

# I. Введение

## 1. Введение в механику. Разделы теоретической механики. Предмет теоретической механики

Современная техника ставит перед инженерами множество задач, решение которых связано с исследованием так называемого механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Теоретическая механика – это наука, в которой изучаются общие законы **механического движения и механического взаимодействия**. [μηχανη]

**Механическим движением** называется перемещение тела по отношению к другому телу происходящее в пространстве и во времени.

Под **механическим взаимодействием** понимают те действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел или изменение их формы.

Курс теоретической механики делится на три раздела: статика, кинематика и динамика.

*Статика* – это раздел механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы сил и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

*Кинематика* – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

*Динамика* – раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве в зависимости от действующих на них сил.

Круг проблем, рассматриваемых в механике, очень велик и с развитием этой науки в ней появился целый ряд областей. К этим областям относятся: теория упругости, теория пластичности, гидро- и аэромеханика и ряд других областей. Во всех этих областях методы исследования опираются на ряд основных законов или принципов и используют многие понятия и методы, общие для всех областей механики.

Рассмотрение этих общих понятий, законов и методов и составляет предмет так называемой теоретической механики.

# СТАТИКА

## II. Введение в статику

### 1. Основные понятия и аксиомы статики

Материальное тело, размеры которого в рассматриваемых конкретных условиях можно не учитывать, называется **материальной точкой**.

Материальная точка обладает массой и способностью взаимодействовать с другими телами.

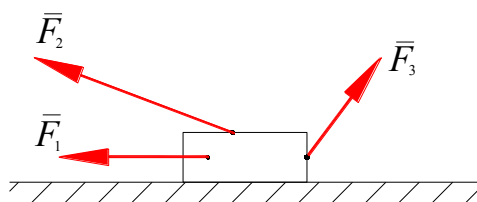
**Системой материальных точек** или механической системой, называется такая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения других точек этой системы.

**Абсолютно твердым**, называется тело, у которого расстояние между любыми двумя точками остается неизменным.

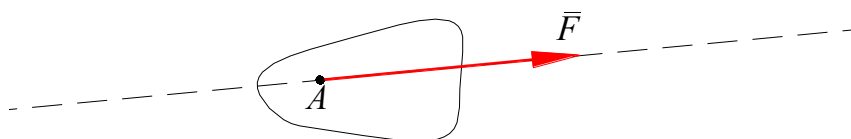
Твердое тело может находиться в состоянии покоя или движения определенного характера. Каждое из этих состояний условимся называть **кинематическим состоянием тела**.

**Сила** – это мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

Сила характеризуется: модулем, направлением, точкой приложения и линией действия.



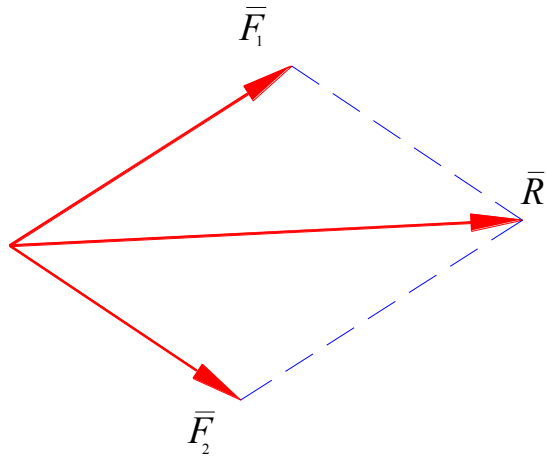
Прямая вдоль которой направлена сила, называется **линией действия силы**.



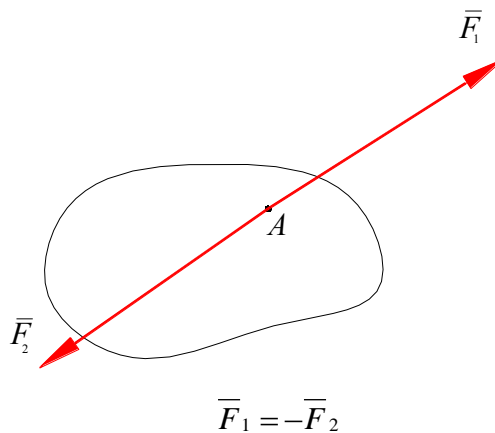
Совокупность нескольких сил, действующих на тело, называется **системой сил**.

Системы сил, под действием каждой из которых твердое тело находится в одинаковом кинематическом состоянии, называются **эквивалентными**.

Сила эквивалентная некоторой системе сил, называется **равнодействующей**.

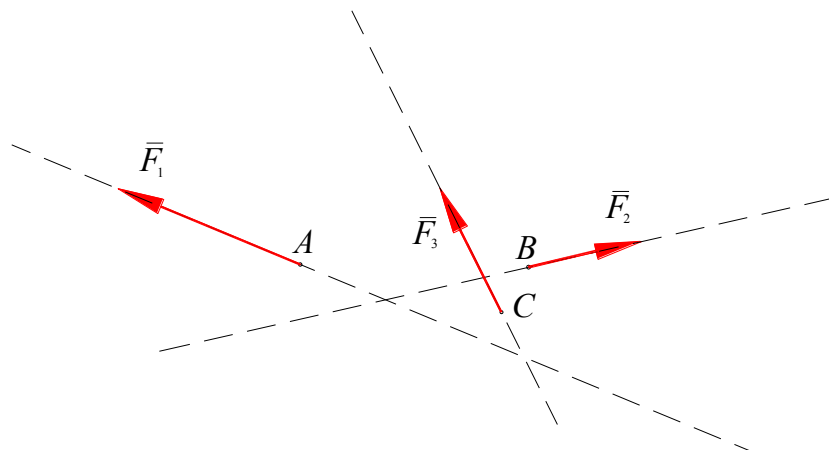


Сила равная по модулю равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону, называется **уравновешивающей силой**.

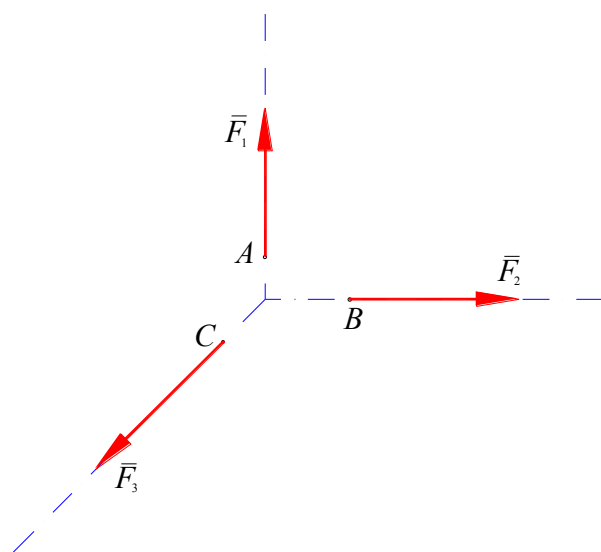


Система сил, которая, будучи приложенной к твердому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния, называется **системой взаимно уравновешивающихся сил**.

