end{vmatrix};$$

$$r_{53} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & -a & -a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1-\nu}{2} \\ -\nu & -\frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,549 & -0,192 \\ -0,165 & -0,192 \end{vmatrix};$$

$$r_{55} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & -a & -a \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \times \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \\ -a & -a \end{vmatrix} \times \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} \frac{3-\nu}{2} & \frac{1+\nu}{2} \\ \frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 0,742 & 0,357 \\ 0,357 & 0,742 \end{vmatrix};$$

$$r_{111} = E \begin{vmatrix} 0,192 & 0 & 0 & 0,192 & -0,192 & -0,192 \\ 0 & 0,549 & 0,165 & 0 & -0,165 & -0,549 \\ 0 & 0,165 & 0,549 & 0 & -0,549 & -0,165 \\ 0,192 & 0 & 0 & 0,192 & -0,192 & -0,192 \\ -0,192 & -0,165 & -0,549 & -0,192 & 0,742 & 0,357 \\ -0,192 & -0,549 & -0,165 & -0,192 & 0,357 & 0,742 \end{vmatrix}.$$

Матрица жесткости пластинки в блочном виде:

$$R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} \end{vmatrix}.$$

где, например,

$$R_{11} = r_{11}^I + r_{11}^{II}; \quad R_{12} = r_{12}^I; \quad R_{13} = r_{13}^I + r_{13}^{III}; \quad R_{14} = 0; \quad R_{15} = r_{15}^{III};$$

$$R_{21} = r_{21}^I; \quad R_{22} = r_{22}^I + r_{22}^{II}; \quad R_{23} = r_{23}^I + r_{23}^{II}; \quad R_{24} = r_{24}^{II}; \quad R_{25} = 0;$$

Матрица жесткости пластинки:

$$R = E \begin{vmatrix} 0,741 & 0 & -0,549 & -0,165 & 0 & 0,357 & 0 & 0 & -0,192 & -0,192 \\ 0 & 0,741 & -0,192 & -0,192 & 0,357 & 0 & 0 & 0 & -0,165 & -0,549 \\ -0,549 & -0,192 & 1,484 & 0 & -0,384 & 0 & -0,549 & 0,192 & 0 & 0 \\ -0,165 & -0,192 & 0 & 1,484 & 0 & -1,098 & 0,165 & -0,192 & 0 & 0 \\ 0 & 0,357 & -0,384 & 0 & 0,933 & 0 & 0 & -0,192 & -0,549 & -0,165 \\ 0,357 & 0 & 0 & -1,098 & 0 & 1,29 & -0,165 & 0 & -0,192 & -0,192 \\ 0 & 0 & -0,549 & 0,165 & 0 & -0,165 & 0,549 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,192 & -0,192 & -0,192 & 0 & 0 & 0,192 & 0 & 0 \\ -0,192 & -0,165 & 0 & 0 & -0,549 & -0,192 & 0 & 0 & 0,741 & 0,357 \\ -0,192 & -0,549 & 0 & 0 & -0,165 & -0,192 & 0 & 0 & 0,357 & 0,741 \end{vmatrix}.$$

Уравнения равновесия, выраженные через перемещения, в матричной форме без учета опорных закреплений

$$R \bar{Z} = \bar{F}.$$

Ввиду наличия опорных связей вводим матрицу \bar{R} и вектор \bar{X} . Тогда, система уравнений:

$$\bar{R} \bar{X} = \bar{F}.$$

$$\overline{R} = E \begin{pmatrix} -1 & 0 & -0,549 & -0,165 & 0 & 0,357 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0,192 & -0,192 & 0,357 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,484 & 0 & -0,384 & 0 & -0,549 & 0,192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,484 & 0 & -1,098 & 0,165 & -0,192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,384 & 0 & 0,933 & 0 & 0 & -0,192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,098 & 0 & 1,29 & -0,165 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,549 & 0,165 & 0 & -0,165 & 0,549 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,192 & -0,192 & -0,192 & 0 & 0 & 0,192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,549 & -0,192 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,165 & -0,192 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вектор узловых сил \vec{F} и вектор \vec{X} имеют вид:

$$\vec{F} = -\frac{pa^2}{2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -pa^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0,333 \\ 0 \\ 0,333 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0,167 \\ 0 \\ 0,167 \end{pmatrix}; \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} R_{1x}/E \\ R_{1y}/E \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ R_{5x}/E \\ R_{5y}/E \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение $\overline{R} \vec{X} = \vec{F}$, находим реакции связей и перемещения свободных узлов:

$$\begin{aligned} R_{1x} &= -1,158 pa^2; & R_{1y} &= 0,521 pa^2; & u_2 &= 1,011 \frac{pa^2}{E}; \\ v_2 &= -3,705 \frac{pa^2}{E}; & u_3 &= -0,923 \frac{pa^2}{E}; & v_3 &= -3,4 \frac{pa^2}{E}; \\ u_4 &= 1,103 \frac{pa^2}{E}; & v_4 &= -6,509 \frac{pa^2}{E}; & R_{5x} &= 1,159 pa^2; \\ R_{5y} &= 0,972 pa^2. \end{aligned}$$

Для контроля правильности решения задачи проведем проверку равновесия системы (рис. 8.11.5), принимая допускаемую погрешность в пределах 2%:

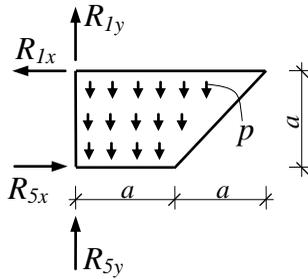


Рис. 8.11.5. Пластика под действием нагрузки и опорных реакций

$$\sum F_x = -R_{1x} + R_{5x} = (-1,558 + 1,559)pa^2 = 0,001 pa^2 \quad (\text{погрешность } 0,09\%);$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= R_{1y} + R_{5y} - p\left(a^2 + \frac{1}{2}a^2\right) = 0,521 + 0,972 - 1,5 pa^2 = \\ &= (1,493 - 1,51)pa^2 = 0,017 pa^2 \quad (\text{погрешность } 1,13\%). \end{aligned}$$

Напряжения в конечных элементах находим, используя зависимость $\bar{\sigma} = D \bar{\varepsilon}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \times \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} b_i u_i + b_j u_j + b_l u_l \\ c_i v_i + c_j v_j + c_l v_l \\ c_i u_i + b_i v_i + c_j u_j + b_j v_j + c_l u_l + b_l v_l \end{Bmatrix}$$

Элемент I .

$$b_i = a; c_i = a; b_j = -a; c_j = 0; b_l = 0; c_l = -a;$$

$$u_i = 1,011 \frac{pa^2}{E}; v_i = -3,705 \frac{pa^2}{E}; u_j = v_j = 0; u_l = -0,923 \frac{pa^2}{E};$$

$$v_l = -3,4 \frac{pa^2}{E};$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{pa^2}{0,91} \begin{Bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1,011 \\ -0,305 \\ -1,771 \end{Bmatrix} = pa \begin{Bmatrix} 1,01 \\ -0,002 \\ -0,62 \end{Bmatrix}$$

Элемент II .

$$b_i = -a ; c_i = a ; b_j = 0 ; c_j = -a ; b_l = a ; c_l = 0 ;$$

$$u_i = 1,011 \frac{pa^2}{E} ; v_i = -3,705 \frac{pa^2}{E} ; u_j = -0,923 \frac{pa^2}{E} ; v_j = -3,4 \frac{pa^2}{E} ;$$

$$u_l = 1,103 \frac{pa^2}{E} ; v_l = -6,509 \frac{pa^2}{E} .$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{pa}{0,91} \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,092 \\ -0,305 \\ -0,87 \end{pmatrix} = pa \begin{pmatrix} 0,001 \\ -0,305 \\ -0,335 \end{pmatrix} .$$

Элемент III .

$$b_i = 0 ; c_i = a ; b_j = -a ; c_j = -a ; b_l = a ; c_l = 0 ;$$

$$u_i = v_i = 0 ; u_j = v_j = 0 ; u_l = -0,923 \frac{pa^2}{E} ; v_l = -3,4 \frac{pa^2}{E} .$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{pa}{0,91} \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,923 \\ 0 \\ -3,14 \end{pmatrix} = pa \begin{pmatrix} -1,014 \\ -0,304 \\ -1,308 \end{pmatrix} .$$

При обходе вершин элемента i, j, l против часовой стрелки напряжения сжатия обозначаются знаком плюс, растяжения – минус.

Значение подматриц матрицы жесткости конечного элемента треугольной формы можно получить, применяя программу для ЭВМ «Использование МКЭ при расчете пластинчатых элементов конструкций на действие нагрузок, лежащих в их плоскости», имеющую свидетельство о ее государственной регистрации.

8.12. Расчет рамы на устойчивость

Пример. Найти критический параметр нагрузки F для рамы (рис. 8.12.1, а).

Решение. Основная система метода перемещений дана на рис. 8.12.1, б. Обозначим неизвестные: угол поворота жесткого узла через Z_1 , линейное смещение – через Z_2 .

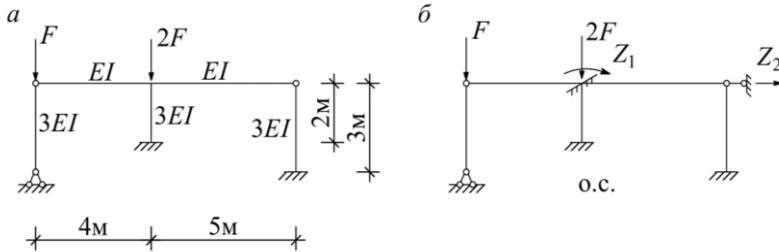


Рис. 8.12.1. Плоская рама:

а – расчетная схема; б – эквивалентная система по методу перемещений

Канонические уравнения:

$$r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 = 0,$$

$$r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 = 0.$$

В двух стойках будут различные значения $v = l \sqrt{\frac{F}{EI}}$, так как продольные силы, длины и жесткости различны.

Для левой стойки $v_{лев} = 3 \sqrt{\frac{F}{3EI}} = v$, для средней стойки

$$v_{сп} = 2 \sqrt{\frac{2F}{3EI}} : 3 \sqrt{\frac{F}{3EI}} = 0,94 v.$$

Единичные эпюры моментов даны на рис. 8.12.2. При их построении использовались приложения 1 и 2.

Вычислим значения коэффициентов канонических уравнений (рис. 8.12.3):

$$r_{11} = 6EI \varphi_2(0,94v) + 1,35EI; \quad r_{12} = -4,5EI \varphi_4(0,94v);$$

$$\eta_3(0,94v) = \varphi_4(0,94v), \quad r_{21} = -4,5EI \varphi_4(0,94v) = r_{12};$$

$$r_{22} = 4,5EI \eta_2(0,94v) + 0,33EI - 0,11EIv^2.$$

Система канонических уравнений примет вид:

$$[6EI \varphi_2(0,94v) + 1,35EI] Z_1 - 4,5EI \varphi_4(0,94v) Z_2 = 0,$$

$$-4,5EI \varphi_4(0,94v) Z_1 + [4,5EI \eta_2(0,94v) + 0,33EI - 0,11EIv^2] Z_2 = 0.$$

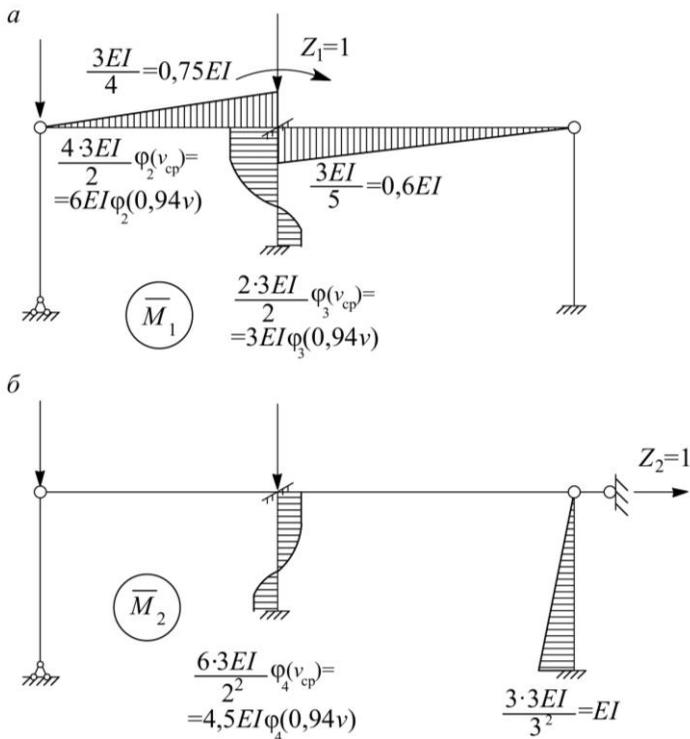


Рис. 8.12.2. Единичные эпюры изгибающих моментов: а – от поворота $Z_1=1$; б – от горизонтального смещения $Z_2=1$