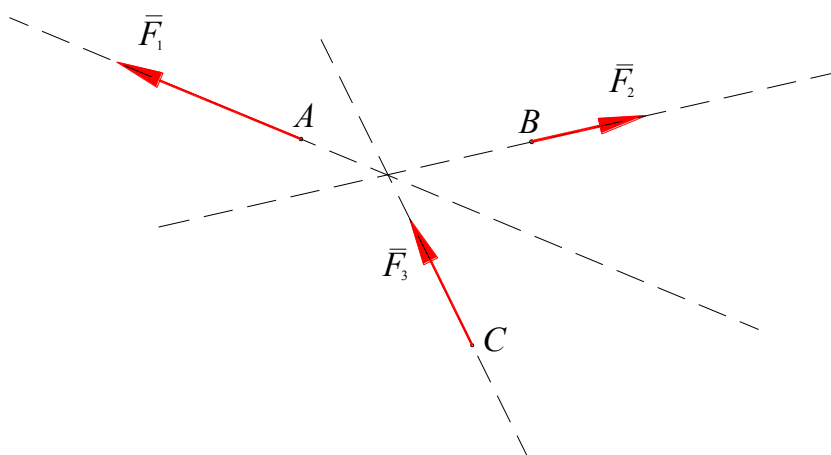
Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то система сил называется **плоской**.



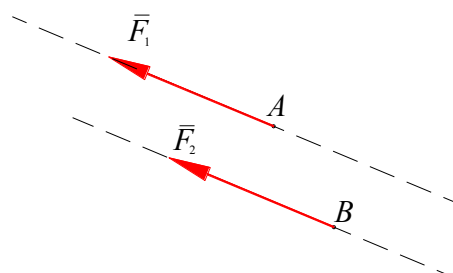
Если линии действия сил не лежат в одной плоскости, то система сил называется **пространственной**.



Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются **сходящимися**.



Силы, линии действия которых параллельны, называются **параллельными**.



Сила, приложенная к твердому телу в какой-нибудь одной его точке, называется **сосредоточенной**.

Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности твердого тела, называются **распределенными**.

### **Задачи статики**

1. преобразование систем сил, действующих на твердое тело, в системы им эквивалентные;
2. определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

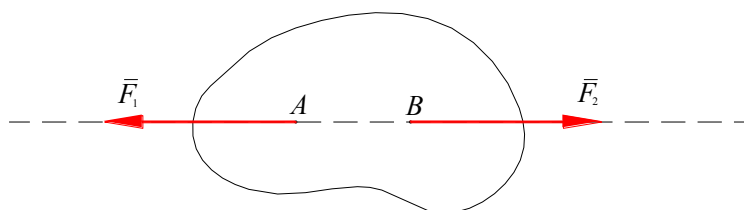
### Аксиомы статики

#### 1. АКСИОМА ИНЕРЦИИ

Под действием системы взаимно уравновешивающихся сил твердое тело находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

#### 2. АКСИОМА РАВНОВЕСИЯ ДВУХ СИЛ

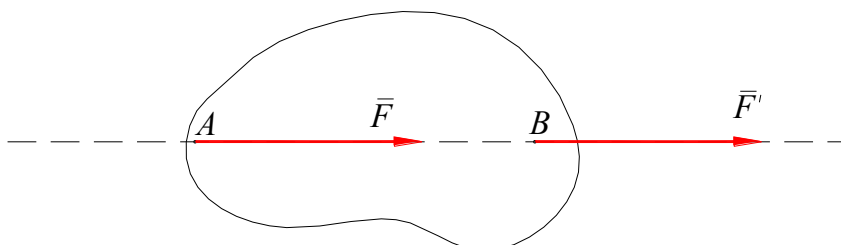
Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны и они направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны,



#### 3. АКСИОМА ПРИСОЕДИНЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ УРАВНОВЕШИВАЮЩИХ СИЛ

Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающих сил.

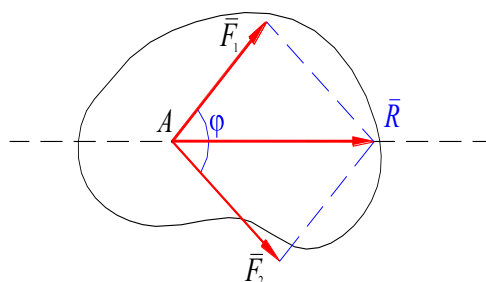
СЛЕДСТВИЕ: не изменяя кинематического состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль линии ее действия, сохраняя неизменным ее модуль и направление.



В статике твердого тела сила рассматривается как **скользящий вектор**.

#### 4. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА СИЛ

Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \varphi)}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi}$$

## 5. АКСИОМА РАВЕНСТВА ДЕЙСТВИЯ И ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

Всякому действию соответствует равное противоположно направленное противодействие.

## 6. ПРИНЦИП ОТВЕРДЕВАНИЯ

Равновесие сил приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердевании.

## 7. АКСИОМА СВЯЗИ

Несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых сил, действуют реакции связи.

### Связи и их реакции

Твердое тело называется **свободным**, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Твердое тело, свобода движения которого ограничена наложенными на него связями, называется **несвободным**.

Тело, ограничивающее свободу движения данного тела, является по отношению к нему **связью**.

Все силы, действующие на несвободное твердое тело можно разделить на задаваемые (активные) силы и реакции связей.

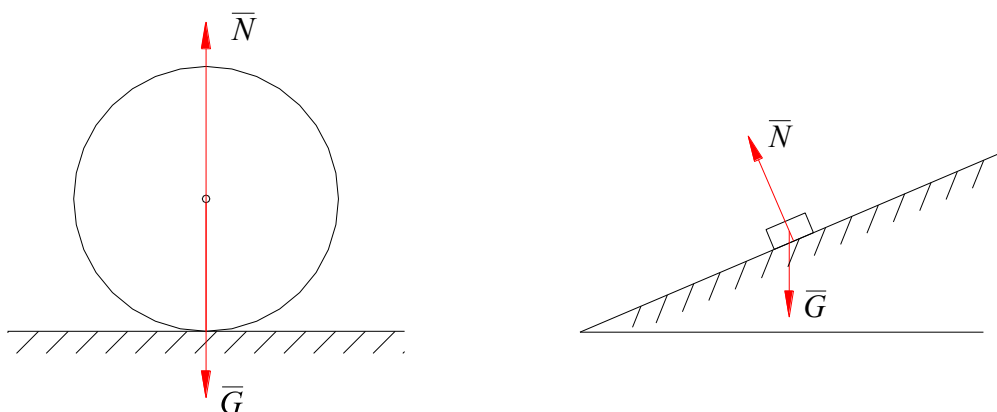
Активные силы выражают действие на твердое тело других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его кинематического состояния.

**Реакцией связи** называется сила или система сил, выражающая механическое действие связей на тело.

## Типы связей и их реакции

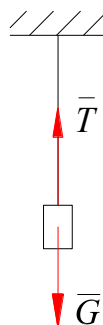
### 1. Гладкая плоскость

Реакция гладкой плоскости направлена перпендикулярно к плоскости.