Из условия равенства нулю определителя системы:

$$\begin{vmatrix} [6\varphi_2(0,94v) + 1,35] & -4,5\varphi_4(0,94v) \\ -4,5\varphi_4(0,94v) & [4,5\eta_2(0,94v) + 0,33 - 0,11v^2] \end{vmatrix} = 0$$

получим уравнение устойчивости

$$[6\varphi_2(0,94v) + 1,35] \cdot [4,5\eta_2(0,94v) + 0,33 - 0,11v^2] - [4,5\varphi_4(0,94v)]^2 = 0.$$

Трансцендентное уравнение решаем путем подбора значения v , представив его в виде:

$$\frac{[4,5\varphi_4(0,94v)]^2}{6\varphi_2(0,94v) + 1,35} = 4,5\eta_2(0,94v) + 0,33 - 0,11v^2.$$

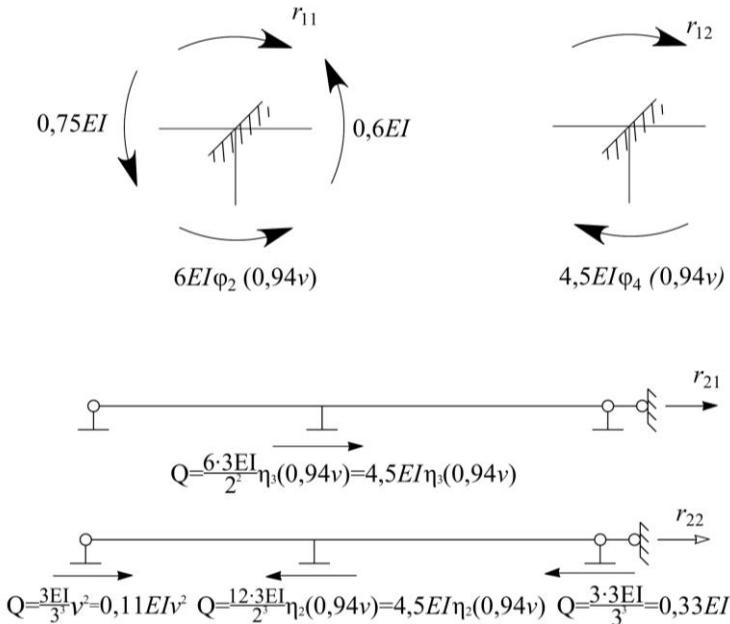


Рис. 8.12.3. К определению коэффициентов канонических уравнений

Левую часть обозначим через A , правую через B . Находим пределы изменения v , рассматривая крайние случаи закрепления стержня (рис. 8.12.4).

Средняя стойка рамы находится в таких условиях, что ее верхний конец может смещаться по горизонтали, но смещению препятствует жесткость других стоек и упруго поворачиваться, но повороту препятствует жесткость ригеля. Следовательно, критическая сила стойки рамы будет выше, чем для стержня a , но ниже чем для стержня b .

Найдем значения для этих двух случаев:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}; \quad F_{cr} = v^2 \frac{EI}{l^2}.$$

$$\frac{\pi^2 3EI}{(2 \cdot 2)^2} = (0,94v)^2 \frac{3EI}{2^2}; \quad v = 1,78;$$

$$\frac{\pi^2 3EI}{(0,5 \cdot 2)^2} = (0,94v)^2 \frac{3EI}{2^2}; \quad v = 7,11.$$

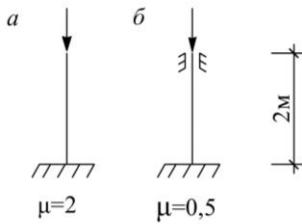


Рис. 8.12.4. Диапазон закрепления стержней:
 а – с одной защемляющей опорой;
 б – с двумя защемляющими опорами

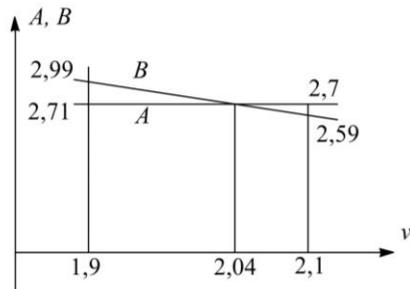


Рис. 8.12.5. Графический способ определения корня уравнения устойчивости

Поскольку диапазон ν достаточно широк, отметим, что возможность горизонтальных смещений значительно уменьшает жесткость системы и поэтому целесообразно задаться значением, более близким к нижнему пределу, чем к верхнему.

1. Задаемся значением $\nu = 1,9$; $0,94 \nu = 1,79$. По таблице приложения 2 находим с учетом интерполяции:

$$\varphi_2(1,79) = 0,8884 \quad , \quad \varphi_4(1,79) = 0,9455 \quad ,$$

$$\eta_2(1,79) = 0,6783 \quad .$$

$$A = \frac{(4,5 \cdot 0,9455)^2}{6 \cdot 0,8884 + 1,35} = 2,71 \quad ,$$

$$B = 4,5 \cdot 0,6783 + 0,33 - 0,11 \cdot 1,9^2 = 2,99 \quad .$$

2. Задаемся значением $\nu = 2,1$; $0,94 \nu = 1,97$.

$$\varphi_2(1,97) = 0,8634 \quad , \quad \varphi_4(1,97) = 0,9334 \quad ,$$

$$\eta_2(1,97) = 0,6099 \quad .$$

$$A = \frac{(4,5 \cdot 0,9334)^2}{6 \cdot 0,8634 + 1,35} = 2,7 \quad ,$$

$$B = 4,5 \cdot 0,6099 + 0,33 - 0,11 \cdot 2,1^2 = 2,59 \quad .$$

Построим график изменения величин A и B , считая их меняющимися по линейному закону в небольшом диапазоне $1,9 < \nu < 2,1$ (рис. 8.12.5). Условие $A=B$ выполняется при $\nu = 2,04$.

$$\text{Критический параметр нагрузки } F_{cr} = \nu^2 \frac{EI}{l^2} .$$

Для левой стойки $F^* = 2,04^2 \cdot \frac{3EI}{3^2} = 1,39 EI$.

Для средней стойки $2F^* = (0,94 \cdot 2,04)^2 \cdot \frac{3EI}{2^2} = 2,76 EI$; $F^* = 1,38 EI$.

Следовательно, $F_{cr} = 1,38 EI$ и погрешность вычислений составляет 0,72%.