### 2. Нить

Реакция нити направлена вдоль нити.



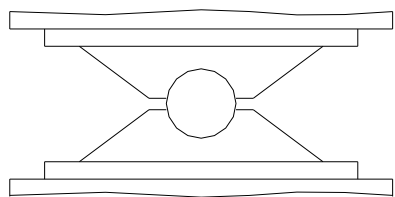
Для определения каждой реакции нужно знать три ее элемента: модуль, направление и точку приложения.

Точка приложения, как правило, известна. Направление же реакций известно лишь для некоторых типов связей.

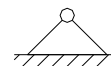
Если существует два взаимно перпендикулярных направления на плоскости, в одном из которых связь препятствует перемещению тела, а в другом нет, то направление ее реакции противоположно первому направлению.

### 3. Шарнирно-неподвижная опора

Препятствует любому поступательному движению тела, но дает ей возможность поворачиваться вокруг оси шарнира.

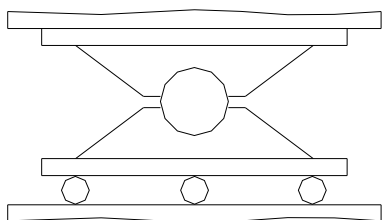


схематически изображается:

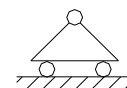


Известна точка приложения реакции, неизвестны модуль и направление.

### 4. Шарнирно-подвижная опора



схематически изображается:



Известна точка приложения реакции и ее направление, неизвестен модуль этой реакции.

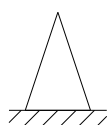
### 5. Невесомый стержень



Реакция невесомого стержня направлена вдоль стержня.

Неизвестен модуль этой реакции.

### 6. Упор



Реакция упора перпендикулярна оси балки опертой на него.

Неизвестен модуль этой реакции.



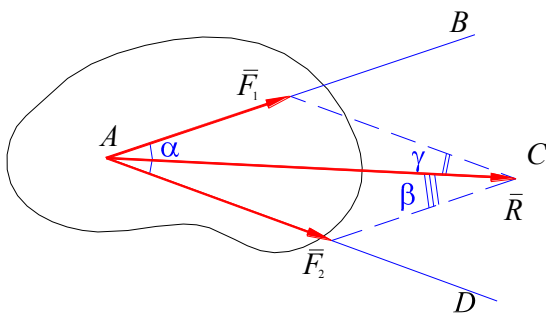
### III. Система сходящихся сил

#### 1. Задачи сложения системы сходящихся сил

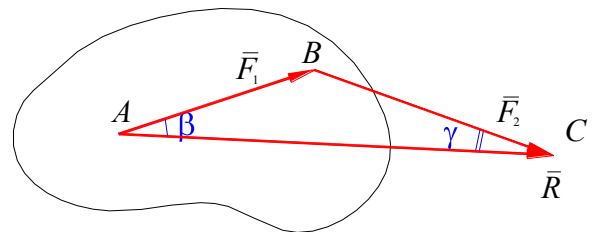
##### Сложение сил. Геометрический способ сложения сил.

Величина, равная геометрической сумме сил какой-нибудь системы называется **главным вектором** этой системы сил.

##### а) Сложение двух сил



(правило параллелограмма)



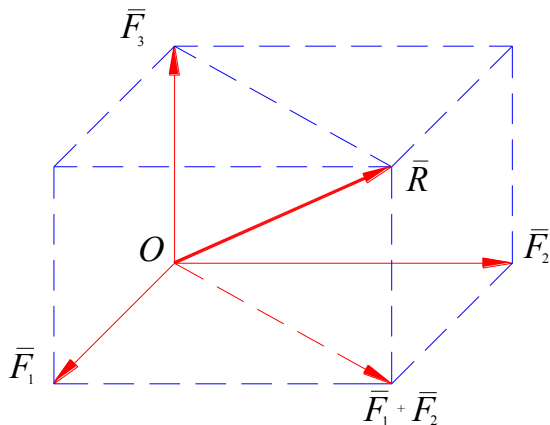
(правило треугольника)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

##### б) Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости

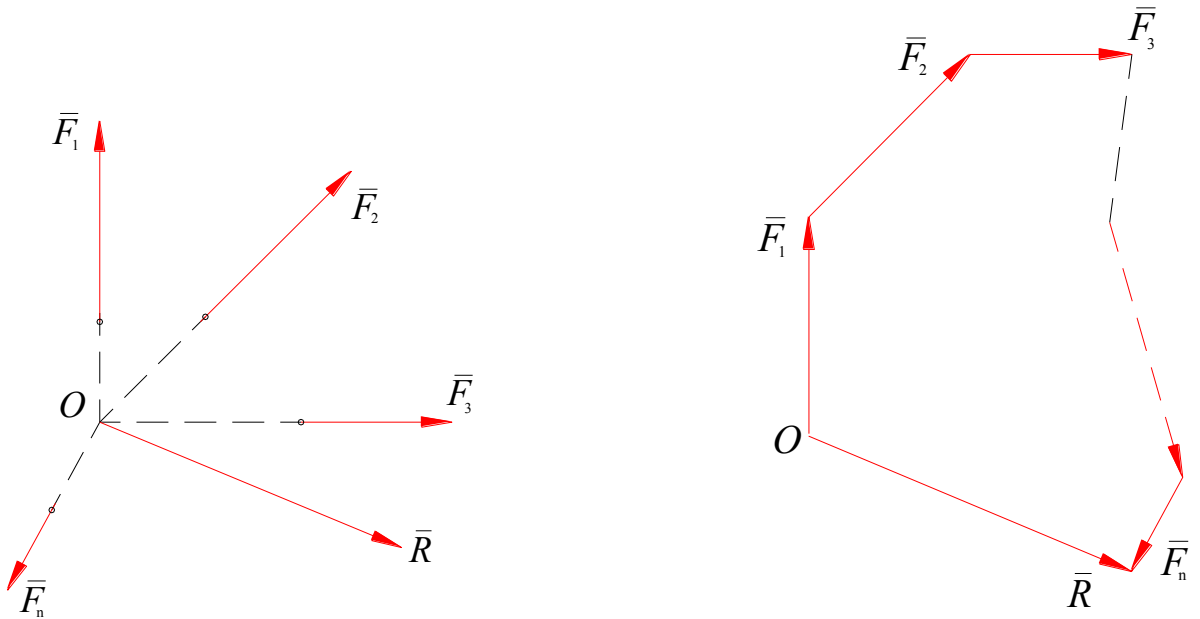


(правило параллелепипеда)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

### с) Сложение системы сил

При сложении системы сил построение силового многоугольника более удобно.