Коэффициенты свободных длин стоек рамы при их работе в условиях, показанных на рис. 8.12.4, а:

$$\mu_{\text{лев}} = \frac{\pi}{\nu} = \frac{3,14}{2,04} = 1,54; \quad \mu_{\text{сп}} = \frac{3,14}{0,94 \cdot 2,04} = 1,64.$$

8.13. Динамический расчет стержневой системы

Пример. Для невесомой системы (рис. 8.13.1) с массами m_1 и m_2 требуется:

1. Определить частоты свободных колебаний.
2. Определить закон движения масс m_1 и m_2 при наличии условия:

виз: $y_1(0) = c$; $y_2(0) = -0,5c$; $\dot{y}_1(0) = 0$; $\dot{y}_2(0) = 0$.

3. Представить графически главные формы колебаний.

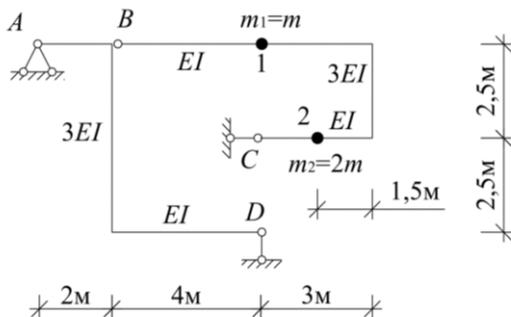


Рис. 8.13.1. Расчетная схема системы

Решение:

1. Система имеет две степени свободы. Дифференциальные уравнения движения масс m_1 и m_2 :

$$m_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + m_1 \delta_{12} \ddot{y}_2 + y_1 = 0,$$

$$m_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 + y_2 = 0.$$

Будем искать решение в виде

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^2 y_{ki}(t); \quad y_{1i}(t) = y_{1i} \sin(\omega_i t + \lambda); \quad y_{2i}(t) = y_{2i} \sin(\omega_i t + \lambda).$$

После подстановки этих выражений в уравнения получим

$$\begin{aligned} (m_1 \delta_{11} \omega_i^2 - 1) y_{1i} + m_2 \delta_{12} \omega_i^2 y_{2i} &= 0, \\ m_1 \delta_{21} \omega_i^2 y_{1i} + (m_2 \delta_{22} \omega_i^2 - 1) y_{2i} &= 0. \end{aligned}$$

Частоты свободных колебаний находим из условия, что детерминант системы уравнений равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega_i^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega_i^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega_i^2 & m_2 \delta_{22} \omega_i^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \omega_i^4 - (m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) \omega_i^2 + 1 = 0.$$

Перемещения δ_{ki} определим по способу Верещагина, используя эпюры M_1 и M_2 (рис. 8.13.2, а, б).

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,33 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,33 \right) + \\ &+ \frac{1}{3EI} \left(5 \cdot 1,33 \cdot 1,33 + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{80,26}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,33 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,33 \right) + \frac{1}{3EI} \left[5 \cdot 1,33 \cdot 1,33 + 2,5 \cdot 1,5 \cdot \left(1,5 + \frac{1}{2} \cdot 5,5 \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 5,5 \cdot \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 5,5 \right) \Big] = \frac{139,1}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,33 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{4+7}{2} \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot \right. \\ &\times \left. 1,33 \right) + \frac{1}{3EI} \left[5 \cdot 1,33 \cdot 1,33 + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4 \cdot \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 5,5 \right) \right] = \frac{102,43}{EI}. \end{aligned}$$

Для контроля правильности вычисления δ_{ik} построим суммарную эпюру M_s , приложив к местам прикрепления масс одновременно две единичные силы (рис. 8.13.2, в).

$$\delta_{ss} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,66 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,66 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + 3 \cdot 8 \cdot \left(8 + \frac{1}{2} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left(8 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2,66 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,66 \right] + \frac{1}{3EI} \left[5 \cdot 2,66 \cdot 2,66 + 2,5 \cdot 1,5 \cdot \left(1,5 + \frac{1}{2} \cdot 9,5 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 9,5 \cdot \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 9,5 \right) \right] = \frac{424,22}{EI}.$$

С другой стороны,

$$\delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} = \frac{1}{EI} (80,26 + 139,1 + 2 \cdot 102,43) = \frac{424,22}{EI}.$$

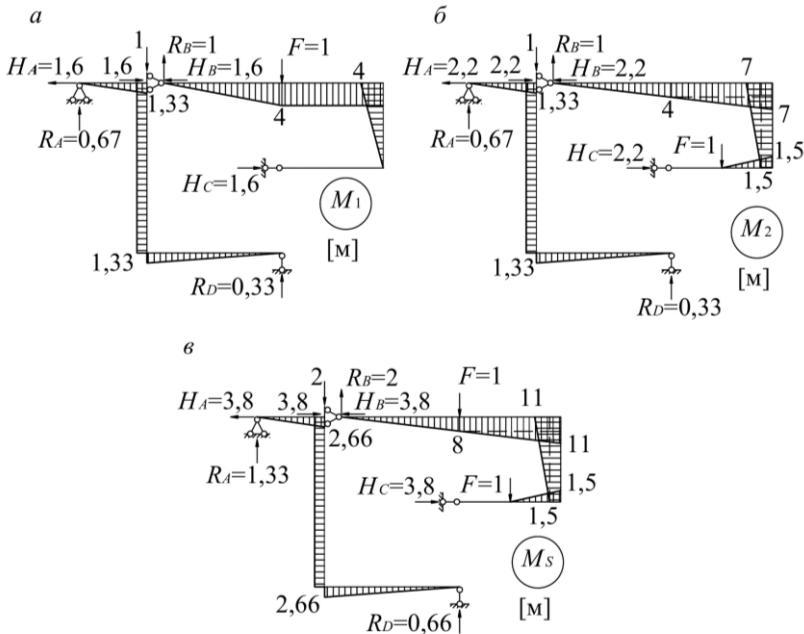


Рис. 8.13.2. Единичные эпюры изгибающих моментов:

a – от $F=1$, приложенной в точке 1 по направлению колебания массы m_1 ; *б* – от $F=1$, приложенной в точке 2 по направлению колебания массы m_2 ; *в* – суммарная эпюра

Тогда уравнение частот примет вид:

$$2m^2 \left(\frac{80,26 \cdot 139,1}{E^2 I^2} - \frac{102,43^2}{E^2 I^2} \right) \omega_i^4 - \left(m \cdot \frac{80,26}{EI} + 2m \cdot \frac{139,1}{EI} \right) \omega_i^2 + 1 = 0$$