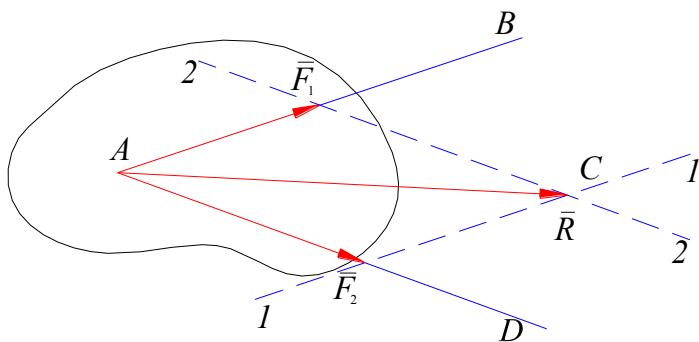
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

### Разложение сил

Разложить данную силу на несколько составляющих это значит найти такую систему нескольких сил, для которых данная сила является равнодействующей.

Эта задача является неопределенной и имеет однозначное решение при задании дополнительных условий:

а) Разложение по двум заданным направлениям



1-1 параллельна AB  
2-2 параллельна AD

(параллелограмм)

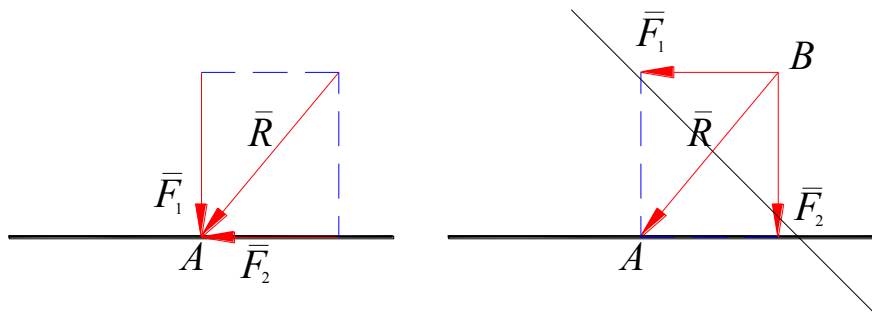
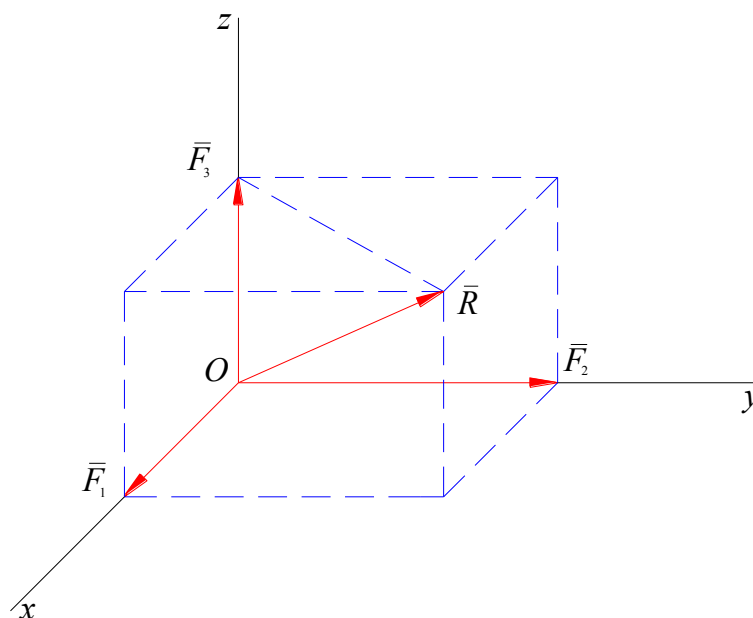


Рис. 1.

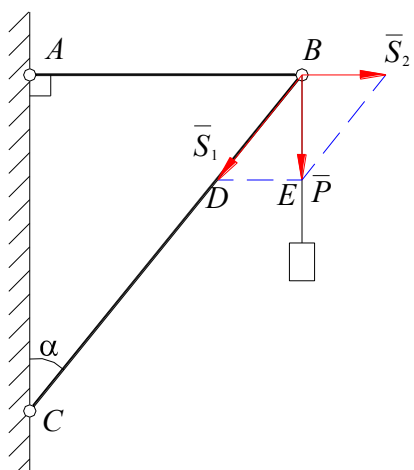
На (рис. 1) показано как следует раскладывать силу  $\bar{R}$  в декартовой системе координат и как этого выполнять нельзя.

б) Разложение по трем заданным направлениям



(параллелепипед)

Пример



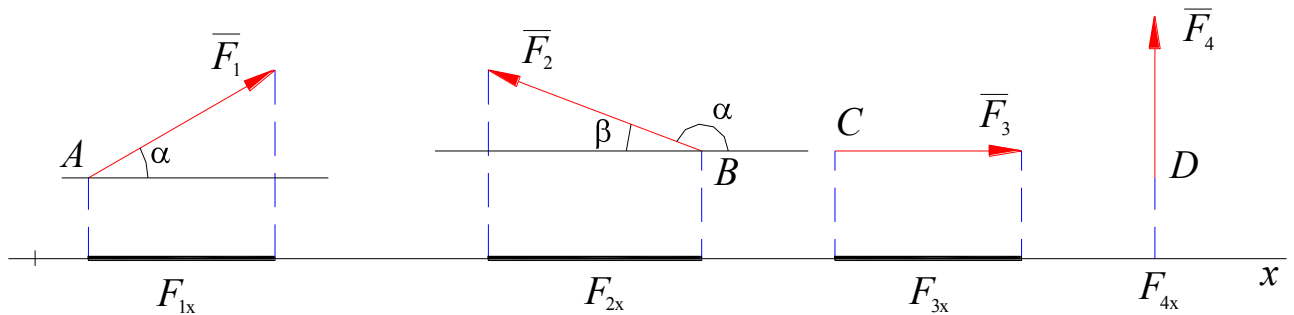
Кронштейн прикреплен к стене в точках А и С. Так как система является уравновешенной, то усилия возникающие в стержнях в сумме должны быть равны внешней силе  $\bar{P}$ . Разложим силу  $\bar{P}$  по двум направлениям АВ и ВС.

$\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  – усилия в стержнях.

$$S_1 = \frac{P}{\cos \alpha}; \quad S_2 = P \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

## Проекция силы на ось

Проекция силы на ось, есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.



$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha$$

$$F_{3x} = F_3 \quad F_{4x} = 0$$

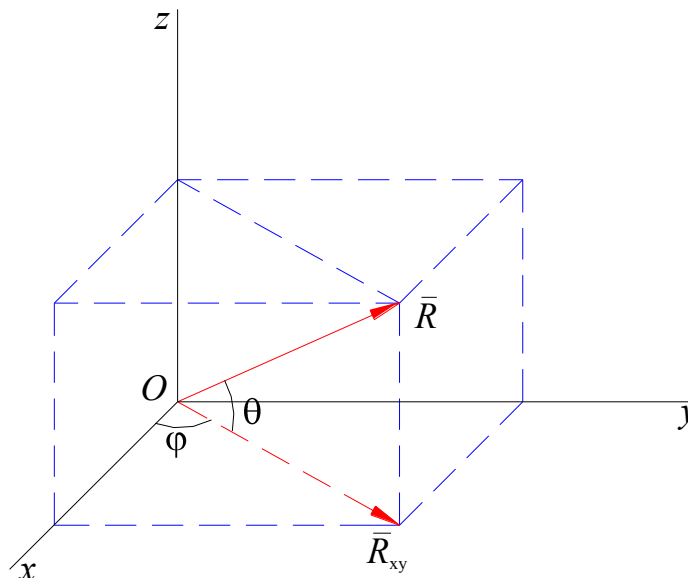
$$F_{2x} = F_2 \cos(180^\circ - \beta)$$

$$F_{2x} = -F_2 \cos \beta$$

Если линия действия силы **параллельна** данной оси, то проекция силы на эту ось **равна модулю силы**.

Если линия действия силы **перпендикулярна** данной оси, то проекция силы на ось **равна нулю**.

## Проекция силы на плоскость



Проекция вектора силы на плоскость величина векторная.

$$R_{xy} = R \cos \theta$$

Запишем выражения для проекций вектора  $\vec{R}$  на оси:

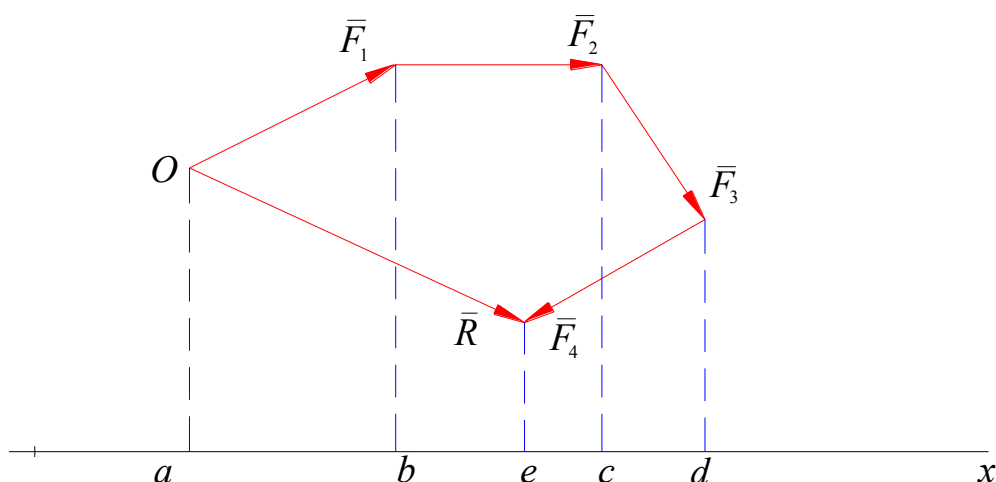
$$R_x = R_{xy} \cos \varphi = R \cos \theta \cos \varphi$$

$$R_y = R_{xy} \sin \varphi = R \cos \theta \sin \varphi$$

$$R_z = R \sin \theta$$

### Аналитический способ сложения сил

**Теорема:** Проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.



$$ae = ab + bc + cd - de$$

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

Для произвольной системы сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$  имеем:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$$

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^n F_{kx}, & R_y &= \sum_{k=1}^n F_{ky}, & R_z &= \sum_{k=1}^n F_{kz} \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos \alpha &= \frac{R_x}{R}, & \cos \beta &= \frac{R_y}{R}, & \cos \gamma &= \frac{R_z}{R} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Формулы (1) позволяют решить задачу о сложении сил аналитически.

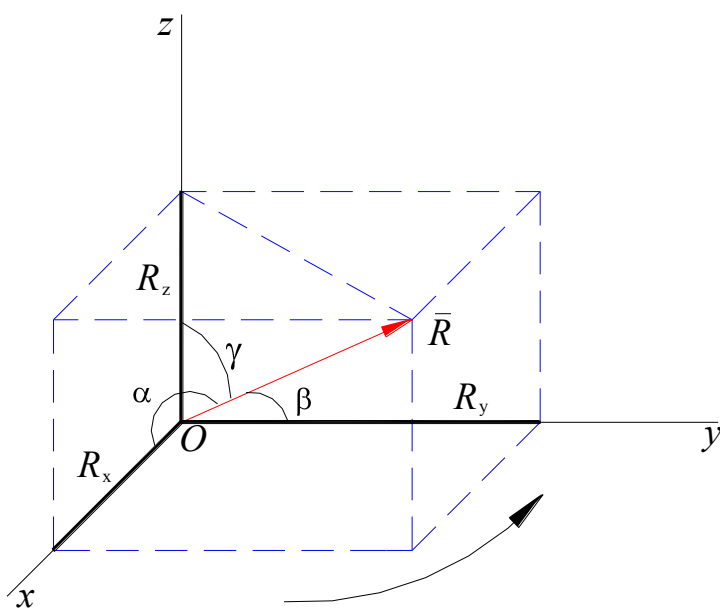
### Аналитический способ задания сил

**Правой системой координат** называется такая система, в которой кратчайшее совмещение оси  $Ox$  с осью  $Oy$  происходит, если смотреть с положительного конца оси  $Oz$ , против хода часовой стрелки.

Задают силу проекциями на координатные оси.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}$$



## 2. Определение условий равновесия системы сходящихся сил

### Равнодействующая системы сходящихся сил

Система сходящихся сил имеет равнодействующую равную **геометрической сумме** (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия.

### Равновесие системы сходящихся сил

Равнодействующая, а следовательно и главный вектор системы сходящихся сил равны **нулю**.

$$\bar{R} = 0 \tag{2}$$

Это условие является необходимым и достаточным.

- а) Геометрическое условие равновесия

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил был **замкнут**.

б) Аналитическое условие равновесия

Условие  $\bar{R} = 0$ , выполняется тогда когда

$$R_x = 0 \quad R_y = 0 \quad R_z = 0,$$

т.е.

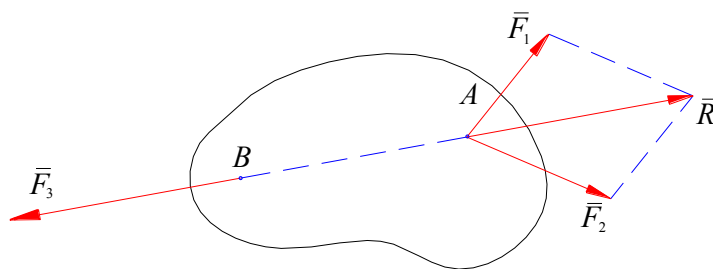
$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения (3) выражают аналитическую форму условий равновесия.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