или

$$1344,52 \frac{m^2}{E^2 I^2} \omega_i^4 - 358,46 \frac{m}{EI} \omega_i^2 + 1 = 0;$$

$$1344,52 \omega_i^4 - 358,46 \frac{EI}{m} \omega_i^2 + \frac{E^2 I^2}{m^2} = 0;$$

откуда

$$\omega_i^2 = \frac{358,46 \mp \sqrt{358,46^2 - 4 \cdot 1344,52 \cdot 1} \frac{EI}{m}}{2 \cdot 1344,52} = \frac{358,46 \mp 350,88}{2689,04} \frac{EI}{m};$$

$$\omega_1^2 = \omega_{min}^2 = 0,0028 \frac{EI}{m}; \quad \omega_1 = 0,053 \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_2^2 = \omega_{max}^2 = 0,264 \frac{EI}{m}; \quad \omega_2 = 0,51 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

2. Определим закон движения масс.

$$y_1(t) = y_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + y_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2);$$

$$y_2(t) = y_{21} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + y_{22} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) = \rho_{21} y_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + \rho_{22} y_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2),$$

где $\rho_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}}, \quad \rho_{22} = \frac{y_{22}}{y_{12}}.$

Из уравнений, образующих однородную систему, можно определить ρ_{21} и ρ_{22} .

При $\omega = \omega_1$ получим

$$(m_1 \delta_{11} \omega_1^2 - 1) y_{11} + m_2 \delta_{12} \omega_1^2 y_{21} = 0;$$

$$\rho_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = - \frac{m_1 \delta_{11} \omega_1^2 - 1}{m_2 \delta_{12} \omega_1^2} = - \frac{m \frac{80,26}{EI} \cdot 0,0028 \frac{EI}{m} - 1}{2m \frac{102,43}{EI} \cdot 0,0028} = - \frac{-0,775}{0,574} = 1,35.$$

При $\omega = \omega_2$ получим

$$(m_1 \delta_{11} \omega_2^2 - 1) y_{12} + m_2 \delta_{12} \omega_2^2 y_{22} = 0;$$

$$\rho_{22} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = -\frac{m_1 \delta_{11} \omega_2^2 - 1}{m_2 \delta_{12} \omega_2^2} = -\frac{m \frac{80,26}{EI} \cdot 0,264 \frac{EI}{m} - 1}{2m \frac{102,43}{EI} \cdot 0,264 \frac{EI}{m}} = -\frac{20,189}{54,083} = -0,37.$$

Прежние выражения $y(t)$ примут вид

$$y_1(t) = y_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + y_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2);$$

$$y_2(t) = 1,35 y_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) - 0,37 y_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2).$$

Используя начальные условия для \dot{y} , найдем λ_1 и λ_2 :

$$\dot{y}_1(0) = y_{11} \omega_1 \cos \lambda_1 + y_{12} \omega_2 \cos \lambda_2 = 0;$$

$$\dot{y}_2(0) = 1,35 y_{11} \omega_1 \cos \lambda_1 - 0,37 y_{12} \omega_2 \cos \lambda_2 = 0,$$

откуда $\cos \lambda_1 = 0$, $\cos \lambda_2 = 0$, а, следовательно, $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$y_1(t) = y_{11} \cos \omega_1 t + y_{12} \cos \omega_2 t;$$

$$y_2(t) = 1,35 y_{11} \cos \omega_1 t - 0,37 y_{12} \cos \omega_2 t.$$

Используя начальные условия для y , найдем y_{11} и y_{12} :

$$y_1(0) = y_{11} + y_{12} = c;$$

$$y_2(0) = 1,35 y_{11} - 0,37 y_{12} = -0,5c.$$

Корнями этой системы уравнений являются

$$y_{11} = -0,07c; \quad y_{12} = 1,07c.$$

Выражения перемещений получат следующий вид:

$$y_1(t) = -0,07c \cos \omega_1 t + 1,07c \cos \omega_2 t;$$

$$y_2(t) = -0,095c \cos \omega_1 t - 0,396c \cos \omega_2 t.$$

3. Установим главные формы колебаний. Для первой главной формы колебаний при начальных условиях

$$y_1(0) = y_{11}; \quad y_2(0) = \rho_{21} y_{11} = 1,35 y_{11};$$

$$\dot{y}_1(0) = 0; \quad \dot{y}_2(0) = 0.$$

имеем (рис. 8.13.3, а):

$$y_1(t) = y_{11} \cos \omega_1 t = -0,07c \cos \omega_1 t;$$

$$y_2(t) = 1,35 y_{11} \cos \omega_1 t = -0,095c \cos \omega_1 t.$$

Для второй главной формы колебаний при начальных условиях

$$y_1(0) = y_{12}; \quad y_2(0) = \rho_{22} y_{12} = -0,37 y_{12}; \quad \dot{y}_1(0) = 0; \quad \dot{y}_2(0) = 0,$$

имеем (рис. 8.13.3, б):

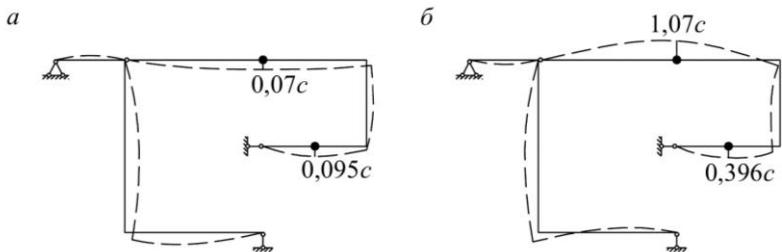


Рис. 8.13.3. Главные формы колебаний системы:
a – первая; *б* – вторая

$$y_1(t) = y_{12} \cos \omega_2 t - 1,07 c \cos \omega_2 t;$$

$$y_2(t) = -0,37 y_{12} \cos \omega_2 t = -0,396 c \cos \omega_2 t.$$

Проверка (ортогональность главных форм колебаний):