### Теорема о трех силах

**Теорема:** Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.



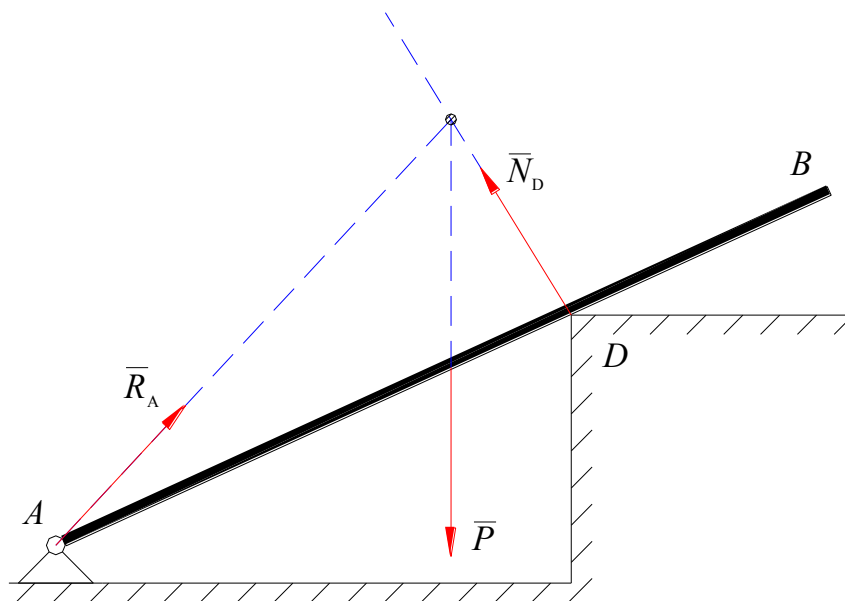
$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

$$\bar{F}_3 = -\bar{R}$$

Данная теорема выражает необходимое условие равновесия тела под действием трех сил.

Обратная теорема не имеет места.

**Пример**



### 3. Момент силы относительно точки. Теорема Вариньона.

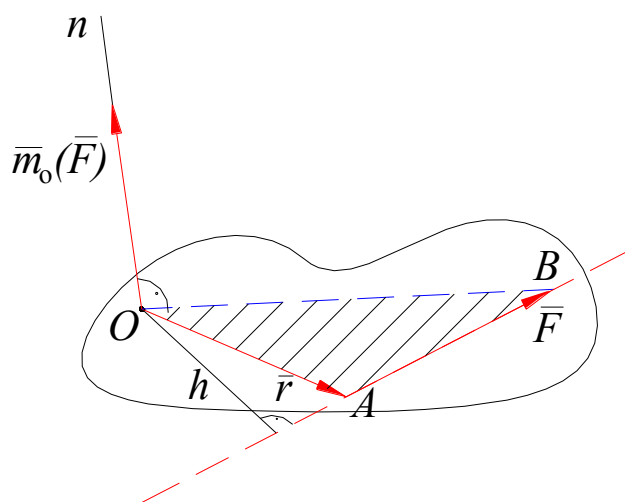
#### Сложение параллельных сил

Точка, относительно которой берется момент, называется **центром момента**.

Момент силы относительно этой точки называется **моментом относительно центра**.

Если тело под действием некоторой силы может совершать вращение вокруг некоторой точки, то момент характеризует вращательный эффект силы.

Перпендикуляр, опущенный из центра на линию действия силы  $\vec{F}$ , называется **плечом силы  $\vec{F}$**  (т.е. это есть кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы).





Момент силы относительно центра О определяется:

- 1) Модулем момента,  $(F \cdot h)$ ;
- 2) Положением в пространстве плоскости ОАВ (плоскости поворота) проходящей через центр О и силу  $\vec{F}$ ;
- 3) Направлением поворота в этой плоскости.

Моментом силы  $\vec{F}$  относительно центра О называется, приложенный в центре О вектор  $\vec{m}_o(\vec{F})$ , модуль которого равен произведению модуля силы  $\vec{F}$  на ее плечо  $h$  и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку О (центр) и силу, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра О против хода часовой стрелки.

Единица измерения момента силы  $[m_o(\vec{F})] = [\text{Н} \cdot \text{м}]$

$$|\vec{m}_o(\vec{F})| = F \cdot h = 2S_{\Delta OAB} \quad (4)$$

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5)$$

$$|\vec{m}_o(\vec{F})| = \vec{r} \cdot \vec{F} \cdot \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = 2S_{\Delta OAB},$$

где  $\vec{r}$  – радиус вектор точки А.

Т.о. момент силы  $\vec{F}$  относительно центра О равен векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из центра О в точку А приложения силы  $\vec{F}$ , на саму силу.

### Свойства момента силы

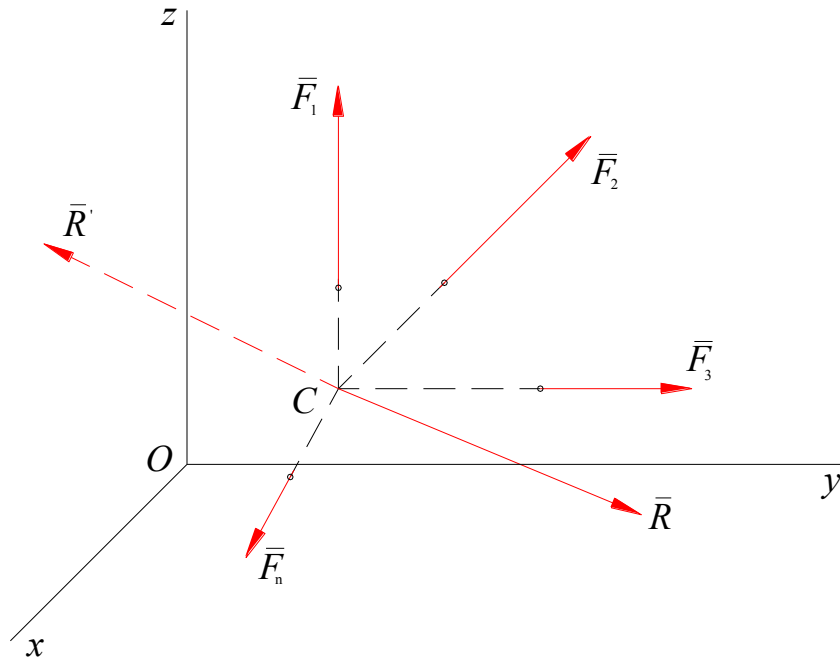
- 1) Момент силы не изменится при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия;
- 2) Момент силы равен нулю когда сила равна нулю;
- 3) Момент силы равен нулю когда линия действия силы проходит через точку О (центр), т.е. плечо равно нулю.

### Теорема о моменте равнодействующей (Вариньона)

**Теорема:** Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра О равен сумме моментов сил системы относительно того же центра.

Доказательство

Пусть система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  имеет равнодействующую  $\vec{R}$  проходящую через некоторую точку С.



Приложим в точке С силу  $\bar{R}' = -\bar{R}$ , тогда система сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'$  будет находиться в равновесии. Т.е. должно выполняться условие  $\bar{M}_o = 0$ .

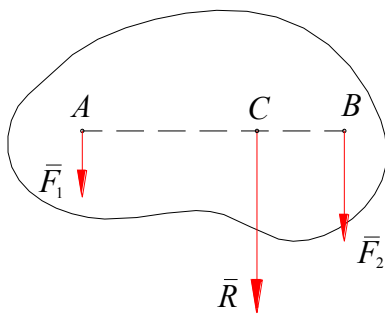
$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_k) + \bar{m}_o(\bar{R}') = 0$$

Так как  $\bar{R}' = -\bar{R}$ , то  $\bar{m}_o(\bar{R}') = -\bar{m}_o(\bar{R})$  и следовательно

$$\bar{m}_o(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_k)$$

### Сложение параллельных сил

Равнодействующая  $\bar{R}$  двух параллельных сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  одного направления, имеет такое же направление, а ее модуль равен сумме модулей слагаемых сил.



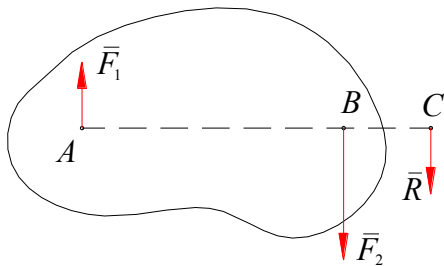
Точка приложения равнодействующей С делит отрезок между точками приложения сил А и В на части, обратно пропорциональные модулям сил.

$$R = F_1 + F_2$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AC + BC}{F_2 + F_1} = \frac{AB}{R}$$

Равнодействующая  $\bar{R}$  двух параллельных сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  противоположного направления, имеет направление силы, большей по модулю, и модуль равный разности модулей этих сил.



Точка приложения равнодействующей  $S$  лежит на продолжении отрезка  $AB$  за точкой приложения большей силы, на расстояниях от точек  $A$  и  $B$ , обратно пропорциональных модулям приложенных к ним сил.

$$R = F_2 - F_1$$

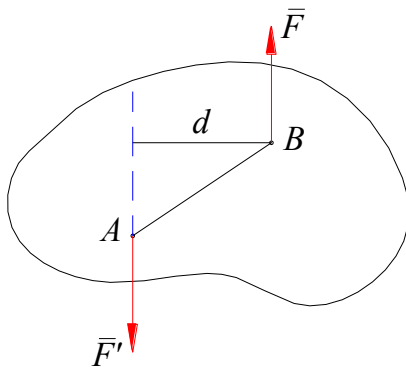
$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}$$

## IV. Теория пар сил, расположенных в одной плоскости

### 1. Момент пары сил

**Парой сил** называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело.



Система сил  $\bar{F}$  и  $\bar{F}'$  не находится в равновесии, т.к.  $F$  и  $F'$  не лежат на одной прямой.

Следовательно, пара сил не имеет равнодействующей:

$$\bar{R} = \bar{F} + \bar{F}' = 0$$

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется **плоскостью действия пары**.

Расстояние  $d$  называется **плечом пары**. (длина перпендикуляра между линиями действия сил пары).

Действие пары сводится к некоторому вращательному движению, которое характеризуется величиной называемой моментом пары.

Этот момент определяется:

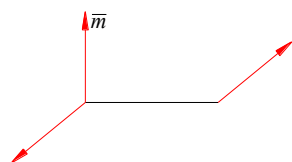
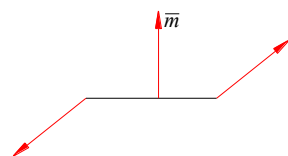
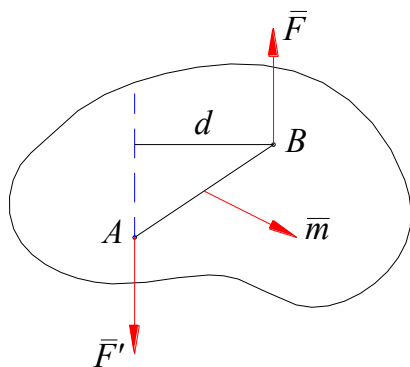
1. модулем, равным  $F \cdot d$ ;
2. положением в пространстве плоскости действия сил пары;
3. направлением поворота пары в этой плоскости.

Таким образом, момент пары величина **векторная**.

**Моментом пары** сил называется вектор  $\vec{m}$ , модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия сил пары, в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки.

$\vec{m} \perp$  плоскости пары.

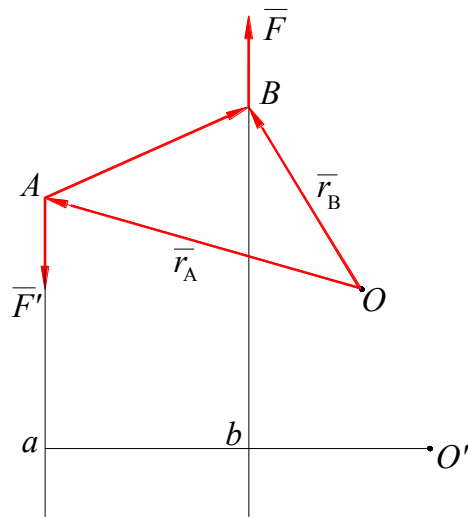
В отличие от вектора момента силы вектор  $\vec{m}$  может быть приложен в любой точке плоскости действия пары.



Такой вектор называется **свободным**.

Единица измерения момента  $[\vec{m}] = [\text{Н} \cdot \text{м}]$ .

Покажем, что момент пары сил равен сумме моментов относительно любого центра  $O$  сил, образующих пару:



$$\bar{m} = \bar{m}_o(\bar{F}) + \bar{m}_o(\bar{F}')$$

Доказательство

Проведем из произвольной точки  $O$  радиус-векторы  $\bar{r}_A = \overline{OA}$  и  $\bar{r}_B = \overline{OB}$

Учитывая, что  $\bar{F}' = -\bar{F}$

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = \bar{r}_B, \bar{F}$$

$$\bar{m}_o(\bar{F}') = \bar{r}_A, \bar{F}' = -\bar{r}_A, \bar{F}$$

$$\bar{m}_o(\bar{F}) + \bar{m}_o(\bar{F}') = \bar{r}_B - \bar{r}_A, \bar{F}$$

$$\bar{m}_o(\bar{F}) + \bar{m}_o(\bar{F}') = \bar{r}_{AB}, \bar{F}$$

Т.к.  $\bar{m} = \bar{r}_{AB}, \bar{F}$ , то ч.т.д.

Другое доказательство

$$m = -F \cdot O'b + F' \cdot O'a = F(O'a - O'b)$$

$$m = F \cdot ab$$

ч.т.д.

Отсюда следует, что:

$$\bar{m} = \bar{r}_{AB}, \bar{F} = \bar{m}_A(\bar{F}) \quad \text{или} \quad \bar{m} = \bar{m}_B(\bar{F}')$$

т.е., что момент пары равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

Т.к. выбор центра  $O$  произволен, то вектор  $\bar{m}$  можно считать приложенным в любой точке плоскости.