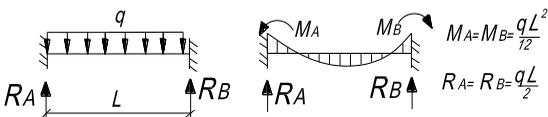
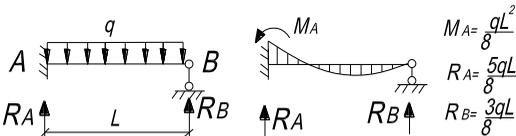
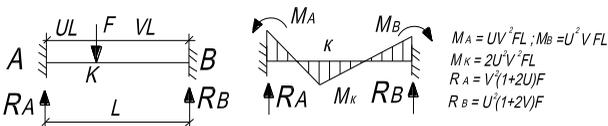
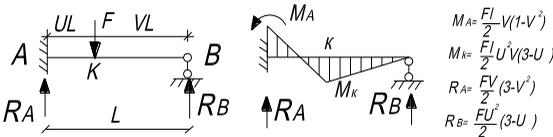
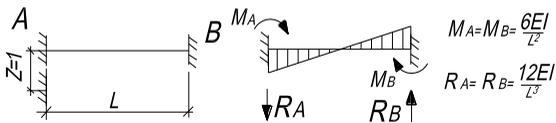
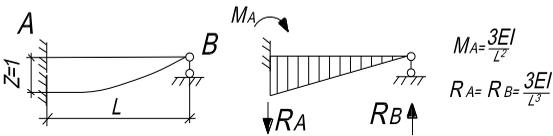
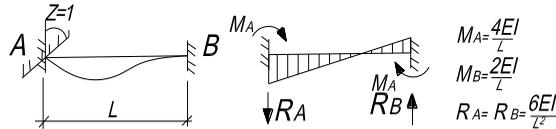
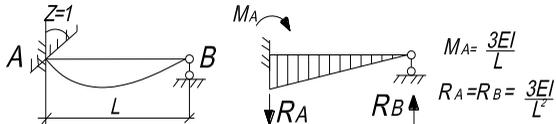
$$- m_1 \cdot 0,07 c \cdot 1,07 c + m_2 \cdot 0,095 c \cdot 0,396 c = -m \cdot 0,0749 c^2 +$$

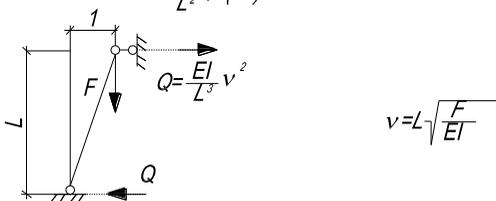
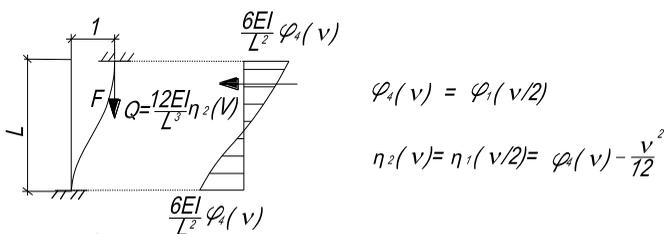
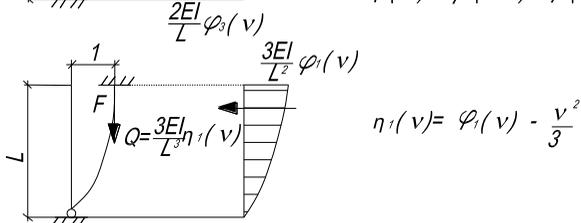
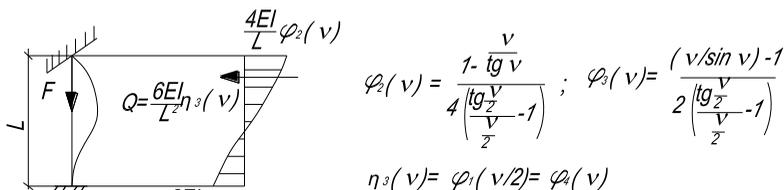
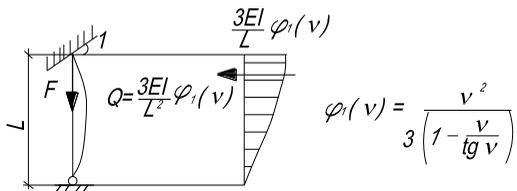
$$+ 2 m \cdot 0,095 c \cdot 0,396 c = -0,0749 m c^2 + 0,0752 m c^2.$$

Погрешность составляет 0,4%.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1





продолжение приложения 2

Значения функций

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	0,9973	0,9986	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,60	0,9756	0,9881	1,0061	0,9941	0,8556	0,9641
0,80	0,9567	0,9787	1,0111	0,9895	0,7434	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5930	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8790
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1,30	0,8814	0,9424	0,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9581	0	0,7525
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	-0,0380	0,7434
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9510	-0,1742	0,7102
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	-0,3191	0,6749
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	-0,4736	0,6375
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	-0,6710	0,5899
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817
2,06	0,6747	0,8499	1,0613	0,9277	-0,7398	0,5734
2,08	0,6672	0,8468	1,0831	0,9255	-0,7749	0,5650
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9260	-0,8103	0,5565
2,12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	-0,8465	0,5480
2,14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	-0,8822	0,5394
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307
2,18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	-0,9557	0,5220
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	-1,0309	0,5041
2,24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	-1,0691	0,4951
2,26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	-1,1077	0,4860
2,28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	-1,1457	0,4768
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	-1,2260	0,4581
2,34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	-1,2663	0,4486
2,36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	-1,3069	0,4391
2,38	0,5401	0,7952	1,1140	0,9015	-1,3480	0,4295
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8991	-1,4316	0,4101
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	-1,4743	0,4002
2,46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	-1,5169	0,3902
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5602	0,3802
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6383	0,3598
2,54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	-1,6929	0,3495
2,56	0,4464	0,7596	1,1363	0,8852	-1,7381	0,3391
2,58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	-1,7838	0,3286

продолжение приложения 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\tau_1(\nu)$	$\tau_2(\nu)$
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	-1,8765	0,3075
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968
2,66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	-1,9712	0,2860
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0193	0,2751
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	-2,1170	0,2531
2,74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8676	-2,1667	0,2420
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	-2,2169	0,2307
2,78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	-2,2676	0,2192
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	-2,3707	0,1968
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	-2,4231	0,1850
2,86	0,2505	0,6918	1,1810	0,8550	-2,4760	0,1734
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8528	-2,5296	0,1616
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
2,92	0,2036	0,6768	1,1913	0,8484	-2,6385	0,1379
2,94	0,1878	0,6717	1,1948	0,8462	-2,6939	0,1261
2,96	0,1706	0,6665	1,1984	0,8439	-2,7499	0,1138
2,98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	-2,8066	0,1016
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,02	0,1182	0,6506	1,2095	0,8370	-2,9219	0,0770
3,04	0,1000	0,6452	1,2133	0,8347	-2,9805	0,0646
3,06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	-3,0400	0,0520
3,08	0,0621	0,6343	1,2212	0,8299	-3,0991	0,0394
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0267
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	-3,2225	0,0139
3,14	0,0017	0,6173	1,2334	0,8227	-3,2848	0,0011
π	0	0,6168	1,2336	0,8224	-3,2698	0
3,16	-0,0195	0,6115	1,2376	0,8203	-3,3480	-0,0118
3,18	-0,0412	0,6057	1,2419	0,8178	-3,4120	-0,0249
3,20	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,22	-0,0864	0,5937	1,2507	0,8128	-3,5425	-0,0512
3,24	-0,1100	0,5876	1,2552	0,8102	-3,6092	-0,0646
3,26	-0,1342	0,5815	1,2597	0,8076	-3,6767	-0,0780
3,28	-0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	-3,7453	-0,0915
3,30	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,32	-0,2111	0,5628	1,2739	0,7998	-3,8852	-0,1187
3,34	-0,2383	0,5564	1,2788	0,7972	-3,9568	-0,1324
3,36	-0,2663	0,5499	1,2838	0,7945	-4,0295	-0,1463
3,38	-0,2951	0,5433	1,2889	0,7918	-4,1032	-0,1602
3,40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,42	-0,3555	0,5299	1,2992	0,7863	-4,2540	-0,1884
3,44	-0,3873	0,5231	1,3045	0,7835	-4,3318	-0,2026
3,46	-0,4202	0,5162	1,3099	0,7807	-4,4107	-0,2169
3,48	-0,4542	0,5092	1,3155	0,7779	-4,4910	-0,2313
3,50	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,52	-0,5259	0,4950	1,3270	0,7723	-4,6560	-0,2602
3,54	-0,5638	0,4878	1,3328	0,7695	-4,7410	-0,2748
3,56	-0,6031	0,4805	1,3387	0,7667	-4,8276	-0,2894
3,58	-0,6439	0,4731	1,3447	0,7638	-4,9160	-0,3042
3,60	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,62	-0,7303	0,4580	1,3571	0,7580	-5,0984	-0,3340
3,64	-0,7763	0,4503	1,3635	0,7550	-5,1928	-0,3491
3,66	-0,8243	0,4425	1,3700	0,7520	-5,2895	-0,3643
3,68	-0,8745	0,4345	1,3766	0,7483	-5,3886	-0,3797

продолжение приложения 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,70	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,72	-0,9819	0,4184	1,3903	0,7425	-5,5947	-0,4107
3,74	-1,0395	0,4102	1,3973	0,7393	-5,7020	-0,4263
3,76	-1,0999	0,4019	1,4044	0,7361	-5,8124	-0,4420
3,78	-1,1634	0,3935	1,4217	0,7329	-5,9262	-0,4578
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,82	-1,3009	0,3764	1,4267	0,7265	-6,1650	-0,4895
3,84	-1,3754	0,3677	1,4344	0,7232	-6,2906	-0,5056
3,86	-1,4543	0,3588	1,4423	0,7199	-6,4208	-0,5217
3,88	-1,5380	0,3498	1,4503	0,7166	-6,5561	-0,5379
3,90	-1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
3,92	-1,7214	0,3315	1,4667	0,7099	-6,8435	-0,5706
3,94	-1,8227	0,3221	1,4752	0,7065	-6,9972	-0,5871
3,96	-1,9310	0,3126	1,4838	0,7031	-7,1582	-0,6037
3,98	-2,0473	0,3030	1,4928	0,6996	-7,3274	-0,6204
4,00	-2,1725	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,02	-2,3074	0,2834	1,5110	0,6926	-7,6942	-0,6541
4,04	-2,4547	0,2734	1,5204	0,6891	-7,8952	-0,6710
4,06	-2,6142	0,2632	1,5301	0,6855	-8,1087	-0,6881
4,08	-2,7888	0,2529	1,5400	0,6819	-8,3376	-0,7053
4,10	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5839	-0,7225
4,12	-3,1915	0,2318	1,5604	0,6747	-8,8496	-0,7398
4,14	-3,4262	0,2210	1,5709	0,6710	-9,1394	-0,7573
4,16	-3,6877	0,2101	1,5816	0,6673	-9,4562	-0,7749
4,18	-3,9824	0,1990	1,5925	0,6635	-9,8065	-0,7925
4,20	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,22	-4,6970	0,1762	1,6150	0,6559	-10,633	-0,8281
4,24	-5,1369	0,1646	1,6267	0,6521	-11,129	-0,8460
4,26	-5,6516	0,1528	1,6387	0,6482	-11,701	-0,8641
4,28	-6,2607	0,1409	1,6510	0,6443	-12,367	-0,8822
4,30	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,32	-7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	-14,116	-0,9188
4,34	-9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	-15,309	-0,9372
4,36	-10,503	0,0912	1,7033	0,6284	-16,840	-0,9557
4,38	-12,523	0,0781	1,7170	0,6243	-18,918	-0,9744
4,40	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-21,783	-0,9931
4,42	-19,703	0,0513	1,7452	0,6161	-26,215	-1,0119
4,44	-27,349	0,0376	1,7602	0,6119	-33,920	-1,0309
4,46	-44,148	0,0237	1,7754	0,6077	-50,779	-1,0499
4,48	-111,57	0,0096	1,7910	0,6034	-118,26	-1,0691
4,50	+227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4,52		-0,0194	1,8234	0,5948		-1,1077
4,54		-0,0343	1,8402	0,5905		-1,1271
4,56		-0,0495	1,8575	0,5861		-1,1457
4,58		-0,0650	1,8752	0,5817		-1,1662
4,60		-0,0807	1,8933	0,5772		-1,1861
4,62		-0,0969	1,9119	0,5727		-1,2060
4,64		-0,1133	1,9310	0,5681		-1,2250
4,66		-0,1301	1,9507	0,5635		-1,2461
4,68		-0,1472	1,9710	0,5589		-1,2663
4,70		-0,1646	1,9919	0,5543		-1,2865
3,2π		-0,1755	2,0052	0,5514		-1,2992
4,72		-0,1824	2,0134	0,5496		-1,3069
4,74		-0,2005	2,0365	0,5449		-1,3274
4,76		-0,2190	2,0582	0,5402		-1,3480
4,78		-0,2379	2,0816	0,5354		-1,3586