Если на тело действует несколько пар с моментами  $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \dots, \bar{m}_n$ , то сумма моментов всех сил, образующих эти пары, относительно любого центра равна

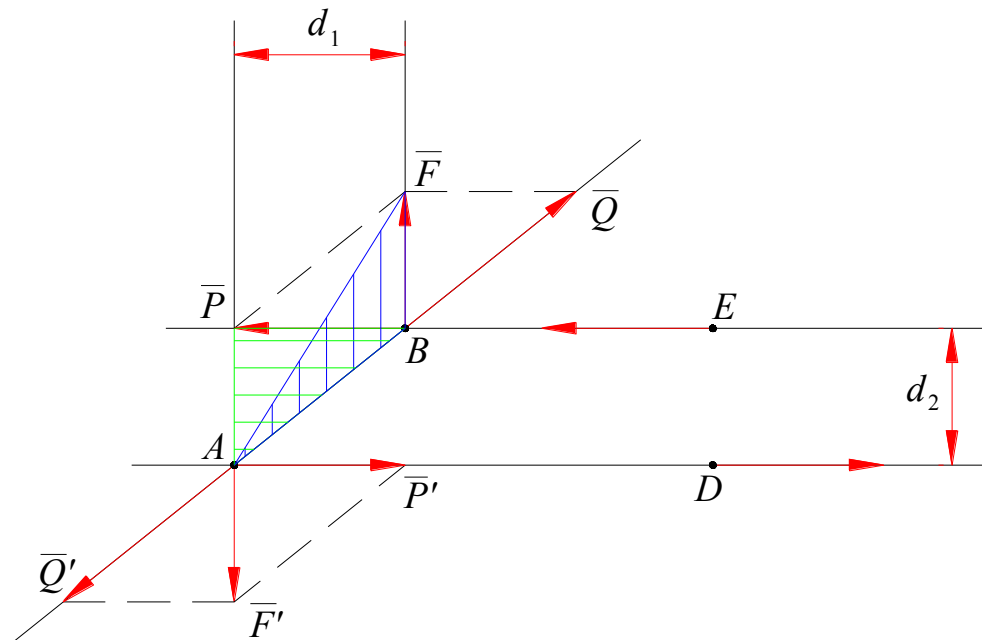
$\overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3 + \dots + \overline{m}_n$ , т.е. вся совокупность этих пар эквивалентна одной паре с моментом

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^n \overline{m}_k.$$

Этот результат выражает теорему о сложении пар.

## 2. Теорема об эквивалентности пар

Рассмотрим пару сил  $\overline{F}$  и  $\overline{F}'$  действующую на твердое тело. Проведем в плоскости действия пары две параллельные прямые через точки D и E до пересечения их с линиями действия сил  $\overline{F}$  и  $\overline{F}'$  в точках A и B. приложим силы  $\overline{F}$  и  $\overline{F}'$  в этих точках.



Разложим силу  $\overline{F}$  по направлениям AB и BE на силы  $\overline{Q}$  и  $\overline{P}$ , а силу  $\overline{F}'$  по направлениям AB и DA на силы  $\overline{Q}'$  и  $\overline{P}'$ . При этом  $\overline{P}' = -\overline{P}$   $\overline{Q}' = -\overline{Q}$ .

Силы  $\overline{Q}$  и  $\overline{Q}'$  как уравновешивающие отбрасываем. Т.о. пара сил  $\overline{F}$  и  $\overline{F}'$  будет заменена парой  $\overline{P}$  и  $\overline{P}'$  с другим плечом и другими силами, которые можно приложить в точках D и E на их линиях действия.

Покажем, что пары  $\overline{F}$ ,  $\overline{F}'$  и  $\overline{P}$ ,  $\overline{P}'$  имеют одинаковые моменты  $\overline{m}_1$  и  $\overline{m}_2$ :

$$\overline{m}_1 = \overline{[AB, \overline{F}]}, \quad \overline{m}_2 = \overline{[AB, \overline{P}]}$$

Т.к.  $\overline{F} = \overline{P} + \overline{Q}$ , то  $\overline{[AB, \overline{F}]} = \overline{[AB, \overline{P}]} + \overline{[AB, \overline{Q}]}$ , но  $\overline{[AB, \overline{Q}]} = 0$  т.к.  $\overline{AB} \parallel \overline{Q}$

Следовательно  $\overline{m}_1 = \overline{m}_2$  ч.т.д.

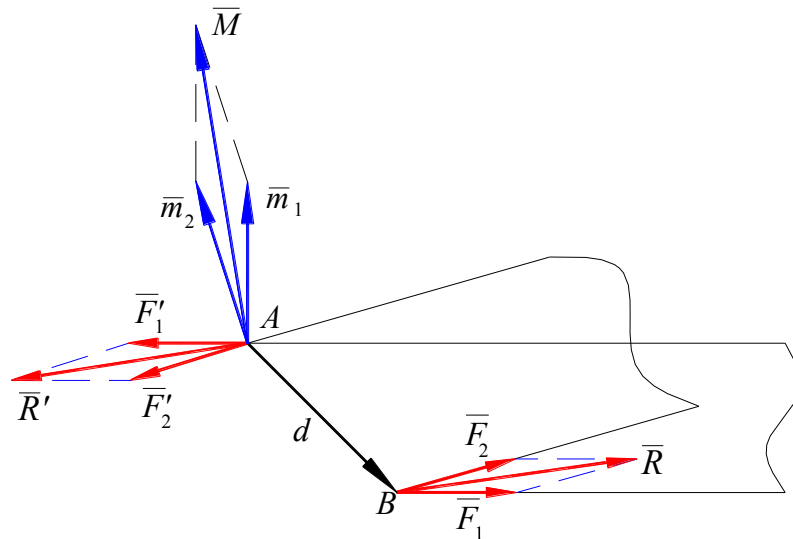
Свойства пары:

- пару можно переносить куда угодно в плоскости действия пары;
- у данной пары можно произвольно менять модули сил или длину плеча, сохраняя неизменным ее момент;
- пару можно перенести из данной плоскости в любую другую плоскость параллельную данной.

**Теорема:** Т.о. две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны друг другу.

### 3. Сложение пар сил

**Теорема:** Система пар, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.



Силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_1'$  образуют пары с моментом  $\vec{m}_1$ .

Силы  $\vec{F}_2, \vec{F}_2'$  образуют пары с моментом  $\vec{m}_2$ .

$$\vec{m}_1 = F_1 \cdot d, \quad \vec{m}_2 = F_2 \cdot d$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}, \quad \vec{F}_1' + \vec{F}_2' = \vec{R}'$$

$$\vec{AB}, \vec{R} = \vec{AB}, \vec{F}_1 + \vec{AB}, \vec{F}_2$$

Таким образом  $\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$

Если на тело действует система пар сил с моментами  $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3, \dots, \overline{m}_n$ , то

$$\overline{M} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3 + \dots + \overline{m}_n = \sum_{k=1}^n \overline{m}_k.$$

При равновесии должно быть  $\overline{M} = 0$ , следовательно

$$\sum_{k=1}^n \overline{m}_k = 0 \quad (6)$$

Выражение (6) называется **условием равновесия системы пар сил**.

## V. Произвольная плоская система сил

Теорема Пуансо. Случаи приведения плоской системы сил к простейшему виду. Условие равновесия плоской системы сил.

**Плоской системой сил** называется система сил как угодно расположенных в одной плоскости.

### Теорема Пуансо

**Теорема:** Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.

Доказательство