продолжение приложения 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,80		-0,2572	2,1056	0,5305		-1,3896
4,82		-0,2770	2,1304	0,5255		-1,4 05
4,84		-0,2973	2,1506	0,5205		-1,4316
4,86		-0,3181	2,1824	0,5155		-1,4528
4,88		-0,3394	2,2096	0,5105		-1,4743
4,90		-0,3612	2,2377	0,5054		-1,4954
4,92		-0,3834	2,2657	0,5003		-1,5169
4,94		-0,4061	2,2966	0,4951		-1,5385
4,96		-0,4293	2,3275	0,4899		-1,5602
4,98		-0,4530	2,3594	0,4846		-1,5821
5,00		-0,4772	2,3924	0,4793		-1,6040
5,02		-0,5022	2,4266	0,4739		-1,6261
5,04		-0,5280	2,4620	0,4685		-1,6483
5,06		-0,5545	2,4986	0,4630		-1,6706
5,08		-0,5818	2,5365	0,4576		-1,6929
5,10		-0,6099	2,5757	0,4520		-1,7155
5,12		-0,6388	2,6164	0,4464		-1,7381
5,14		-0,5685	2,6587	0,4407		-1,7609
5,16		-0,6999	2,7027	0,4350		-1,7838
5,18		-0,7306	2,7485	0,4292		-1,8078
5,20		-0,7630	2,7961	0,4234		-1,8299
5,22		-0,7964	2,8454	0,4175		-1,8532
5,24		-0,8310	2,8968	0,4116		-1,8765
5,26		-0,8668	2,9504	0,4056		-1,9000
5,28		-0,9039	3,0064	0,3996		-1,9236
5,30		-0,9423	3,0648	0,3931		-1,9477
5,32		-0,9821	3,1257	0,3873		-1,9712
5,34		-1,0233	3,1893	0,3811		-1,9952
5,36		-1,0660	3,2559	0,3748		-2,0193
5,38		-1,1103	3,3267	0,3685		-2,0435
5,40		-1,1563	3,3989	0,3621		-2,0679
5,42		-1,2043	3,4737	0,3556		-2,0924
5,44		-1,2544	3,5563	0,3491		-2,1170
5,46		-1,3067	3,6409	0,3425		-2,1418
5,48		-1,3612	3,7298	0,3358		-2,1667
5,50		-1,4181	3,8234	0,3291		-2,1917
5,52		-1,4777	3,9222	0,3223		-2,2169
5,54		-1,5402	4,0267	0,3154		-2,2422
5,56		-1,6059	4,1374	0,3085		-2,2676
5,58		-1,6751	4,2549	0,3015		-2,2932
5,60		-1,7481	4,3794	0,2944		-2,3189
5,62		-1,8252	4,5118	0,2873		-2,3447
5,64		-1,9065	4,6526	0,2801		-2,3707
5,66		-1,9920	4,8026	0,2727		-2,3969
5,68		-2,0833	4,9629	0,2654		-2,4231
5,70		-2,1804	5,1346	0,2580		-2,4495
5,72		-2,2833	5,3190	0,2505		-2,4760
5,74		-2,3944	5,5173	0,2429		-2,5027
5,76		-2,5130	5,7314	0,2352		-2,5296
5,78		-2,6406	5,9628	0,2374		-2,5466
5,80		-2,7777	6,2140	0,2195		-2,5838
5,82		-2,9262	6,4873	0,2116		-2,6111
5,84		-3,0876	6,7859	0,2036		-2,6385
5,86		-3,2634	7,1132	0,1955		-2,6661
5,88		-3,4562	7,4738	0,1873		-2,6939

окончание приложения 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,90		-3,6678	7,8726	0,1790		-2,7218
5,92		-3,9018	8,3163	0,1706		-2,7499
5,94		-4,1603	8,8122	0,1621		-2,7782
5,96		-4,4547	9,3706	0,1535		-2,8066
5,98		-4,7816	10,004	0,1448		-2,8352
6,00		-5,1589	10,727	0,1361		-2,8639
6,02		-5,5845	11,561	0,1272		-2,8928
6,04		-6,0653	12,534	0,1182		-2,9219
6,06		-6,6753	13,683	0,1091		-2,9512
6,08		-7,3699	15,060	0,0999		-2,9805
6,10		-8,2355	16,739	0,0906		-3,0102
6,12		-9,2939	18,832	0,0812		-3,0400
6,14		-10,646	21,511	0,0717		-3,0699
6,16		-12,440	25,065	0,0621		-3,0991
6,18		-14,921	29,999	0,0523		-3,1304
6,20		-18,594	37,308	0,0424		-3,1609
6,22		-24,575	49,255	0,0324		-3,1916
6,24		-36,100	72,272	0,0223		-3,2225
6,26		-67,436	135,03	0,0121		-3,2535
6,28		-92,67	984,32	0,0017		-3,2848
2π		$-\infty$	$+\infty$	0		-3,2898

Библиографический список

1. Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
2. Александров, А.А. Строительная механика. Тонкостенные и пространственные системы: Учебник для вузов / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
3. Строительная механика. Динамика и устойчивость: Учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
4. Дарков, А.В. Строительная механика: Учебник для вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М.: изд-во Лань, 2010. – 656 с.
5. Киселев, В.А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
6. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем: учебник для вузов / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
7. Хечумов, Р.А. Сопротивление материалов и основы строительной механики: Учебник для вузов / Р.А. Хечумов, А.Г. Юрьев, А.А. Толбатов; под ред. Р.А. Хечумова. – М.: изд-во АСВ, 1994. – 387 с.
8. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Часть I. Статически определяемые системы: Учебное пособие для вузов / Н.Н. Анохин. – М.: изд-во АСВ, 2007. – 335 с.
9. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Часть II. Статически неопределимые системы: Учебное пособие для вузов / Н.Н. Анохин. – М.: изд-во АСВ, 2007. – 464 с.
10. Юрьев, А.Г. Строительная механика: Учебное пособие / А.Г. Юрьев, Н.А. Смоляго, О.Я. Яковлев. – М.: Изд-во АСВ; Белгород: изд-во БГТУ, 2007. – 152 с.
11. Юрьев, А.Г. Строительная механика для студентов заочной формы обучения с применением дистанционных технологий: учебное пособие / А.Г. Юрьев, А.С. Горшков, Н.А. Смоляго. – Белгород: изд-во БГТУ, 2012. – 191 с.
12. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010617791. Смоляго Н.А., Ключев С.В., Ключев А.В., Гутерман И.Е. Использование МКЭ при расчете пластинчатых элементов конструкций на действие нагрузок, лежащих в их плоскости. 2010.

13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010617790. Смоляго Н.А., Клюев С.В., Брусенцева В.С., Клюев А.В. Оценка строительных конструкций на устойчивость. 2010.

Учебное издание

Юрьев Александр Гаврилович
Смоляго Нина Алексеевна
Серых Инна Робертовна
Яковлев Олег Александрович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Уч.-изд. л. 9,5 .
Усл.-печ. л. 10.9. Тираж 250 экз. Заказ . Цена р. к.
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом
университете им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46